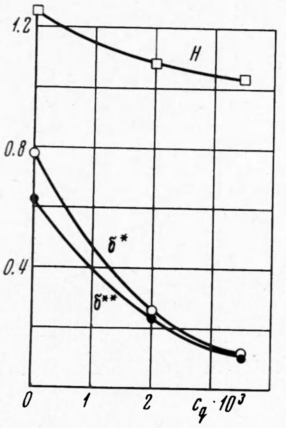
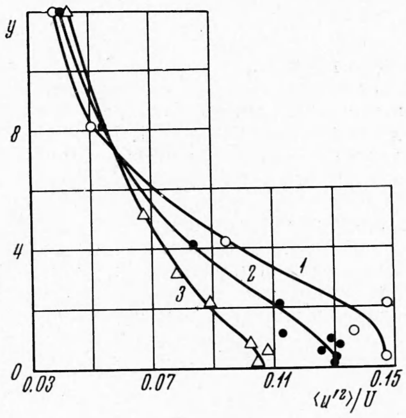
По экспериментальным профилям продольной составляющей скорости можно рассчитать толщины вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**}, а также и параметр $H = \delta^*/\delta^{**}$ в зависимости от степени отсоса. Результаты расчета (в *мм*) приведены на фиг. 4. С ростом степени отсоса толщина вытеснения δ^*, толщина потери импульса δ^{**} и параметр $H = \delta^* / \delta^{**}$ уменьшаются.

Использованная методика, к сожалению, позволяла регистрировать только продольную составляющую пульсаций скорости под влиянием распределенного отсоса в турбулентном пограничном слое. На фиг. 5 приведены кривые изменения по толщине



Фиг. 4



Фиг. 5

пограничного слоя (в *мм*) среднеквадратичных значений пульсаций скорости $\langle u'^2 \rangle / u$, полученные при тех же условиях, что и рассмотренные выше профили средней скорости: кривые *1*, *2*, *3* соответствуют $c_q = 0$; $2 \cdot 10^{-3}$; $3.5 \cdot 10^{-3}$. Достаточно четко видно, что распределенный отсос снижает уровень пульсаций продольной составляющей скорости особенно вблизи поверхности.

Опыты в водной среде и для воздушного турбулентного пограничного слоя с отсосом [1] выполнены при различных степенях турбулентности набегающего потока, что не позволяет произвести количественное сравнение. Установлено только качественное совпадение зависимостей по изменению средней скорости по толщине пограничного слоя и интенсивности пульсаций продольной составляющей скорости при наличии распределенного отсоса.

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Favre A., Dumas R., Verollet E., Coantic M. Couche limite turbulente sur paroi poreuse avec aspiration. J. Méc., 1966. vol. 5, No. 1.
2. Трохан А. М., Кузнецов И. Л., Баранова Г. Р., Игнатенко Ю. В. Фотоэлектрический метод измерения турбулентности высокотемпературных потоков. Физика горения и взрыва, 1966, № 1, стр. 112—116.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ТИПА ПРОСТЫХ ВОЛН

В. М. Меньшиков *(Новосибирск)*

В работе проделана классификация частично инвариантных решений ранга $\beta = 1$, дефекта инвариантности $\delta = 1$ для системы уравнений двумерной газовой динамики.

1. Групповая классификация уравнений газовой динамики по функции $p = f(\rho, S)$, задающей уравнение состояния, была проделана в [1]. В данной работе рассматривается система дифференциальных уравнений двумерной газовой динамики

$$d\mathbf{u} / dt + \rho^{-1}\nabla p = 0 \quad (d / dt = \partial / \partial t + u \cdot \nabla)$$

$$d\rho / dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad dp / dt + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (c^2 = \partial f / \partial \rho) \tag{1.1}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости являются искомыми функциями независимых переменных x, y, t. Для системы (1.1) при произвольной f (ρ, S) наиболее широкая группа Ли точечных преобразований имеет седьмой порядок, и базис соответствующей алгебры Ли L_7 состоит из операторов [1]

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \tag{1.2}$$

$$X_6 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_7 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

Знание группы, допускаемой системой дифференциальных уравнений, позволяет выделить инвариантные и частично инвариантные решения. В этой работе ставилась задача: проклассифицировать все частично инвариантные решения ранга $\beta = 1$ и дефекта инвариантности $\delta = 1$. В данном случае $\beta = 1$ означает, что существуют четыре функции (инварианты трехпараметрической подгруппы) такие, что три из них выражаются через четвертую. Дефект $\delta = 1$ означает, вообще говоря, что полученные решения содержат одну произвольную функцию. К этому типу решений относятся простые волны. Поэтому частично инвариантные решения ранга $\beta = 1$ и дефекта инвариантности $\delta = 1$ назовем решениями типа простых волн. Как следует из работы [2], такие решения надо строить на подгруппах третьего порядка. В работе [2] была найдена система классов неподобных подгрупп третьего порядка, которая для удобства вычислений сводится к двадцати различным типам классов. Приводим эту таблицу.

	Операторы				Операторы		
1	X_1	X_2	X_3	11	X_2	X_4	$X_6+\alpha X_5$
2	X_1	X_2	X_4	12	X_2	X_4	X_1+X_5
3	X_1	X_2	X_3+X_4	13	X_2	X_4	X_5
4	X_1	X_2	$X_6+\alpha X_4$	14	X_2	X_3+X_4	X_1+X_5
5	X_1	X_6	X_7	15	X_4	X_5	$X_7+\alpha X_6$
6	X_2	X_3	$X_7+\alpha X_6$	16	X_4	X_5	$X_2+X_7+\alpha X_6$
7	X_2	X_3	X_1+X_7	17	X_4	X_5	X_6
8	X_2	X_3	X_1+X_5	18	X_4	$X_3+\alpha X_2$	$X_6+\alpha X_5$
9	X_2	X_3	X_4	19	X_2+X_5	X_7	X_3-X_4
10	X_2	X_3	$X_6+\alpha X_4$	20	X_2+X_5	X_3	$X_4+\alpha X_2$

Для получения частично инвариантных решений применялся алгоритм, изложенный в [1]. С помощью этого алгоритма исходная система (1.1) расщепляется на систему (1.1) / H, в которую входят только инварианты, и на пассивную систему P, в которую входят инварианты и параметрические функции. Из полученных решений исключались те, которые можно получить как инвариантные решения того же ранга $\beta = 1$, задача отыскания которых в значительной степени проще. В том случае, когда частично инвариантные решения могут быть получены как инвариантные, говорят, что имеет место редукция частично инвариантных решений к инвариантным. Достаточное условие редукции для систем первого порядка дает следующая теорема Л. В. Овсянникова.

Теорема. Если из пассивной системы можно найти выражения всех производных первого порядка от параметрических функций, то для всякого частично инвариантного H -решения найдется подгруппа $H' \subset H$ такая, что это решение есть инвариантное H'-решение того же ранга.

2. Интерес представляют только такие решения, в которых давление не тождественно постоянно, так как при $p \equiv \text{const}$ можно выписать общее решение системы (1.1). Получены следующие результаты для решений типа простых волн:

2.1) как и в случае простых волн существуют только изэнтропические частично инвариантные решения, не редуцируемые к инвариантным решениям. Л. В. Овсянниковым аналогичное свойство было доказано и для двойных волн [3];

2.2) обозначим через I^τ ($\tau = 1, \ldots, 4$) полный набор инвариантов какой-нибудь трехпараметрической подгруппы и пусть h есть ранг матрицы Якоби функций I^τ по переменным u, v, p, ρ. Так как давление p и плотность ρ являются инвариантами группы, допускаемой системой (1.1) при произвольной f (ρ, S), то ясно, что h может принимать только значения 3 и 4. Следующий результат справедлив для всех частично инвариантных решений ранга $\beta = 1$ и дефекта инвариантности $\delta = 1$, кроме простых волн: если $h = 4$, то нередуцируемые частично инвариантные решения могут существовать только для специальных уравнений состояния; напротив, если $h = 3$, то нередуцируемые решения типа простых волн существуют при произвольной функции f (ρ).

3. Ниже приводится сводка полученных результатов. В дальнейшем использованы следующие обозначения: a, b, c_0, α, u_0, v_0, p_0, ρ_0 — произвольные постоянные, Φ — произвольная функция. Номера решений будут совпадать с номерами подгрупп таблицы.

3.1. Решение 1 — простые волны. Оно хорошо изучено и в данной работе не рассматривается.

3.2. На подгруппах 5, 6, 10, 13, 16 ($\alpha \neq 0$), 19, 20 не существует нередуцируемых решений типа простых волн.

Отметим, что в классе нередуцируемых решений типа простых волн можно выделить следующие три подкласса:

а) решения, в которых уравнение состояния $p = f(\rho)$ произвольно, $u(t, x, y)$ линейна по переменной x, а v и ρ есть, вообще говоря, функции переменных t, y,

в) решения, в которых уравнение состояния произвольно, но $\mathbf{u}(t, x, y)$ — нелинейная вектор-функция по всем независимым переменным,

с) решения со специальным уравнением состояния. Решения подкласса а) существуют на подгруппах 2, 9, 11, 12 и имеют следующий вид.

3.3. Решение 2. Пусть

$$\varphi(\rho) = \left(2\int\limits_{\rho}^{a} \frac{dp}{\rho}\right)^{1/2}, \qquad \psi(\rho) = \int\limits_{b}^{\rho} \left(\frac{\varphi'}{\varphi\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right) d\rho, \qquad \omega(\rho) = -\frac{1}{\rho\varphi}$$

Тогда это решение таково, что в нем $\rho = \rho(y)$ определяется неявно из соотношения

$$y = c_0 \psi(\rho)$$

а функции $u(t, x, y)$ и $v(y)$ определяются через известную функцию $\rho(y)$ следующим образом:

$$v = \varphi(\rho), \qquad u = \rho\varphi\left[\Phi(t - c_0\omega(\rho)) - \frac{x}{c_0}\right]$$

3.4. Решение 9

$$\rho = \frac{b}{t+a}, \qquad v = 0, \qquad u = \frac{x + \Phi(y)}{t+a}$$

3.5. Решение 11

$$v = \alpha \ln t + \omega(z), \qquad \rho = \rho(z), \qquad z = y/t - \alpha \ln t$$

Функции $\rho(z)$ и $\omega(z)$ находятся из системы обыкновенных уравнений

$$\omega'(\omega - z - \alpha) + \frac{\rho'}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \alpha = 0$$

$$(\omega - z - \alpha)\left(\omega'' - 2\frac{\rho'}{\rho} - \omega'\frac{\rho'}{\rho}\right) + (\omega - z - \alpha)^2\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right] = \omega' + \omega'^2$$

Функция $u(t, x, y)$ восстанавливается квадратурой по известным функциям $\rho(z)$ и $\omega(z)$

$$u = -\frac{x}{t}\left[\omega' + \frac{\rho'}{\rho}(\omega - z - \alpha)\right] + \rho \exp\left(\int \frac{\omega'\,dz}{\omega - z - \alpha}\right)\Phi\left(\ln t - \int \frac{dz}{\omega - z - \alpha}\right)$$

3.6. Решение 12

$$\rho = \rho(z), \qquad v = t + \omega(z)$$

$$z = 2y - t^2, \qquad \omega = (a - \sigma(\rho) - z)^{1/2}, \qquad \sigma(\rho) = 2\int \frac{dp}{\rho}$$

— известная функция, а $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению

$$2(a - \sigma - z)^2\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right] + (a - \sigma - z) \times$$

$$\times \left[\frac{\rho'}{\rho}(\sigma'\rho' + 1) - (\sigma''\rho'^2 + \sigma'\rho'')\right] = (\sigma'\rho' + 1)^2$$

$$\sigma' \equiv d\sigma/d\rho, \qquad \sigma'' \equiv d^2\sigma/d\rho^2$$

Функция $u(t, x, y)$ через $\rho(z)$ и $\omega(z)$ восстанавливается квадратурой

$$u = -2x\left(\omega' + \frac{\rho'}{\rho}\omega\right) + \rho\omega\Phi\left(t - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\omega}\right)$$

Подкласс в) состоит из единственного решения, полученного на подгруппе 15, в которой из условия нередуцируемости следует положить $\alpha = 0$. Ниже приводится это решение.

3.7. Решение 15

$$\rho=\frac{1}{at+bt^2}, \quad u=\frac{x}{t}+\frac{a}{t}\cos\theta, \qquad v=\frac{y}{t}+\frac{a}{t}\sin\theta$$

Функция θ определяется неявным образом из соотношений

$$\Phi(\lambda, \theta-\gamma)=0$$

$$\lambda^2=\frac{r^2+a^2}{t^2}+2\frac{r}{t}\cos(\theta-\varphi)\left(\frac{a}{t}+b\right)+2b\frac{a}{t}+b^2$$

$$\gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin(\theta-\varphi)}{bt+a+r\cos(\theta-\varphi)}, \qquad r^2=x^2+y^2, \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

Решения подкласса с) существуют на подгруппах 3, 4, 7, 8, 14, 17, 18 и имеют следующий вид.

3.8. Решение 3

$$p=p_0+\frac{a^2}{\rho_0}-\frac{a^2}{\rho}, \qquad u=u_0+y, \qquad v=b-\frac{a}{\rho}$$

Функция $\rho(t, x, y)$ находится неявным образом из соотношения

$$\frac{a}{\rho}+b\ln\left(\frac{a-b\rho}{\rho}\right)=\varphi(t, y)-x$$

а) $$\varphi(t, y)=\frac{y^2}{2b}+u_0\frac{y}{b}+\Phi(y-bt) \qquad (b\neq 0)$$

в) $$\varphi(t, y)=t(y+u_0)+\Phi(y) \qquad (b=0)$$

3.9. Решение 4.

$$p=p_0+\frac{a^2}{\rho_0}-\frac{a^2}{\rho}, \qquad u=\alpha\ln y+u_0, \qquad v=b-\frac{a}{\rho}$$

Функция $\rho(t, x, y)$ находится неявным образом из соотношения

$$\frac{a}{\rho}+b\ln\left(\frac{a-b\rho}{\rho}\right)=\varphi(t, y)-\frac{\alpha x}{y}$$

а) $$\varphi(t, y)=\frac{\alpha^2}{2b}\ln^2 y+\frac{\alpha u_0}{b}\ln y+\Phi(y-bt) \qquad (b\neq 0)$$

в) $$\varphi(t, y)=\frac{\alpha t}{y}(\alpha\ln y+u_0)+\Phi(y) \qquad (b=0)$$

3.10. Решение 7

$$p=\frac{b^2c_0}{2}\exp\left(-2\frac{c_0}{\rho}\right), \qquad q=b\exp\left(-\frac{c_0}{\rho}\right), \qquad \theta=t+a$$

Функция $\rho(r, \varphi, t)$ задается неявно соотношением

$$\Phi(l^2, \gamma-t)=0$$

$$l^2=\xi^2+\eta^2, \qquad \gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}, \qquad \xi=r\cos(t+a-\varphi)$$

$$\eta=r\sin(t+a-\varphi)-b\exp\left(-\frac{c_0}{\rho}\right)\left(\frac{c_0}{\rho}+1\right)$$

$$r^2=x^2+y^2, \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad q^2=u^2+v^2, \qquad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

3.11. Решение 8

$$p=p_0+\frac{a^2}{\rho_0}-\frac{a^2}{\rho}, \qquad u=b-\frac{a}{\rho}, \qquad v=t$$

$$\rho=a\left\{2\left[y-\frac{t^2}{2}-\Phi(x-bt)\right]\right\}^{-1/2}$$

3.12. Решение 14, а

$$p=c_0-b^2\left[\frac{1}{a(b+a\rho)}+\frac{1}{\rho}\right]$$

$$u=y-\frac{t^2}{2}+\ln\frac{u_0\rho}{a\rho+b}, \qquad v=t+a+\frac{b}{\rho}$$

Функция $\rho\ (t,\ x,\ y)$ определяется неявно из соотношений

$$\Phi\left(z_2-\frac{t^2}{2}-at,\ z_1-z_2t+\frac{t^3}{2}+\frac{at^2}{2}-(\ln u_0+1)\,t\right)=0$$

$$z_1=x+a\ln\left(\frac{b+a\rho}{\rho}\right)-\frac{b}{\rho},\qquad z_2=y-\ln\left(\frac{b+a\rho}{\rho}\right)-\frac{a\rho}{b+a\rho}$$

Решение 14, б

$$p=c_0-\frac{1}{a\,(1+a\rho)},\qquad u=y-\frac{t^2}{2}+\ln\frac{b\rho}{1+a\rho},\qquad v=t$$

Функция $\rho\ (t,\ x,\ y)$ находится из соотношения

$$\ln\frac{\rho}{1+a\rho}+\frac{1}{1+a\rho}-1=\varphi\,(x,\ t)-y$$

где $\varphi\ (x,\ t)$ определяется также неявным образом

$$\Phi\ (\varphi-{}^1/_2t^2,\ x-t\varphi+{}^1/_2t^3-(\ln\ b+1)\ t)=0$$

3.13. Решение 17, а

$$u=x\ /\ t+a\sqrt{\rho},\qquad v=y\ /\ t,\qquad p={}^1/_8a^2\rho^2+b$$

Функция $\rho\ (t,\ x)$ задается неявно

$$\Phi\ (t\sqrt{\rho},\ x\ /\ t+{}^3/_2a\sqrt{\rho})=0$$

Решение 17, б

$$u=x\ /\ t,\qquad v=y\ /\ t+a\sqrt{\rho},\qquad p={}^1/_8a^2\rho^2+b$$

Функция $\rho\ (y,\ t)$ определяется неявным образом из соотношения

$$\Phi\ (t\sqrt{\rho},\ y\ /\ t+{}^3/_2a\sqrt{\rho})=0$$

3.14. Решение 18. Нередуцируемое решение существует только при $\alpha=0$

$$p={}^1/_3a^2\rho^3+b,\qquad u=x\ /\ t+a\rho,\qquad v=v_0$$

Функция $\rho\ (x,\ t)$ определяется неявно

$$\Phi\ (t\rho,\ x\ /\ t+2a\rho)=0$$

4. При рассмотрении решений типа простых волн оказалось, что решение 9 и решение 15 допускают обобщение, если в системе уравнений (1.1) считать давление и плотность зависящими только от времени. В системе (1.1) положим $p=p\ (t)$ и $\rho=\rho\ (t)$ и исключим из рассмотрения неизэнтропический случай (когда давление и плотность постоянны). Тогда получим следующую систему уравнений:

$$u_t+uu_x+vu_y=0,\quad v_t+uv_x+vv_y=0,\ \mu\ (t)+u_x+v_y=0 \tag{4.1}$$

Здесь для простоты записи ввели обозначение $\mu\ (t)=\rho'\ /\ \rho$. Заметим, что, принимая $p=p\ (t)$, $\rho=\rho\ (t)$, отыскиваем частично инвариантное решение ранга $\beta=1$ и дефекта инвариантности $\delta=2$ по подгруппе $H=\langle X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5\rangle$. Так как здесь дефект инвариантности $\delta=2$, то это решение в отличие от решений типа простых волн должно содержать две произвольные функции.

Обратимся к исследованию системы (4.1). Два первых уравнения этой системы можно проинтегрировать в виде

$$x-tu=\varphi\ (u,\ v),\qquad y-tv=\psi\ (u,\ v) \tag{4.2}$$

Здесь φ,ψ — произвольные функции. Для решения третьего уравнения системы (4.1) осуществим замену независимых переменных $(x,\ y,\ t)\to(u,\ v,\ t)$. Легко показать, что в случае, когда $\mu\ (t)=-(t+a)^{-1}$ функции u и v функционально зависимы. Для этого надо продифференцировать первое и второе уравнения системы (4.1) по x и y соответственно, затем их сложить и воспользоваться третьим уравнением этой же системы. Таким образом, случай $\mu\ (t)=-(t+a)^{-1}$ или $\rho=(a+bt)^{-1}$ $(\rho'\ /\ \rho=\mu)$ надо считать особым в смысле преобразования $(x,\ y,\ t)\to(u,\ v,\ t)$. Переходя к переменным $u,\ v,\ t$, последнее уравнение (4.1) в силу (4.2) можно записать в виде

$$\mu\,(t)=-\frac{2t+\varphi_u+\psi_v}{\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u+t\,(\varphi_u+\psi_v)+t^2} \tag{4.3}$$

Легко проверить, что в силу (4.3) функция $\mu\ (t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\mu''-3\mu\mu'+\mu^3=0\qquad(\lambda\ (t)=\exp\ [-\textstyle\int\mu dt])$$

Это уравнение интегрируется (подстановка указана в скобках), и его решение имеет вид

$$\mu = -\frac{b + 2c_0t}{a + bt + c_0t^2} \tag{4.4}$$

Так как $\mu(t) = \rho' / \rho$, то получаем следующее выражение для функции $\rho(t)$:

$$\rho = \frac{1}{a + bt + c_0t^2} \quad (c_0 \neq 0)$$

Вставляя выражение для $\mu(t)$ (4.4) в уравнение (4.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем следующую систему уравнений:

$$\varphi_u + \psi_v = b / c_0, \qquad \varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u = a / c_0 \tag{4.5}$$

Итак, в предположении $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$ оказывается, что

$$\rho = \frac{1}{a + bt + c_0t^2} \tag{4.6}$$

и при $c_0 \neq 0$ решение системы (4.1) должно иметь вид

$$x - tu = \varphi(u, v), \quad y - tv = \psi(u, v)$$

где функции φ, ψ удовлетворяют системе (4.5).

Сравнивая выражения для $\rho(t)$ (4.6) с аналогичными выражениями в решении 9 и решении 15, замечаем, что обобщение решения 9 будет при $c_0 = 0$ в формуле (4.6). Обобщение решения 15 произойдет, если в (4.6) положить $a = 0$. Интересно отметить, что именно в этих случаях удается проинтегрировать систему (4.1) до конца. Если $\rho = (a + bt)^{-1}$ и в силу функциональной зависимости u и v положить $v = F(u)$, интегрирование системы (4.1) дает следующее решение;

$$\begin{gathered} u = u(t, x, y), \qquad \rho = \frac{1}{a + bt} \\ F(u) = v = \frac{by}{a + bt} + \frac{b}{a + bt}\,\Phi(bx - u(bt + a)) \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь $\Phi(z)$ и $v = F(u)$ — произвольные функции. Если положить $a = 0$ (случай решения 15), то из последнего уравнения (4.5) следует, что φ и ψ также функционально зависимы. Полагая $\psi = F(\varphi)$ и интегрируя систему (4.5), получаем следующее решение:

$$\begin{gathered} x - tu = \varphi(u, v), \qquad \rho = \frac{1}{bt + c_0t^2} \\ F(\varphi) = y - tv = \frac{b}{c_0}v + \Phi(bu - c_0\varphi) \end{gathered} \tag{4.8}$$

Функции $\psi = F(\varphi)$ и $\Phi(z)$ произвольны. В решениях (4.7) и (4.8) произвольное изэнтропическое уравнение состояния. Было проверено, что не получается обобщения для решений типа простых волн подкласса а) (подобно обобщениям (4.7) и (4.8)), если в системе (1.1) полагать

$$\begin{gathered} u = a(t, y)\,x + b(t, y), \quad v = v(t, y) \\ \rho = \rho(t, y), \quad p = f(\rho) \end{gathered}$$

В заключение хотелось бы отметить важность вопроса исследования решений типа простых волн применительно к конкретным газодинамическим задачам.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за проявленный интерес к работе и ценные советы.

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1967.
3. Partly invariant solutions of the equations admitted a group. Proc. 11-th Internat. Congress. Appl. Mech. Münich (Germany), 1964, pp. 868—870.