

УДК 539.374

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СЖАТИИ СЛОЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: lyamina@inbox.ru

Для идеального жесткопластического материала получено решение модельной задачи, позволяющее оценить влияние кривизны поверхности трения и одного из видов дополнительного вращательного движения поверхности трения на значение коэффициента интенсивности скорости деформации.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности скорости деформации, сингулярность, трение, пластичность.

Коэффициент интенсивности скорости деформации, введенный в [1] в качестве коэффициента при главном сингулярном члене в разложении в ряд в окрестности поверхности максимального трения эквивалентной скорости деформации, используется для предсказания эволюции свойств материала в тонком слое вблизи поверхностей с большими удельными силами трения в процессах обработки металлов давлением [2, 3]. Однако количественные зависимости между коэффициентом интенсивности скорости деформации и параметрами, характеризующими свойства материала, не установлены, поэтому представляет интерес выявление зависимости коэффициента интенсивности скорости деформации от параметров процессов обработки металлов давлением, что, в частности, может быть использовано в экспериментах для определения указанных выше количественных зависимостей. Одним из параметров, который в эксперименте достаточно легко изменять, является кривизна поверхности трения. В настоящей работе исследуется сжатие слоя пластического материала между двумя концентрическими цилиндрами, на поверхностях которых выполняется закон максимального трения. Эта простейшая модельная задача позволяет оценить влияние кривизны поверхности трения на коэффициент интенсивности скорости деформации.

Установлено, что на коэффициент интенсивности скорости деформации оказывает влияние дополнительное вращение инструмента, используемое в промышленных процессах для изменения энергосиловых параметров процесса [4–6]. В настоящей работе в рамках решенной модельной задачи рассматривается влияние одного из видов вращательного движения поверхности трения на коэффициент интенсивности скорости деформации.

Для ряда процессов коэффициент интенсивности скорости деформации определен в работах [7–10], в которых решения получены на основе модели двойного сдвига [11], являющейся обобщением модели идеального жесткопластического материала. Заметим, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-08-90104-Мол.а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант МК-5157.2008.1) и ведущих научных школ (грант НШ-134.2008.1).

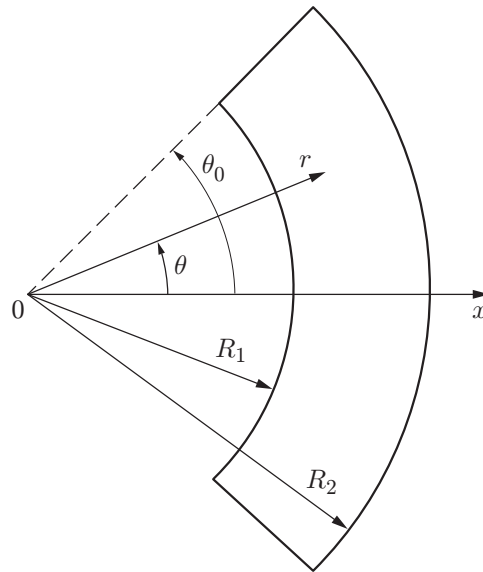


Рис. 1. Геометрия задачи

качественно поведение решений, полученных на основе модели двойного сдвига, не отличается от поведения решений, полученных на основе модели идеального жесткопластического материала [12, 13].

Рассмотрим плоское течение слоя пластического материала, сжимаемого между двумя поверхностями, которые имеют вид концентрических круговых цилиндров и на которых действует закон максимального трения. Введем полярную систему координат (r, θ) , центр которой совпадает с центрами цилиндров. Радиус внешнего цилиндра, определяемый уравнением $r = R_2$, считается неизменным, радиус внутреннего цилиндра увеличивается со скоростью U_0 , а его текущий радиус определяется уравнением $r = R_1$ (рис. 1). Поскольку течение симметрично относительно оси $\theta = 0$, достаточно построить решение при $\theta \geq 0$. Пусть σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжения в полярной системе координат, u_r , u_θ — компоненты вектора скорости. Статические краевые условия имеют вид:

— на кромке слоя ($\theta = \theta_0$)

$$\sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0;$$

— на оси симметрии ($\theta = 0$)

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

С учетом направления течения закон максимального трения принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= +k & \text{при } r &= R_1, \\ \sigma_{r\theta} &= -k & \text{при } r &= R_2 \end{aligned} \quad (1)$$

(k — предел текучести материала при чистом сдвиге). Кинематическими краевыми условиями являются

$$u_r = 0 \quad \text{при } r = R_2; \quad (2)$$

$$u_r = U_0 \quad \text{при } r = R_1; \quad (3)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = 0.$$

Сравнение приведенной постановки задачи и постановки задачи Прандтля о сжатии слоя между параллельными плитами [14] показывает, что рассматриваемая задача явля-

ется обобщением последней. Следовательно, приемлемое приближенное решение можно получить, если толщина слоя достаточно мала: $(R_2 - R_1)/(R_2\theta_0) \ll 1$. При этом при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ краевые условия не могут выполняться с достаточной точностью и должны быть заменены интегральными условиями

$$\int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_0} dr = 0; \quad (4)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} u_\theta|_{\theta=0} dr = 0. \quad (5)$$

Из условия (5) следует, что объем материала, выдавливаемого поверхностью $r = R_1$, должен быть равен потоку материала через поверхность $\theta = \theta_0$. В точном решении вблизи поверхностей $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ образуются жесткие зоны.

Система статических уравнений плоского течения идеального жесткопластического материала состоит из уравнений равновесия и условия текучести, которое в полярной системе координат имеет вид $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2 = 4k^2$ и выполняется при стандартной подстановке [14]

$$\sigma_{rr} = \sigma + k \cos 2\psi, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma - k \cos 2\psi, \quad \sigma_{r\theta} = k \sin 2\psi. \quad (6)$$

Поскольку в рассмотренной задаче $\sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$, из (6) получаем

$$\cos 2\psi \leq 0. \quad (7)$$

С учетом неравенства (7) и последнего соотношения в (6) краевые условия (1) принимают вид

$$\psi = \pi/4 \quad \text{при} \quad r = R_1; \quad (8)$$

$$\psi = 3\pi/4 \quad \text{при} \quad r = R_2. \quad (9)$$

Из условий (8), (9) следует, что величина ψ не зависит от θ . Тогда уравнения равновесия в полярных координатах после подстановки в них соотношений (6) преобразуются к виду

$$\frac{r}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - 2r \sin 2\psi \frac{d\psi}{dr} + 2 \cos 2\psi = 0, \quad \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + 2r \cos 2\psi \frac{d\psi}{dr} + 2 \sin 2\psi = 0. \quad (10)$$

Система уравнений (10) является совместной при условии

$$\sigma/k = A\theta + \sigma_0(r), \quad (11)$$

где параметр σ_0 зависит только от r ; $A = \text{const}$. Подставляя (11) во второе уравнение системы (10), находим

$$A + 2r \cos 2\psi \frac{d\psi}{dr} + 2 \sin 2\psi = 0. \quad (12)$$

Проинтегрировав уравнение (12), получаем

$$\sin 2\psi = C/r^2 - A/2, \quad C = \text{const}. \quad (13)$$

Из краевых условий (8), (9) следует

$$A = 2(R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2), \quad C = 2R_1^2 R_2^2/(R_2^2 - R_1^2). \quad (14)$$

Используя формулу $\partial\sigma/\partial r = (\partial\sigma/\partial\psi)(d\psi/dr)$, заменим производную $\partial\sigma/\partial r$ в первом уравнении системы (10), затем, с помощью (12), (11) исключая из этого уравнения производную $d\psi/dr$ и параметр σ , получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\psi} = 2 \frac{2 + A \sin 2\psi}{A + 2 \sin 2\psi}. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) можно найти в квадратурах, однако для удобства запишем его в виде

$$\sigma_0 = 2 \int_{\pi/4}^{\psi} \frac{2 + A \sin 2\chi}{A + 2 \sin 2\chi} d\chi + C_1, \quad (16)$$

где C_1 — постоянная интегрирования, которая находится из условия (4). Подставляя выражения (11), (16) в (6), нормальные компоненты тензора напряжения представим в форме

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{k} &= A\theta + 2 \int_{\pi/4}^{\psi} \frac{2 + A \sin 2\chi}{A + 2 \sin 2\chi} d\chi + \cos 2\psi + C_1, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{k} &= A\theta + 2 \int_{\pi/4}^{\psi} \frac{2 + A \sin 2\chi}{A + 2 \sin 2\chi} d\chi - \cos 2\psi + C_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что $dr = (dr/d\psi) d\psi$, а величины $dr/d\psi$, r с помощью соотношений (12), (13) соответственно выражаются как функции ψ , из (4), (17) получаем

$$C_1 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{C}}{R_2 - R_1} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(2 \int_{\pi/4}^{\psi} \frac{2 + A \sin 2\chi}{A + 2 \sin 2\chi} d\chi - \cos 2\psi \right) \frac{\cos 2\psi}{(A + 2 \sin 2\psi)^{3/2}} d\psi - A\theta_0. \quad (18)$$

Используя формулы

$$p_1 = -\frac{1}{kR_1\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sigma_{rr}|_{\psi=\pi/4} R_1 d\theta, \quad p_2 = -\frac{1}{kR_2\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sigma_{rr}|_{\psi=3\pi/4} R_2 d\theta,$$

введем среднее давление на единицу длины на поверхностях инструмента $r = R_1$ и $r = R_2$ соответственно. Тогда из (17) следует

$$p_1 = -\left(\frac{A\theta_0}{2} + C_1\right), \quad p_2 = -\left(\frac{A\theta_0}{2} + C_2 + C_1\right), \quad C_2 = 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2 + A \sin 2\chi}{A + 2 \sin 2\chi} d\chi. \quad (19)$$

Полученное решение в пределе стремится к решению Прандтля [14]. Действительно, при $R_2 \rightarrow \infty$, $R_1 \rightarrow \infty$, $\theta_0 \rightarrow 0$ геометрическая схема процесса соответствует решению Прандтля. Будем считать, что $R_1\theta_0 \rightarrow l$ при $\theta_0 \rightarrow 0$, а $R_2 - R_1 = 2b$. Тогда $R_2\theta_0 \rightarrow l$ при $\theta_0 \rightarrow 0$. В этих предположениях из (14) следует, что $A \rightarrow \infty$ при $\theta_0 \rightarrow 0$, а выражение (19) показывает, что $C_2 \rightarrow 0$, $p_1 \rightarrow p_2$ при $\theta_0 \rightarrow 0$. Кроме того, из (14), (18) получаем $C_1 \rightarrow -A\theta_0 - \pi/2$, а из (15), (19) — соотношение $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow l/(2b + \pi/2)$ при $\theta_0 \rightarrow 0$, которое в пределе дает среднее давление, следующее из решения Прандтля.

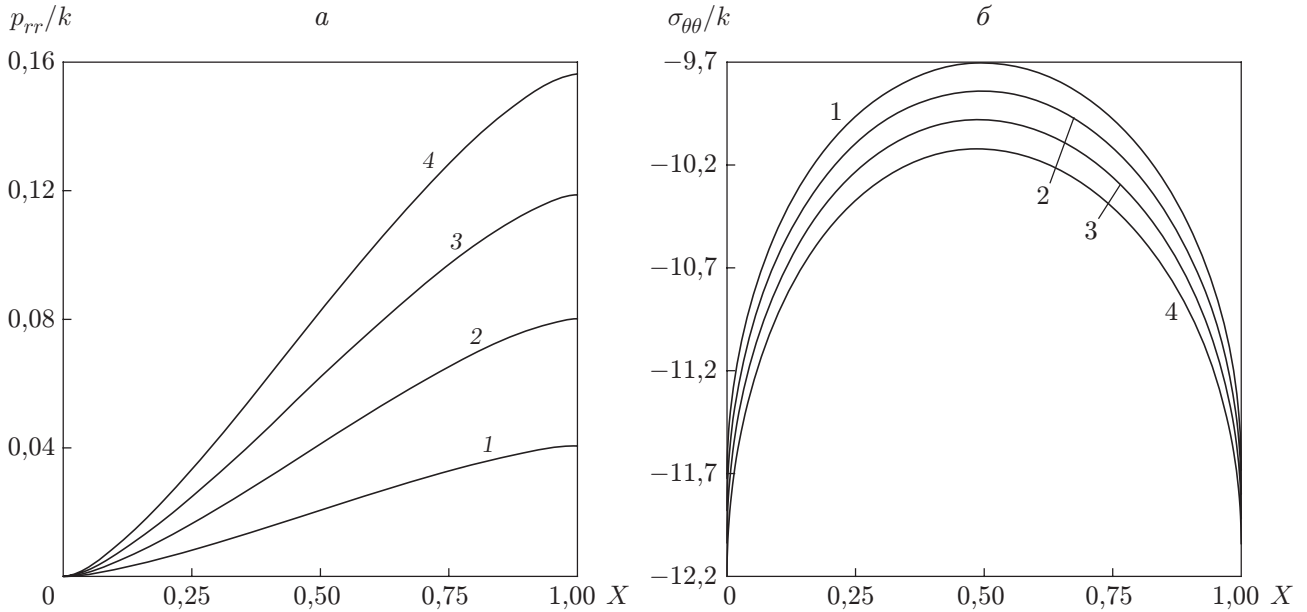


Рис. 2. Зависимости параметров p_{rr} (а) и $\sigma_{\theta\theta}$ (б) от безразмерной координаты X при $\theta = \theta_0/2$, $R_1\theta_0/(R_2 - R_1) = 10$ и различных углах θ_0 :
 1 — $\theta_0 = 15^\circ$, 2 — $\theta_0 = 30^\circ$, 3 — $\theta_0 = 45^\circ$, 4 — $\theta_0 = 60^\circ$

Из (6), (13), (14), (17), (18) зависимости компонент тензора напряжения от величин r, θ определяются в параметрическом виде. Для наглядности решения введем безразмерную координату $X = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$, где $0 \leq X \leq 1$. Поскольку в этом интервале напряжение σ_{rr} по сравнению с его абсолютной величиной меняется незначительно, введем функцию $p_{rr} = \sigma_{rr} - \sigma_{rr}|_{r=R_1}$. На рис. 2 показаны зависимости параметров $p_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ от координаты X при $\theta = \theta_0/2$, $R_1\theta_0/(R_2 - R_1) = 10$ и различных углах θ_0 . (При $\theta_0 = 15, 30, 45, 60^\circ$ $(\sigma_{rr}/k)|_{r=R_1} = -11,72; -11,88; -12,04; -12,20$ соответственно.) Зависимость $\sigma_{r\theta}(X)$ представляет собой практически прямую линию. Численные расчеты, выполненные с использованием формул (19), показывают, что давления p_1, p_2 слабо зависят от параметра θ_0 . При этом $p_2 \leq p_1$, а равенство давлений имеет место только при $\theta_0 \rightarrow 0$ (решение Прандтля).

Кинематические уравнения определяются ассоциированным законом течения и сводятся к уравнению несжимаемости и уравнению, выражающему условие соосности тензоров напряжения и скорости деформации.

Пусть

$$u_r = U_0 U_r(r), \tag{20}$$

где $U_r(r)$ — произвольная функция r , которая вследствие выполнения (2), (3) должна удовлетворять условиям

$$U_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2; \tag{21}$$

$$U_r = 1 \quad \text{при} \quad r = R_1. \tag{22}$$

Подставляя соотношение (20) в уравнение несжимаемости и интегрируя полученное выражение, получаем

$$u_\theta = -U_0 \left(r \frac{dU_r}{dr} + U_r \right) \theta + U_0 U_\theta(r). \tag{23}$$

С учетом (20), (23) из условия соосности тензоров напряжения и скорости деформации следует

$$\left(\frac{U_r}{r} - \frac{dU_r}{dr} - r \frac{d^2U_r}{dr^2}\right)\theta = \frac{U_\theta}{r} - \frac{dU_\theta}{dr} + 2 \operatorname{tg} 2\psi \frac{dU_r}{dr}. \quad (24)$$

Уравнение (24) имеет решение при выполнении следующих условий:

$$\frac{U_r}{r} - \frac{dU_r}{dr} - r \frac{d^2U_r}{dr^2} = 0, \quad \frac{U_\theta}{r} - \frac{dU_\theta}{dr} + 2 \operatorname{tg} 2\psi \frac{dU_r}{dr} = 0. \quad (25)$$

Решение первого уравнения системы (25), удовлетворяющее крайевым условиям (21), (22), принимает вид

$$U_r = \frac{R_1(r^2 - R_2^2)}{r(R_1^2 - R_2^2)}. \quad (26)$$

Подставляя решение (26) во второе уравнение системы (25) и интегрируя его, с учетом (12)–(14) получаем

$$U_\theta = \frac{\sqrt{2} R_2}{[R_2^2 + R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \sin 2\psi]^{1/2}} \times \\ \times \left(u_0 + \int_{\pi/4}^{\psi} \frac{[R_2^2 + 3R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \sin 2\gamma] \sin 2\gamma}{R_2^2 + R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \sin 2\gamma} d\gamma\right). \quad (27)$$

Здесь u_0 — постоянная интегрирования, значение которой определяется из условия (5). Переходя в этом условии к интегрированию по ψ с помощью (12) и используя выражения (13), (23), (26), (27), находим

$$u_0 = 4R_1^2 R_2^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos 2\psi}{[(R_2^2 - R_1^2) \sin 2\psi + R_2^2 + R_1^2]^2} \times \\ \times \left(\int_{\pi/4}^{\psi} \frac{[(R_2^2 - R_1^2) \sin 2\gamma + R_2^2 + 3R_1^2] \sin 2\gamma}{(R_2^2 - R_1^2) \sin 2\gamma + R_2^2 + R_1^2} d\gamma\right) d\psi. \quad (28)$$

Из (13), (23), (26)–(28) определяются зависимости $u_r(r)$ и $u_\theta(\theta)$. Зависимость $u_\theta(X)$ при $\theta = \theta_0/2$, $R_1\theta_0/(R_2 - R_1) = 10$ и различных углах θ_0 представлена на рис. 3.

В работе [1] показано, что вблизи поверхностей максимального трения эквивалентная скорость деформации подчиняется закону

$$\xi_{eq} = Ds^{-1/2} + o(s^{-1/2}), \quad s \rightarrow 0 \quad (29)$$

(D — коэффициент интенсивности скорости деформации; s — расстояние до поверхности трения). В рассматриваемом случае эквивалентная скорость деформации выражается через компоненты тензора скорости деформации ξ_{rr} , $\xi_{\theta\theta}$ и $\xi_{r\theta}$ в полярной системе координат:

$$\xi_{eq} = \sqrt{2/3} (\xi_{rr}^2 + \xi_{\theta\theta}^2 + 2\xi_{r\theta}^2)^{1/2}. \quad (30)$$

Для того чтобы определить коэффициент интенсивности скорости деформации, найдем скорость деформации сдвига. Из (20), (25), (26) следует

$$\xi_{r\theta} = \frac{U_0 R_1 (R_2^2 + r^2)}{(R_1^2 - R_2^2) r^2} \operatorname{tg} 2\psi. \quad (31)$$

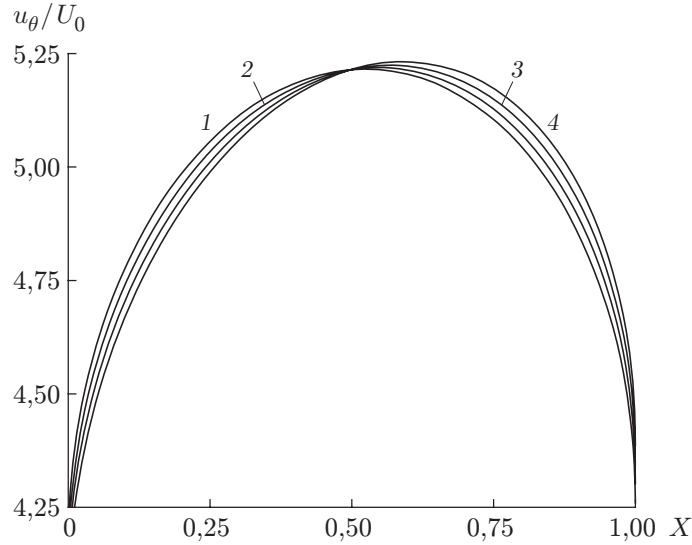


Рис. 3. Зависимость компоненты скорости u_θ от безразмерной координаты X при $\theta = \theta_0/2$, $R_1\theta_0/(R_2 - R_1) = 10$ и различных углах θ_0 :
 1 — $\theta_0 = 15^\circ$, 2 — $\theta_0 = 30^\circ$, 3 — $\theta_0 = 45^\circ$, 4 — $\theta_0 = 60^\circ$

Раскладывая величину $\operatorname{tg} 2\psi$ в ряд в окрестности точек $\psi = \pi/4$ и $\psi = 3\pi/4$ и учитывая (8), (9), из соотношения (31) получаем

$$\begin{aligned} \xi_{r\theta} &= \frac{U_0(R_2^2 + R_1^2)}{2R_1(R_2^2 - R_1^2)(\psi - \pi/4)} + o((\psi - \pi/4)^{-1}), & \psi \rightarrow \frac{\pi}{4}, \\ \xi_{r\theta} &= -\frac{U_0R_1}{(R_2^2 - R_1^2)(3\pi/4 - \psi)} + o((3\pi/4 - \psi)^{-1}), & \psi \rightarrow \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом (14) из (13) находим

$$\begin{aligned} \psi - \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}(r - R_1)^{1/2}}{R_1^{1/2}(1 - R_1^2/R_2^2)^{1/2}} + o((r - R_1)^{1/2}), & r \rightarrow R_1, \\ \frac{3\pi}{4} - \psi &= \frac{\sqrt{2}(R_2 - r)^{1/2}}{R_2^{1/2}(R_2^2/R_1^2 - 1)^{1/2}} + o((R_2 - r)^{1/2}), & r \rightarrow R_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Из соотношений (32) следует, что при $\psi \rightarrow \pi/4$, $\psi \rightarrow 3\pi/4$ $|\xi_{r\theta}| \rightarrow \infty$. Так как остальные компоненты тензора скорости деформации ограничены, из (30), (32), (33) получаем

$$\begin{aligned} \xi_{eq} &= \frac{U_0(1 + R_1^2/R_2^2)}{\sqrt{6}R_1^{1/2}(1 - R_1^2/R_2^2)^{1/2}}(r - R_1)^{-1/2} + o((r - R_1)^{-1/2}), & r \rightarrow R_1, \\ \xi_{eq} &= \frac{2U_0}{\sqrt{6}R_2^{1/2}(1 - R_1^2/R_2^2)^{1/2}}(R_2 - r)^{-1/2} + o((R_2 - r)^{-1/2}), & r \rightarrow R_2. \end{aligned} \quad (34)$$

В рассматриваемом случае расстояние до поверхности трения $r = R_1$ определяется уравнением $s = r - R_1$, а расстояние до поверхности трения $r = R_2$ — уравнением $s = R_2 - r$. Таким образом, распределение эквивалентной скорости деформации вблизи поверхностей трения, описываемое уравнениями (34), согласуется с общей теорией (уравнение (29)),

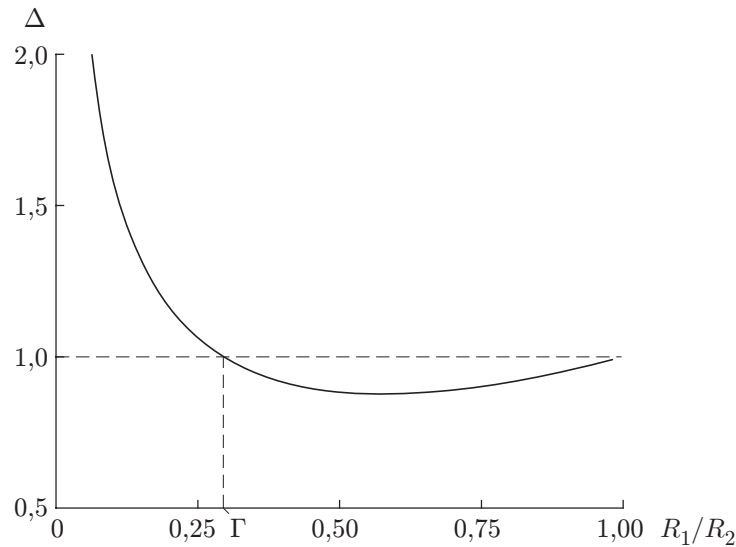


Рис. 4. Зависимость отношения коэффициентов интенсивности деформации Δ от отношения радиусов R_1/R_2

а коэффициенты интенсивности скорости деформации определяются из соотношений (34):

$$D_1 = \frac{U_0(1 + R_1^2/R_2^2)}{\sqrt{6} R_1^{1/2}(1 - R_1^2/R_2^2)^{1/2}}, \quad D_2 = \frac{2U_0}{\sqrt{6} R_2^{1/2}(1 - R_1^2/R_2^2)^{1/2}} \quad (35)$$

(коэффициент D_1 соответствует поверхности $r = R_1$, коэффициент D_2 — поверхности $r = R_2$).

Поскольку знание коэффициента интенсивности скорости деформации позволяет предсказывать изменения свойств материала в тонком слое вблизи поверхности трения [3], но количественные соотношения между значением этого коэффициента и параметрами, характеризующими свойства материала, не установлены, представляет интерес анализ зависимости отношения коэффициентов интенсивности скорости деформации от отношения радиусов R_1/R_2 для поверхностей трения $r = R_1$, $r = R_2$. Из соотношений (35) находим

$$\Delta = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1 + R_1^2/R_2^2}{2(R_1/R_2)^{1/2}}. \quad (36)$$

Зависимость Δ от отношения R_1/R_2 показана на рис. 4, из которого следует, что $\Delta = 1$ при некотором значении $R_1/R_2 = \Gamma$. Используя выражение (36) и проводя несложные преобразования, уравнение $\Delta = 1$ можно свести к уравнению третьей степени относительно R_1/R_2 . Из более простого численного решения следует, что $\Gamma \approx 0,3$. На рис. 4 видно, что при $R_1/R_2 < \Gamma$ $\Delta > 1$, при $R_1/R_2 > \Gamma$ $\Delta < 1$. Таким образом, в соответствии с теоретическими работами [2, 3] при $R_1/R_2 < \Gamma$ физические процессы более интенсивно протекают вблизи поверхности трения $r = R_1$, а при $R_1/R_2 > \Gamma$ — вблизи поверхности трения $r = R_2$. Используя сделанный вывод, можно провести экспериментальные исследования для подтверждения общей концепции, на которой основана теория, без установления точных количественных зависимостей. В частности, величина Δ^2 равна отношению характерных длин (толщин слоев интенсивных деформаций вблизи поверхностей трения), введенных в [2].

Можно показать, что в рассмотренном случае вращательное движение поверхностей трения не влияет на коэффициент интенсивности скорости деформации. Действительно, предположим, что цилиндр радиусом R_1 вращается со скоростью, при которой касательное

напряжение при $r = R_1$ имеет такой же знак, как в (1). Тогда в постановке задачи изменится лишь условие (5), так как жесткая зона должна вращаться вместе с цилиндром. Однако данное условие оказывает влияние только на величину u_0 , введенную в формуле (27). Поскольку u_0 не входит в (35), вращение цилиндра не влияет на коэффициент интенсивности скорости деформации. Это обусловлено тем, что направление контактных касательных напряжений, возникающих вследствие рассмотренного вращательного движения, совпадает с направлением контактных касательных напряжений, возникающих при сжатии без вращения. Заметим, что данное условие, как правило, не выполняется в промышленных процессах [4–6], в которых дополнительное касательное напряжение, возникающее при вращении инструмента, перпендикулярно напряжению, возникающему в процессах без вращения. При плоскодеформированном состоянии модель такого распределения касательных напряжений получить невозможно.

Если в полученном решении скорость вращения цилиндра полагается такой, что при $r = R_1$ касательное напряжение меняет знак на противоположный (1), то приближенного решения рассмотренного класса не существует.

В заключение отметим, что решение уравнений теории идеальной пластичности в полярных координатах, из которого можно вывести рассмотренное выше решение, предложено в [15], однако в этой работе не решалась краевая задача, необходимая для получения зависимости (36).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
2. **Александров С. Е., Гольдштейн Р. В., Лямина Е. А.** Развитие концепции коэффициента интенсивности скорости деформации в теории пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 2. С. 180–183.
3. **Lyamina E., Alexandrov S., Grabco D., Shikimaka O.** An approach to prediction of evolution of material properties in the vicinity of frictional interfaces in metal forming // Key Engng Mater. 2007. V. 345/346. P. 741–744.
4. **Сергеев М. К.** Экспериментальное исследование обратного выдавливания вращающимся рельефным пуансоном // Кузнеч.-штамп. пр-во. 1991. № 9. С. 5–6.
5. **Логинюв Ю. Н., Буркин С. П.** Исследование процесса прессования через вращающуюся матрицу // Изв. вузов. Черн. металлургия. 1995. № 4. С. 33–36.
6. **Kemin X., Zhen W., Yan L.** FEM analysis of cylinder twist-compression deformation regularity // J. Mater. Process Technol. 1997. V. 69. P. 148–151.
7. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сжатие пластического материала, чувствительного к среднему напряжению, вращающимися плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 50–60.
8. **Alexandrov S., Lyamina E.** Plane-strain compression of material obeying the double-shearing model between rotating plates // Intern. J. Mech. Sci. 2003. V. 45, N 9. P. 1505–1517.
9. **Alexandrov S.** Steady penetration of a rigid cone into pressure-dependent plastic material // Intern. J. Solids Struct. 2006. V. 43, N 2. P. 193–205.
10. **Alexandrov S., Lyamina E.** Flow of pressure-dependent plastic material between two rough conical walls // Acta Mech. 2006. V. 187, N 1–4. P. 37–53.
11. **Spencer A. J. M.** A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // J. Mech. Phys. Solids. 1964. V. 12. P. 337–351.

12. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 4. С. 492–495.
13. **Александров С. Е.** Сингулярные решения в осесимметричных течениях среды, подчиняющейся модели двойного сдвига // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 180–186.
14. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
15. **Ивлев Д. Д.** О пространственном течении идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 5–13.

*Поступила в редакцию 15/V 2007 г.,
в окончательном варианте — 7/XI 2007 г.*
