

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

Ю. Е. Воскобойников, К. А. Втюрин, В. А. Литасов
(Новосибирск)

ДЕСКРИПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается новый алгоритм построения регуляризованного решения интегрального уравнения I-го рода с разностным ядром. Показано, что такой алгоритм позволяет учитывать различную априорную информацию об искомом решении (неотрицательность, возрастание, убывание и т. д.) и что использование дискретного преобразования Фурье и алгоритма быстрого преобразования Фурье существенно (на 2–3 порядка) уменьшает число операций по сравнению с известными алгоритмами. Эффективность предлагаемого алгоритма иллюстрируется решением обратной задачи спектроскопии.

Введение. Многие измерительные оптические системы могут быть представлены интегральным уравнением I-го рода с разностным ядром вида

$$\int_a^b k(t) f(t) dt = g(t), \quad a_f \leq t \leq b_f, \quad (1)$$

где $k(t)$ – аппаратная функция. Задача восстановления входного сигнала заключается в решении уравнения (1) относительно функции $f(t)$. Такая задача относится к некорректно поставленным [1, 2], и основная трудность ее решения обусловлена слабой устойчивостью получаемого (обычными методами) решения к погрешности $\delta g(t)$ задания правой части, когда вместо точной правой части $f(t)$ известна зашумленная функция $\tilde{f}(t) = f(t) + \delta f(t)$. Для построения устойчивых решений используются различные линейные методы регуляризации [1–4], в которых в той или иной форме задается априорная информация о «гладкости» функции $f(t)$. В ряде случаев имеется априорная информация о значениях или поведении функции $f(t)$, например: а) функция $f(t)$ неотрицательна на заданных интервалах аргумента t ; б) функция $f(t)$ монотонно возрастает или монотонно убывает на заданных интервалах аргумента t . Учет такой «качественной» априорной информации, возможно, позволил бы получить регуляризованное решение, адекватное априорным ограничениям на функцию $f(t)$.

Существует несколько подходов к построению алгоритмов решения операторных уравнений I-го рода, учитывающих априорную информацию о функции (\cdot) . Эти алгоритмы получили название дескриптивных регуляризирующих алгоритмов. Первый подход используется в случаях, когда ограничения на функцию (\cdot) определяют в пространстве решений компактное множество, на котором (при определенных условиях) обратный оператор задачи непрерывен, а, следовательно, получаемое решение устойчиво к погрешностям задания правой части [5]. Такими ограничениями могут являться требования выпуклости или монотонности и выпуклости функции (\cdot) .

К сожалению, имеющаяся на практике априорная информация (например, условие неотрицательности (\cdot)) не гарантирует принадлежность (\cdot) компактному множеству. В этом случае обращаются ко второму подходу, когда регуляризованное решение определяется из условия минимума сглаживающего функционала с учетом ограничений, задаваемых системой неравенств (в общем случае нелинейных). Если система ограничений линейна и сглаживающий функционал является квадратичным, то решается задача квадратичного программирования [6]. Различные алгоритмы решения этой задачи (метод проекции градиента, метод условного градиента и т. д.) требуют значительного числа вычислительных операций, что при большой размерности дискретного аналога уравнения (1) приводит к существенным трудностям вычислительного характера. Поэтому целью данной работы является построение эффективного дескриптивного регуляризирующего алгоритма восстановления сигналов, учитывающего:

- а) разностный характер ядра интегрального уравнения (1);
- б) априорную информацию о значениях функции (\cdot) (или ее производной) в узлах дискретизации, задаваемую системой линейных неравенств.

Однако вначале приведем основные соотношения линейного регуляризирующего алгоритма, необходимые для построения дескриптивного регуляризирующего алгоритма восстановления сигналов.

Линейный регуляризирующий алгоритм. Разностный характер ядра интегрального уравнения (1) обуславливает применение дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) для построения эффективного (по количеству вычислительных операций) регуляризирующего алгоритма [3, с. 174]. Для этого бесконечномерное уравнение (1) аппроксимируют конечномерным дискретным аналогом вида

$$\sum_{j=0}^{N-1} k_{i-j} f_j = \tilde{f}_i, \quad i = 0, \dots, N_f - 1, \quad (2)$$

где Δt – шаг дискретизации функций (\cdot) , $f(t)$; N , N_f – размерность векторов \mathbf{k} , \mathbf{f} , полученных в результате проведенной дискретизации. Шаг Δt выбирают таким, чтобы ошибка квадратурной формулы (2) была мала по сравнению с погрешностью $\tilde{f}(t)$ задания правой части уравнения (1).

Предположим, что:

1. Функция (\cdot) финитна и вне интервала $[a, b]$ обращается в нуль. Тогда $N = \text{ent}[(b - a) / \Delta t]$, где $\text{ent}[z]$ – целая часть числа z .
2. Функция $k(\cdot)$ финитна и вне интервала $[a_k, b_k]$ обращается в нуль. Тогда $N_k = \text{ent}[(b_k - a_k) / \Delta t]$.

При этих предположениях выходной сигнал $\tilde{f}(t)$ также является финитной функцией, обращающейся в нуль вне интервала $[a_f, b_f]$, где $a_f = a_k, b_f = b_k$. Тогда $N_f = \text{ent}[(b_f - a_f)/\tau] + 1$. Сформируем периодические (с периодом N) последовательности:

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(a_f + j\tau), & j = 0, \dots, N_f - 1; \\ 0, & j = N_f, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$k_p(j) = \begin{cases} k(j\tau - \tau), & j = 0, \dots, N_k - 1; \\ 0, & j = N_k, N_k + 1, \dots, N - N_k - 1; \\ k((j - N)\tau - \tau), & j = N - N_k, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Прямое ДПФ от последовательности $\{z_p(j)\}$ определим как

$$Z_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_p(j) e^{\sqrt{-1} \frac{2lj}{N}}, \quad l = 0, \dots, N - 1,$$

и запишем в матричном виде:

$$Z_p = W_N z_p,$$

где W_N – матрица размера $N \times N$, а Z_p – вектор коэффициентов ДПФ. Аналогично обратное ДПФ, определяемое как

$$z_p(j) = \sum_{l=0}^{N-1} Z_p(l) e^{\sqrt{-1} \frac{2lj}{N}}, \quad j = 0, \dots, N - 1,$$

запишем в виде

$$z_p = W_N^{-1} Z_p.$$

Очевидно, что $W_N W_N^{-1} = W_N^{-1} W_N = I$. Процедуру (3) формирования последовательности $\{\tilde{f}_p(j)\}$ (вектор \tilde{f}_p) также запишем в матричном виде:

$$\tilde{f}_p = S_N \tilde{f},$$

где S_N – матрица размера $N \times N_f$, элементы которой определяются как

$$\{S_N\}_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

а проекции вектора \tilde{f} выражаются соотношением

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}(a_f + j\tau), \quad j = 0, \dots, N_f - 1.$$

Тогда линейный регуляризирующий алгоритм вычисления вектора регуляризованного решения \tilde{x}_p можно представить матричным выражением

$$\tilde{x}_p = W_N^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{k^{(l)}}{|k^{(l)}|^2 + Q_p(l)} \right\} W_N \tilde{f}, \quad (4)$$

где α – параметр регуляризации, который пока предполагается заданным. Последовательность $\{Q_p(l)\}$ формируется как

$$Q_p(l) = \begin{cases} Q(l/\alpha), & l = 0, \dots, N/2; \\ Q((N-l)/\alpha), & l = N/2 + 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

где $\Delta = 1/(N/\alpha)$ – шаг дискретизации в частотной области. Функцию $Q(\omega)$ можно трактовать как частотную характеристику стабилизирующего функционала $Q(\omega)$ при $\alpha = 1/\omega$. Если задан порядок регуляризации r , то при достаточно больших значениях α справедлива асимптотика $Q(\omega) \sim \omega^{-2r}$. Последовательность комплексных чисел $k = \{k^{(l)}, l = 0, \dots, N-1\}$ определяется матричным выражением

$$k = N(W_N k_p)^*,$$

где $(\cdot)^*$ означает операцию комплексного сопряжения.

Затем по найденному N -мерному вектору \tilde{x}_p определяется вектор следующим соотношением:

$$\{x_j\}_j = \tilde{x}_p(j), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Эту процедуру можно записать в матричном виде:

$$P_N \tilde{x}_p = x,$$

где матрица P_N имеет размер $N \times N$, а ее элементы определяются выражением

$$\{P_N\}_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

При выполнении условия

$$N_f \geq N_k + 1 \quad (5)$$

j -я проекция является оценкой значения $(a_j - N_k \Delta_j / \Delta_j), j = 0, \dots, N-1$. Заметим, что в отличие от прямых методов построения регуляризованного решения системы (2) (где требуется порядок N^3 операций), алгоритмы (6), (7) требуют порядка $N \log_2 N$ операций, и поэтому при достаточно больших N (больше 100) алгоритм (4) на 2–3 порядка сокращает число вычислительных операций [3, с. 174]. Это важное обстоятельство определило целесообразность принятия алгоритма (4) в качестве «вычисли-

тельного фундамента» при построении дескриптивного регуляризирующего алгоритма.

Дескриптивный регуляризирующий алгоритм. Предположим, что априорную информацию относительно вектора (входящего в дискретное уравнение (2)) можно задать матричным неравенством

$$G \leq g, \quad (6)$$

где G – матрица размера $N_g \times N$. Так, для неотрицательной функции () ограничение (6) примет вид $I \leq \theta$, где I – единичная матрица, θ – нулевой вектор.

Используя известное свойство ДПФ

$$\|z_p\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |z_p(j)|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |Z_p(l)|^2 = N \|Z_p\|^2,$$

вычисление вектора p коэффициентов ДПФ регуляризованного решения p можно свести к решению следующей вариационной задачи:

$$\min (p^*)^T \text{diag} \{ |k(l)|^2 Q_p(l) \} p - 2(p^*)^T \text{diag} \{ k^*(l) \tilde{F} \} \tilde{F} + \|\tilde{F}\|^2,$$

где $\tilde{F} = W_N S_N f$. Очевидно, что ее решением является вектор

$$p = \text{diag} \left\{ \frac{k^*(l)}{|k(l)|^2 Q_p(l)} \right\} \tilde{F} \quad (7)$$

(см. выражение (4)). Введем обозначения:

$$D = 2 \text{diag} \{ |k(l)|^2 Q_p(l) \}; \quad d = 2 \text{diag} \{ k^*(l) \tilde{F} \}; \quad c = \|\tilde{F}\|^2.$$

Тогда нахождение вектора \hat{p} дескриптивного регуляризованного решения \hat{p} сводится к задаче квадратичного программирования (задача А): найти вектор \hat{p} , доставляющий минимум функционалу

$$(p) \frac{1}{2} (p^*)^T D p - (p^*)^T d + c$$

при ограничении $GP_N W_N^{-1} p \leq g$.

Заметим, что размерность решаемой задачи равна N , а вектор \hat{p} является комплексным. Так как во многих случаях число строк N_g в системе ограничений (6) существенно меньше N , рассмотрим двойственную по

Лагранжу задачу, которая состоит в вычислении вектора \hat{p} , максимизирующего функционал

$$(\hat{p}) \inf_p \frac{1}{2} (\hat{p})^T D \hat{p} - (\hat{p})^T d + c [(GP_N W_N^{-1} \hat{p} - g)^*]^T \quad (8)$$

при ограничении

$$\hat{p} \geq 0, \quad (9)$$

где \hat{p} – вещественный вектор множителей Лагранжа размерности N_g . При любом $\hat{p} \geq 0$ матрица D строго положительна, и поэтому при любом фиксированном векторе \hat{p} минимум функционала, стоящего в фигурных скобках выражения (8), достигается на векторе \hat{p} , определяемом выражением

$$\hat{p} = D^{-1} (W_N^{-1})^{*T} P_N G^T. \quad (10)$$

Видно, что вектор ДПФ дескриптивного решения определяется двумя слагаемыми: первое слагаемое – регуляризованное решение (7), построенное без учета ограничений; второе слагаемое находится решением двойственной задачи, т. е. вектором \hat{p} , и это слагаемое можно интерпретировать как коррекцию первого слагаемого.

Вернемся к решению двойственной задачи (8), (9). Подставляя в (8) выражение (10), функционал (\hat{p}) можно записать в виде

$$(\hat{p}) = \frac{1}{2} \hat{p}^T Q \hat{p} - \hat{p}^T q + \text{const},$$

где

$$Q = GP_N W_N^{-1} D^{-1} (W_N^{-1})^{*T} P_N^T G^T;$$

$$q = GP_N W_N^{-1} D^{-1} d - g - GP_N \hat{p} - g.$$

Окончательно двойственную задачу (задачу В) можно сформулировать следующим образом: вычислить вектор \hat{p} , минимизирующий функционал

$$\frac{1}{2} \hat{p}^T Q \hat{p} - \hat{p}^T (GP_N \hat{p} - g) + \text{const} \quad (11)$$

при ограничении $\hat{p} \geq 0$.

Вычисленный вектор \hat{p} подставляем в выражение (10) и получаем вектор коэффициентов ДПФ \hat{p} дескриптивного решения. Обратное ДПФ от этого вектора определяет последовательность $\{\hat{p}(j)\}$, по которой (при выполнении условия (5)) вычисляются значения дескриптивного решения уравнения (1) в узлах дискретизации

$$\hat{p}(a_f - N_k - t - j - t) = \{\hat{p}(j)\} = \hat{p}(j), \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Эффективность построенного дескриптивного алгоритма восстановления определяется следующими моментами. Во-первых, вариационная задача В (11) из-за более простых ограничений и меньшей размерности ($N_g = N$) требует меньших вычислительных затрат по сравнению с решением вариационной задачи А. Во-вторых, через решение задачи (11) только один раз осуществляется вычисление коэффициентов ДПФ дескриптивного решения (см. (10)), а затем с помощью обратного ДПФ определяется и само дескриптивное решение. Использование алгоритма БПФ для вычисления ДПФ обуславливает существенное уменьшение вычислительных затрат по сравнению с решением задачи квадратичного программирования для нахождения вектора регуляризованного решения. Так, для $N = 100$ время вычисления дескриптивного регуляризованного решения уменьшилось в 90 раз.

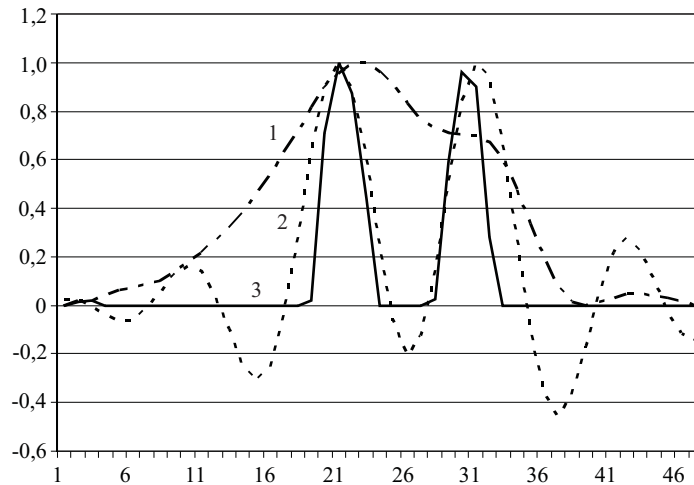
Заметим, что при построении регуляризованного решения p (без учета ограничений) параметр регуляризации предполагался заданным. Параметр регуляризации можно выбрать известными алгоритмами [1–3], в том числе алгоритмом [7], определяющим по заданной ширине аппаратной функции системы «измерительный прибор + регуляризирующий алгоритм». Такой подход к выбору параметра оправдан в случаях, когда известны «размеры» составляющих сигнала (\cdot) , которые необходимо «сохранить» в дескриптивном решении.

Решение обратной задачи лазерной спектроскопии. Для иллюстрации эффективности предлагаемого дескриптивного алгоритма рассмотрим решение обратной задачи лазерной спектроскопии, связанной с исследованием поглощения и излучения кристаллов (экспериментальные данные предоставлены сотрудниками Сибирского научно-исследовательского института метрологии (г. Новосибирск)). Данная задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I-го рода с разностным ядром:

$$f(\cdot) = k(\cdot) (\cdot) d, \quad (12)$$

где $k(\cdot)$ – инструментальный контур; $f(\cdot)$ – спектр, наблюдаемый на выходе спектрометрической системы во время сканирования. Необходимо отметить, что инструментальный контур не имеет симметричной формы и, более того, может иметь несколько экстремумов. Обусловленность матрицы системы (2), полученной после дискретизации уравнения (12), равна 10^4 .

На рисунке представлены проекции сигнала, поступающего со светового датчика (кривая 1), в котором две составляющие спектра не разделены, а также регуляризованные решения: кривая 2 – решение (без учета ограничений), кривая 3 – дескриптивное решение $\hat{\cdot}$, при построении которого учитывалась априорная информация о неотрицательности и монотонности функции (\cdot) на отдельных интервалах. Следует обратить внимание на то, что интервалы монотонности априори не задавались, а определялись по положению максимальных значений решения. Выбор параметра регуляризации осуществлялся по заданной ширине аппаратной функции системы «измерительный прибор + регуляризирующий алгоритм», равной 3, где шаг дискретизации уравнения (12). Следует отметить, что, несмотря на тривиальность используемой априорной информации, дескриптивное решение имеет существенно меньшую ошибку решения и четко показывает положение линий спектра поглощения и излучения кристаллов.



Заключение. В работе предложен эффективный регуляризирующий алгоритм, позволяющий учитывать количественную априорную информацию о значениях искомого решения интегрального уравнения Фредгольма I-го рода с разностным ядром. На решении обратной задачи лазерной спектроскопии показано, что учет даже тривиальной априорной информации может существенно повысить точность регуляризованного решения. Построенный дескриптивный регуляризирующий алгоритм легко модифицируется для решения интегрального уравнения Вольтера I-го рода с разностным ядром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
4. Морозов В. А., Гребенников А. И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
7. Воскобойников Ю. Е. Решение обратных измерительных задач с заданными точностными характеристиками // Автометрия. 1988. № 2. С. 71.

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет,
E-mail: voscob@ngasu.nsk.su

Поступила в редакцию
29 марта 2004 г.