

УДК 539.3.01:624.072.21/23

## О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА НА ПРОНИЗЫВАЮЩИХ ЕГО ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

И. И. Аргатов, С. А. Назаров

Государственная морская академия им. адм. С. О. Макарова, 199026 Санкт-Петербург

Предлагается простая математическая модель конструкции, состоящей из трехмерного тела и тонких жестких несущих стержней. Расчетными характеристиками являются прогибы стержней, их усредненные вдоль сечений реакции и параметры осадки тела. Задача, полученная на основе асимптотического анализа, включает уравнения изгиба стержней, уравнения равновесия тела и соотношение, связывающее реакции с прогибами стержней. В ней наряду с моментом инерции присутствует другая геометрическая характеристика поперечного сечения стержня — внешний конформный радиус. Обсуждаются способ решения данной задачи и пути ее обобщения.

**Введение.** В настоящей работе предлагается простая методика расчета напряженно-деформированного состояния трехмерного упругого тела, соединенного со стержнями, основанная на асимптотическом анализе. В [1] исследована задача о передаче нагрузки упругому полупространству через заделанный в него упругий стержень. В [2, 3] построена асимптотическая теория сочленений со стержнями, торцами припаянными к поверхности тела. Для рассматриваемой нами конструкции известно [4, 5] только асимптотическое решение задачи теплопроводности.

Напряженно-деформированное состояние конструкции, а также вид асимптотики в первую очередь зависят от соотношений модулей упругости материалов, из которых изготовлены стержни и тело. Так, если несущие стержни податливы, то в главном приближении тело можно считать абсолютно жестким, а расчет конструкции проводить поэтапно. На первом этапе определяются прогибы стержней, на втором — осадка тела, а на третьем методом пограничных слоев (решение задач для полупространства с цилиндрической полостью [6]) уточняется напряженно-деформированное состояние тела в окрестностях выхода из него стержней. В [4, 5] показано, что задача не «расщепляется», если стержни достаточно жесткие. Этот наиболее сложный случай изучается ниже.

**Постановка задачи.** Рассмотрим конструкцию (рис. 1), состоящую из тела  $\Omega_\varepsilon$  и тонких прямых стержней  $Q_\varepsilon^1$  и  $Q_\varepsilon^2$  ( $\varepsilon > 0$  — малый параметр, характеризующий поперечные размеры стержней). Обозначим через  $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$  и  $\rho_j$ ,  $E_j$ ,  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона для тела и стержней. Все элементы конструкции выполнены из однородных изотропных линейно-упругих материалов, причем сцепление стержней с телом идеальное (без проскальзывания и отслоения). Конструкция испытывает малые деформации под действием сил тяжести, поверхностные нагрузки отсутствуют, а концы стержней закреплены неподвижно.

Исследуем задачу об определении усилий, передаваемых с  $\Omega_\varepsilon$  на  $Q_\varepsilon^1$  и  $Q_\varepsilon^2$ . Предположим, что оси стержней (прямые  $x_1 = x_1^j$ ,  $x_2 = 0$ ) параллельны оси  $Ox_3$  и расположены в горизонтальной плоскости  $x_2 = 0$ . При этом поперечное сечение  $\omega_\varepsilon^j$  стержня  $Q_\varepsilon^j$  ограничено эллипсом, главные оси которого имеют длины  $2a_\varepsilon^j = 2\varepsilon A_j$ ,  $2b_\varepsilon^j = 2\varepsilon B_j$  и параллельны осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ .

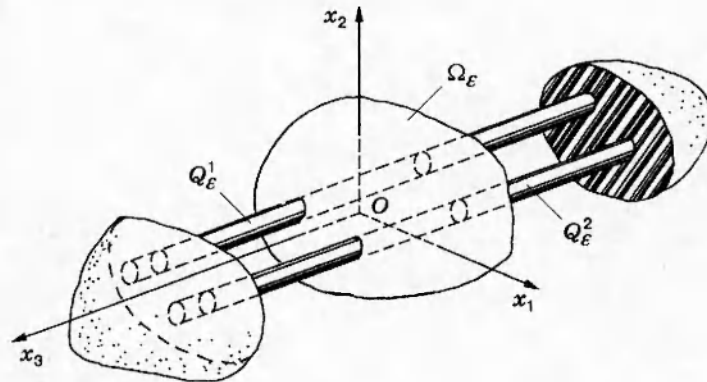


Рис. 1

**Задача определения перемещений стержней.** Под тяжестью тела стержни  $Q_\epsilon^1$  и  $Q_\epsilon^2$  длиной  $2l_1$  и  $2l_2$  соответственно испытывают изгиб. Обозначим через  $w^j$  вертикальный прогиб изогнутой оси стержня  $Q_\epsilon^j$ . Момент инерции сечения  $\omega_\epsilon^j$  относительно оси  $Ox_1$  вычисляется по формуле

$$I_\epsilon^j = \frac{\pi}{4} a_\epsilon^j (b_\epsilon^j)^3 = \epsilon^4 \frac{\pi}{4} A_j B_j^3. \quad (1)$$

Предположим симметрию относительно вертикальной плоскости  $Ox_1x_2$  в расположении стержней и их частей, контактирующих с телом.

Применяя техническую теорию изгиба, воздействие упругого тела на стержни заменим распределенными нагрузками (рис. 2). Неизвестную на участке контакта нагрузку  $p^j$  вводим в правую часть дифференциального уравнения для определения  $w^j$ :

$$E_j I_\epsilon^j \frac{d^4 w^j}{dz^4}(z) = -q_\epsilon^j - p^j(z), \quad |z| < h_j; \quad (2)$$

$$E_j I_\epsilon^j \frac{d^4 w^j}{dz^4}(z) = -q_\epsilon^j, \quad h_j \leq |z| < l_j. \quad (3)$$

Здесь  $j = 1, 2$ ;  $z = x_3$ ;  $q_\epsilon^j$  — погонный вес стержня  $Q_\epsilon^j$ ,

$$q_\epsilon^j = \pi a_\epsilon^j b_\epsilon^j \rho_j g = \epsilon^2 \pi A_j B_j \rho_j g \quad (4)$$

( $g$  — ускорение свободного падения). На концах стержней ставятся условия жесткой заделки

$$w^j(\pm l_j) = 0, \quad \frac{dw^j}{dz}(\pm l_j) = 0. \quad (5)$$

В отсутствие сосредоточенных нагрузок функции  $w^1$  и  $w^2$  трижды непрерывно дифференцируемы.

**Поле перемещений тела вдали от стержней.** При моделировании действия стержня  $Q_\epsilon^j$  на тело нагрузками  $p^j$ , распределенными вдоль отрезка длиной  $2h_j$  (рис. 3), получаем вторую основную краевую задачу теории упругости для области  $\Omega_0$ . Ее решение определено с точностью до жесткого смещения, и соответствующее векторное поле представимо в виде

$$v(\mathbf{x}) = \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \beta_1 (x_2 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{e}_2) + \beta_3 (x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1) + \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i}^{h_i} p^i(s) G^{(2)}[\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}^i(s)] ds, \quad (6)$$

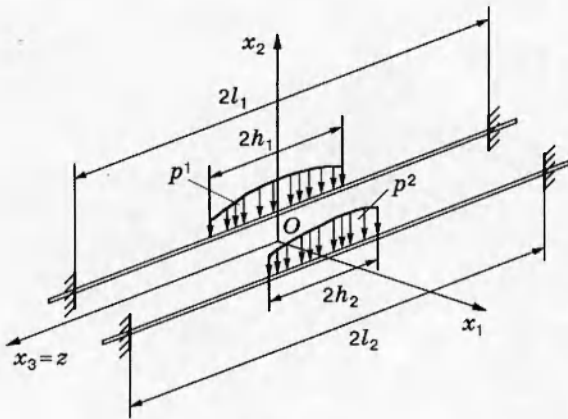


Рис. 2

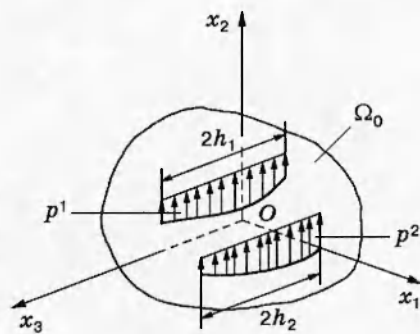


Рис. 3

где  $\alpha_2, \beta_1, \beta_3$  — характеристики осадки тела (вертикальное смещение и углы поворота относительно осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$ );  $G^{(2)}[\mathbf{x}; \xi^i(s)]$  — вектор-функция Грина для области  $\Omega_0$ , соответствующая единичной силе, сосредоточенной в точке  $\xi^i(s) = (x_1^i, 0, s)$  и направленной вдоль оси  $Ox_2$  (см., например, [7, с. 175–183]).

Система нагрузок  $p^1$  и  $p^2$  должна статически уравнивать силы тяжести, т. е.

$$\sum_{i=1}^2 \int_{-h_i}^{h_i} p^i(s) ds + F_2 = 0, \quad (7)$$

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{-h_i}^{h_i} s p^i(s) ds - x_3^* F_2 = 0, \quad \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i}^{h_i} x_1^i p^i(s) ds + x_1^* F_2 = 0.$$

Здесь  $\bar{F}_2 = -\rho|\Omega_0|g$ ,  $|\Omega_0|$  — объем  $\Omega_0$ ;  $x_1^*$  и  $x_3^*$  — координаты центра тяжести  $\Omega_0$ , которые незначительно (порядка  $\epsilon$ ) отличаются от координат центра тяжести  $\Omega_\epsilon$ .

Справедливо разложение

$$G^{(2)}(\mathbf{x}; \xi) = \mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{x} - \xi) + \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}; \xi), \quad (8)$$

где  $\mathbf{T}^{(2)}$  — решение Кельвина для упругого пространства, находящегося под действием единичной силы в направлении  $Ox_2$ ,

$$\mathbf{T}^{(2)} = \frac{1 + \nu}{8\pi E(1 + \nu)} \left( \frac{x_1 x_2}{|\mathbf{x}|^3}, (3 - 4\nu) \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{x_2^2}{|\mathbf{x}|^3}, \frac{x_2 x_3}{|\mathbf{x}|^3} \right). \quad (9)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)$  неограниченно возрастают при  $\mathbf{x} \rightarrow \xi$ , а компоненты регулярной части  $\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}; \xi)$  вектор-функции Грина остаются ограниченными. Поле (6) также имеет особенности (логарифмические), поэтому может использоваться в качестве приближения к реальному полю смещения в  $\Omega_\epsilon$  лишь на удалении от стержней. Другими словами, поле (6) интерпретируется как дальнее поле или внешнее представление решения (в рамках метода сращиваемых асимптотических разложений). Построению внутренних представлений вблизи стержней  $Q_\epsilon^1$  и  $Q_\epsilon^2$  и сращиванию их с внешним представлением посвящены следующие три пункта статьи.

**Поле перемещений вблизи стержней.** Введем координаты  $(\mathbf{y}^j, z)$ , связанные со стержнем  $Q_\varepsilon^j$ , а также растянутые (быстрые) переменные  $\boldsymbol{\eta}^j$  в плоскостях, перпендикулярных его оси:

$$y_1^j = x_1 - x_1^j, \quad y_2^j = x_2 - x_2^j, \quad z = x_3; \quad (10)$$

$$\eta_1^j = \varepsilon^{-1} y_1^j, \quad \eta_2^j = \varepsilon^{-1} y_2^j. \quad (11)$$

В координатах  $(\boldsymbol{\eta}^j, z)$  полуоси эллиптического сечения стержня равны  $A_j$  и  $B_j$ , т. е. не зависят от параметра  $\varepsilon$ . Кроме того, задача ставится в бесконечной области, поскольку в плоскости  $x_3 = z$  внешняя граница  $\widehat{\Omega}_\varepsilon$  заменой  $\mathbf{y}^j \mapsto \boldsymbol{\eta}^j$  смещается на расстояние  $O(\varepsilon^{-1})$  и исчезает в пределе. Внутреннее представление описывается решением плоской задачи с параметром  $z \in (-h_j, h_j)$  (не учитывается трехмерный пограничный слой в зонах выхода стержней из тела):

$$\mathbf{V}^j(\boldsymbol{\eta}^j, z) = w^j(z)\mathbf{e}_2 + p^j(z)[W_1^{(2)j}(\boldsymbol{\eta}^j)\mathbf{e}_1 + W_2^{(2)j}(\boldsymbol{\eta}^j)\mathbf{e}_2], \quad (12)$$

где  $\mathbf{W}^{(2)j} = (W_1^{(2)j}, W_2^{(2)j})$  — решение задачи о деформации упругой плоскости под действием единичной силы на абсолютно жесткое эллиптическое ядро

$$\omega_1^j = \{\boldsymbol{\eta}^j : (\eta_1^j/A_j)^2 + (\eta_2^j/B_j)^2 \leq 1\}.$$

Явный вид  $\mathbf{W}^{(2)j}$  определяется по известным комплексным потенциалам [8, с. 316–318]; вектор  $\mathbf{W}^{(2)j}$  обращается в нуль на  $\partial\omega_1^j$  и допускает представление

$$\mathbf{W}^{(2)j}(\boldsymbol{\eta}^j) = \mathbf{S}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}^j/R_j) + O(1) \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{\eta}^j| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{S}^{(2)}$  — решение задачи о действии на упругую плоскость единичной сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль оси ординат;  $R_j = (A_j + B_j)/2$  — внешний конформный радиус эллипса с полуосями  $A_j$  и  $B_j$  (см., например, [9, с. 18–20]). Если  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2)$  — безразмерные координаты, то

$$\mathbf{S}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1 + \nu}{4\pi E(1 - \nu)} \left( \frac{\zeta_1 \zeta_2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2}, -(3 - 4\nu) \ln |\boldsymbol{\zeta}| + \frac{\zeta_2^2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2} \right).$$

За счет слагаемого  $w^j(z)\mathbf{e}_2$  и обращения  $W_i^{(2)j}$  в нуль на  $\partial\omega_1^j$  внутреннее представление (12) в главном согласовано с полем перемещений стержня  $Q_\varepsilon^j$ , получаемым по технической теории изгиба. Вместе с тем в силу (13) при удалении от поверхности контакта поведение вектора (12) характеризуется соотношением

$$\mathbf{V}^j(\boldsymbol{\eta}^j, z) = w^j(z)\mathbf{e}_2 + p^j(z)\mathbf{S}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}^j/R_j) + O(1) \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{\eta}^j| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Асимптотические слагаемые в (14) необходимо срастить с асимптотикой внешнего представления (6).

**Поведение внешнего представления около стержней.** Подставим (10) в (6) и учтем (8), (9). В получаемое выражение для  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , в частности, войдет интеграл

$$\int_{-h_i}^{h_i} \frac{p^j(s) ds}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^j(s)|} = \int_{-h_i}^{h_i} \frac{p^j(s) ds}{\sqrt{|\mathbf{y}^j|^2 + (z - s)^2}}. \quad (15)$$

Найдем его главный член асимптотики при  $|\mathbf{y}^j| \rightarrow 0$ . Представим интеграл (15) в виде суммы [10, 11]

$$\int_{-h_i}^{h_i} \frac{p^j(s) ds}{\sqrt{|\mathbf{y}^j|^2 + (z - s)^2}} = p^j(z) \int_{-h_i}^{h_i} \frac{ds}{\sqrt{|\mathbf{y}^j|^2 + (z - s)^2}} + \int_{-h_i}^{h_i} \frac{p^j(s) - p^j(z)}{\sqrt{|\mathbf{y}^j|^2 + (z - s)^2}} ds.$$

Второй интеграл в предположении гладкости функции  $p^j$  ограничен при  $|\mathbf{y}^j| \rightarrow 0$ , а первый выражается в элементарных функциях и имеет асимптотику

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(|\mathbf{y}^j|/h_j)^2 + [(z/h_j) - t]^2}} = -2 \ln \frac{|\mathbf{y}^j|}{h_j} + O(1) \quad \text{при } |\mathbf{y}^j| \rightarrow 0.$$

Аналогично преобразуются и другие интегралы, расходящиеся в пределе при  $|\mathbf{y}^j| \rightarrow 0$ . В результате для векторного поля (6) справедлива асимптотическая формула

$$\mathbf{v}(x_1^j + y_1^j, y_2^j, z) = (\alpha_2 - \beta_1 z + \beta_3 x_1^j) \mathbf{e}_2 + p^j(z) \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{y}^j/h_j) + O(1) \quad \text{при } |\mathbf{y}^j| \rightarrow 0. \quad (16)$$

**Сращивание внешнего и внутренних представлений.** Используя метод сращиваемых асимптотических разложений [12, 13], в соотношении (14) перейдем от быстрых координат  $\boldsymbol{\eta}^j$  к медленным  $\mathbf{y}^j = \varepsilon \boldsymbol{\eta}^j$ . В области перекрытия, где применимы асимптотические представления (6), (12), получаем

$$\mathbf{V}^j(\varepsilon^{-1} \mathbf{y}^j, z) = w^j(z) \mathbf{e}_2 + p^j(z) \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{y}^j/(\varepsilon R_j)) + O(1), \quad \sqrt{\varepsilon} R_j \leq |\mathbf{y}^j| \leq 2\sqrt{\varepsilon} R_j, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Сопоставим (16) и (17). Для совпадения выражений в правых частях этих формул необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_2 - \beta_1 z + \beta_3 x_1^j + \frac{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}{4\pi E(1 - \nu)} p^j(z) \ln \frac{h_j}{\varepsilon R_j} = w^j(z) \quad (|z| < h_j, \quad j = 1, 2). \quad (18)$$

Таким образом, уравнения задачи сформулированы.

**Обсуждение уравнений задачи.** Конструкция асимптотического решения исходной задачи содержит неизвестные функции  $w^j$ ,  $p^j$  ( $j = 1, 2$ ) и параметры  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ . Они находятся из решения задачи, в которую входят дифференциальные уравнения изгиба стержней (2), (3) с краевыми условиями (5), уравнения равновесия тела (7) и определяющее функциональное соотношение (18).

В уравнение (18) входит большой (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) параметр  $|\ln \varepsilon|$ . Тем самым величины  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ , а также функции  $w^j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют порядок  $|\ln \varepsilon|$ . Слагаемые в правой части уравнения (2) будут одного порядка, если  $\rho_j = \varepsilon^{-2} \rho_j^*$  и  $\rho$ ,  $\rho_j^*$  не зависят от  $\varepsilon$  (ср. (4) и (7)). Наконец, соотношения (2), (3), (5), (7), (18) составляют единую задачу только при условии

$$E_j = \varepsilon^{-4} |\ln \varepsilon|^{-1} E_j^*, \quad (19)$$

причем  $E$  и  $E_j^*$  одного порядка (см. (1), (2), (18)). Если стержни тонкие, а материал достаточно жесткий, то малый параметр  $\varepsilon$  полностью не исключается из задачи и дополнительный асимптотический анализ не может привести к ее упрощению (к разделению на несколько последовательно решаемых задач для отдельных элементов конструкции, как в случае податливых стержней). Если же модули упругости стержней превосходят модуль упругости тела в большей степени, чем того требует условие (19), то стержни можно считать абсолютно жесткими, т. е. положить  $w^j(z) = 0$  при  $|z| < l_j$  и тем самым «расщепить» задачу. Сначала из уравнения (18) с нулевой правой частью и уравнения (7) находятся нагрузки  $p^j$  и осадка, а затем после подстановки вычисленных  $p^j$  в (2) уточняются прогибы  $w^j$ . Наряду с моментом инерции  $I_j^j$  в задаче присутствует другая важная геометрическая характеристика поперечного сечения стержня  $Q_\varepsilon^j$  — внешний конформный радиус

$$r_\varepsilon^j = \varepsilon R_j = (a_\varepsilon^j + b_\varepsilon^j) / 2. \quad (20)$$

Внешний конформный радиус можно принять в качестве среднего характерного размера поперечного сечения (см., например, [14, с. 25–38]).

Используя (20), в определяющем уравнении (18) введем обозначение для коэффициента жесткости

$$k_\varepsilon^j = \frac{4\pi E(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \frac{1}{\ln(h_j/r_\varepsilon^j)}.$$

Индекс  $\varepsilon$  в обозначениях  $I_\varepsilon^j$ ,  $q_\varepsilon^j$ ,  $r_\varepsilon^j$  и  $k_\varepsilon^j$  можно опустить.

**Решение задачи.** Из уравнения (18) выразим

$$p^j(z) = k_j w^j(z) - k_j(\alpha_2 - \beta_1 z + \beta_3 x_1^j), \quad |z| < h_j, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Весом стержней пренебрегаем. Тогда, подставляя (21) в (2), получим уравнение типа уравнения основания Винклера (см., например, [15, с. 265]):

$$E_j I_j \frac{d^4 w^j}{dz^4}(z) + k_j w^j(z) = k_j(\alpha_2 - \beta_1 z + \beta_3 x_1^j) \quad (|z| < h_j).$$

Его решение можно записать в виде

$$w^j(z) = \alpha_2 - \beta_1 z + \beta_3 x_1^j + C_1^j \operatorname{ch}(\varkappa z) \cos(\varkappa z) + C_2^j \operatorname{ch}(\varkappa z) \sin(\varkappa z) + \\ + C_3^j \operatorname{sh}(\varkappa z) \cos(\varkappa z) + C_4^j \operatorname{sh}(\varkappa z) \sin(\varkappa z), \quad |z| < h_j, \quad (22)$$

где  $\varkappa_j^4 = k_j/(4E_j I_j)$  (индекс  $j$  в символе  $\varkappa_j$  для простоты записи опущен). Из (21) следует соотношение

$$p^j(z) = C_1^j \operatorname{ch}(\varkappa z) \cos(\varkappa z) + C_2^j \operatorname{ch}(\varkappa z) \sin(\varkappa z) + C_3^j \operatorname{sh}(\varkappa z) \cos(\varkappa z) + C_4^j \operatorname{sh}(\varkappa z) \sin(\varkappa z). \quad (23)$$

Интегрируя уравнение (3), с учетом условия (5) имеем

$$w^j(z) = \begin{cases} D_1^j(l_j + z)^3 + D_2^j(l_j + z)^2, & -l_j \leq z \leq -h_j, \\ E_1^j(l_j - z)^3 + E_2^j(l_j - z)^2, & h_j \leq z \leq l_j. \end{cases} \quad (24)$$

Восемь постоянных интегрирования в (22)–(24) исключаются из условий непрерывности при  $z = -h_j$  и  $z = h_j$  функции  $w^j$  и ее производных до третьего порядка включительно. В общем случае требуется решить систему восьми линейных алгебраических уравнений с правыми частями, линейно зависящими от параметров  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ . В силу принципа наложения имеем

$$C_i^j = c_{i1}^j \alpha_2 + c_{i2}^j \beta_1 + c_{i3}^j \beta_3, \quad (25)$$

где  $c_{i1}^j$ ,  $c_{i2}^j$ ,  $c_{i3}^j$  зависят от  $h_j$ ,  $l_j$ ,  $\varkappa_j$ . Подставляя (23) в уравнения равновесия (7), в соответствии с (25) получаем систему линейных алгебраических уравнений для  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ . После вычисления параметров осадки тела формулы (23) и (22), (24) дают распределенные нагрузки и прогибы стержней соответственно.

**Заключение.** Построенное приближенное решение будет тем точнее, чем меньше  $\varepsilon$ . Однако по сравнению с другими соотношениями, входящими в задачу, точность определяющего уравнения (18), а следовательно, точность всей модели, не так высока, поскольку при выводе (18) пренебрегали членами порядка  $|\ln \varepsilon|^{-1}$  по отношению к 1 ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Отметим основные недостатки предлагаемой асимптотической модели, намечая при этом некоторые пути ее обобщения.

1. Не учитывается форма тела  $\Omega_0$ . Для того чтобы внести соответствующие поправки в определяющее уравнение (18), необходимо уточнить поведение внешнего асимптотического представления в окрестности стержней (формула (16)). Для этого потребуются информация о строении регулярной составляющей  $g(\mathbf{x}; \xi)$  вектор-функции Грина (8), зависящей от  $\Omega_0$ .



2. Напряженно-деформированное состояние тела в зонах выхода стержней трехмерно и, очевидно, не описывается при помощи плоских пограничных слоев. В этих зонах необходимо достраивать трехмерные пограничные слои — решения специальных задач теории упругости для полупространства с абсолютно жестким цилиндрическим ядром, однако ни явного решения такой задачи, ни теорем о ее разрешимости не известно.

3. Определяющее уравнение не отражает форму поперечного сечения стержней в целом, в (18) входит только характерный размер сечения. Для уточнения модели необходимо вычисление следующего члена в асимптотике (13).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rajapakse R., Wang Y. Load-transfer problems for transversely isotropic elastic media // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1990. V. 116, N 12. P. 2643–2662.
2. Nazarov S. A. Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. T. 320. P. 1419–1424.
3. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptotic Anal. 1995. V. 11. P. 343–415.
4. Argatov I. I., Nazarov S. A. Junction problem of shashlik (skewer) type // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1993. T. 316. P. 1329–1334.
5. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотический анализ задач на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 1. С. 3–36.
6. Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10, № 4. С. 3–91.
7. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
9. Полна Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
10. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара С. Л. Соболева. 1980. Т. 1. С. 113–131.
11. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 37–39.
12. Ван Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
13. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
14. Полна Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
15. Филин А. П. Введение в строительную механику корабля. СПб.: Судостроение, 1993.

*Поступила в редакцию 26/XI 1997 г.*