Сибирский экологический журнал, 4 (1999) 443–448

УДК 504.062:33

Оптимизационный подход к конкурентному использованию экологических объектов

О. В. ХВОСТЕНКО

Институт биофизики СО РАН
660036 Красноярск, Академгородок

АННОТАЦИЯ

В статье проведен строгий последовательный математический анализ эксплуатации экологических объектов с двумя взаимоисключающими видами потребительской полезности. Впервые отдельно рассмотрен случай непрерывного распределения качества объектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу рационального хозяйствования при наличии у предмета двух видов потребительской полезности. Впервые она сформулирована в работе [1]. Частный случай с решением рассмотрен в неопубликованной работе В. А. Охонина.

Пусть у нас есть совокупность таких предметов, придерживаясь терминологии В. А. Охонина, будем называть их речными долинами, которые можно использовать, например, для сельского хозяйства и гидростроительства. Каждая долина характеризуется четырьмя числами: Q_1 – полезность долины при сельскохозяйственном использовании, S_1 – трудовые затраты при таком использовании, Q_2 – полезность при энергетическом использовании, S_2 – трудовые затраты при таком использовании. Каждую долину можно использовать только одним из двух способов. Пусть нам даны совокупные потребности $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ в продукции первого и второго вида соответственно. Заранее известно, что эти потребности могут быть удовлетворены при разумном использовании всех или части имеющихся долин (дефицит отсутствует). Задача – установить, каким образом должны использоваться долины, чтобы суммарные затраты на их обработку были минимальны и спрос на оба вида продукции был удовлетворен.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для каждой долины введем еще пару числовых характеристик: $x = \dfrac{S_1}{Q_1}$ – удельная себестоимость единицы сельскохозяйственной продукции, $y = \dfrac{S_2}{Q_2}$ – удельная себестоимость единицы электроэнергии. Далее объединим в одну все долины, для которых характеристики x и y совпадают. Будем считать, что объединенная долина может быть единовременно использована под сельское хозяйство и под производство электроэнергии. Для каждой из полученных объединенных долин определим полезность при сельскохозяйственном использовании Q_1 как суммарную по всем входящим в нее долинам. Полезность объединенной долины при гидростроительстве Q_2 есть суммарная энергетическая полезность по всем входящим в нее долинам. Аналогичным образом определяются затраты S_1 и S_2 при том или ином использовании объединенной долины, т. е. как сумма затрат по всем входящим в нее долинам. На получившемся множестве объединенных долин числовые характеристики Q_1, Q_2 и S_1, S_2 суть функции от x и y: $Q_1 = Q_1(x, y)$, $Q_2 = Q_2(x, y)$, $S_1 = S_1(x, y)$, $S_2 = S_2(x, y)$. Очевидно, что $S_1(x, y) = Q_1(x, y)\, x$, $S_2(x, y) = Q_2(x, y)\, y$.

Будем считать, что нам заданы распределения $Q_1(x, y)$ и $Q_2(x, y)$, причем обе функции отличны от нуля только внутри некоторого прямоугольника $0 \le x \le a_0$, $0 \le y \le b_0$, в остальных же точках плоскости (x, y) функции Q_1 и Q_2 равны нулю. Это согласуется со смыслом задачи – себестоимость продукции не может быть равной нулю или отрицательной, вместе с тем она не может быть сколь угодно высока. Себестоимость должна ограничиваться некоторым разумным числом. Постоянные a_0, b_0 выступают в качестве таких ограничений. Мы считаем, что они нам известны изначально.

Таким образом, имеем два числа a_0, b_0 и две функции Q_1, Q_2, заданные на множестве $\{ 0 \le x \le a_0, 0 \le y \le b_0 \}$, причем на границе этого множества обе функции Q_1 и Q_2 обращаются в ноль.

На плоскости (x, y) множество долин заполняет некоторую область (рис. 1), которая и будет носителем функций Q_1, Q_2. На схеме вертикальная линия c абсциссой a_1 означает границу, левее которой выгодно заниматься сельским хозяйством потому, что там себестоимость сельскохозяйственной продукции низка; если использовать таким образом все долины левее этой прямой, то потребность в сельскохозяйственной продукции будет полностью удовлетворена. Горизонтальная прямая с ординатой b_1 означает границу, ниже которой выгодно

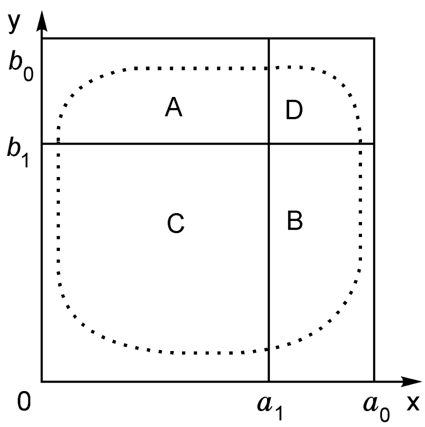

Рис. 1.

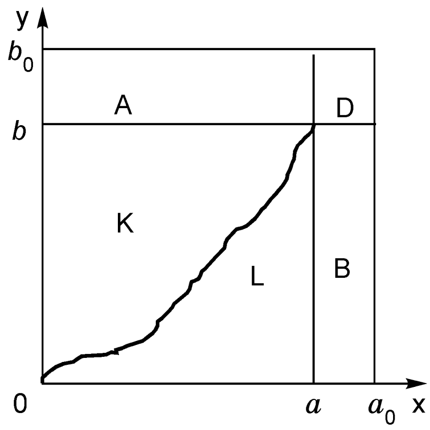

Рис. 2.

производить электроэнергию; если использовать таким образом все долины, лежащие ниже этой прямой, то потребность в электроэнергии будет удовлетворена. В долинах зоны A (см. рис. 1) выгодно заниматься только сельским хозяйством, в долинах зоны B выгодно производить только электроэнергию. В зоне C можно производить и то, и другое, поскольку себестоимость продукции в этой зоне низка в обоих отношениях. Зона C должна быть некоторым образом поделена между крестьянами и гидростроителями. Тогда потребности в сельскохозяйственной продукции и в электроэнергии уже не будут полностью удовлетворены и придется осваивать долины, лежащие в ранее неиспользуемой зоне D, следовательно, вертикальная прямая сдвинется вправо, а горизонтальная прямая сдвинется вверх.

Пусть заданы два числа a и b такие, что сельскохозяйственная продукция производится только в тех долинах, где ее себестоимость не выше a, а электроэнергия производится только в тех долинах, где ее себестоимость не выше b. При этом предполагается, что существует разделение спорной зоны C на сельскохозяйственный и энергетический районы таким образом, что спрос на оба вида продукции полностью удовлетворен (рис. 2). В зоне A и прилегающей к ней зоне K работают только крестьяне, в зонах B и L работают только гидростроители, зона D не используется.

Наша задача заключается в том, чтобы для заданных a и b определить, какой вид должна иметь граница между областями K и L, чтобы совокупные трудовые затраты были минимальны. Далее, среди всех допустимых пар (a, b) найти ту, для которой величина совокупных затрат при оптимальном делении минимальна. Тем самым задача оптимального планирования для данной модели будет решена.

Перейдем к точной математической формулировке поставленной задачи.

Даны два положительных числа a_0, b_0, две неотрицательные функции $Q_1(x, y)$, $Q_2(x, y)$, имеющие общий носитель, лежащий внутри множества $\{0 \le x \le a_0, 0 \le y \le b_0\}$. Кроме этого даны две положительные константы $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ – величины спроса.

Зададим пару чисел (a, b) $(0 \le a \le a_0, 0 \le b \le b_0)$ – максимальные значения, которые допускаются для себестоимости производимой сельскохозяйственной продукции и электроэнергии соответственно. Границу между сельскохозяйственной и энергетической зонами зададим как график функции $y = f(x)$, $0 \le x \le a$; она непрерывна и удовлетворяет условию

$$0 \le f(x) \le b. \tag{1}$$

Тогда величины производимой продукции и совокупные затраты суть (рис. 3)

$F_1 = \int_0^a \int_{f(x)}^{b_0} Q_1(x, y)\, dydx$ – производимая сельскохозяйственная продукция,

$F_2 = \int_0^a \int_0^{f(x)} Q_2(x, y)\, dydx + \int_a^{a_0} \int_0^b Q_2(x, y)\, dydx$ – производимая энергия,

$J = \int_0^a \int_{f(x)}^{b_0} Q_1(x, y)\, xdydx + \int_0^a \int_0^{f(x)} Q_2(x, y)\, ydydx + \int_a^{a_0} \int_0^b Q_2(x, y) y\, dydx$ – совокупные затраты.

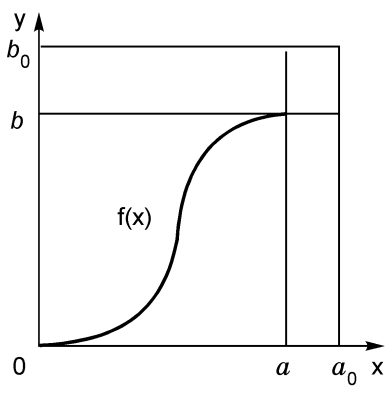

Рис. 3.

Величины F_1, F_2, J зависят от a, b и функции f. Вначале будем считать, что a и b фиксированы, и рассматривать F_1, F_2, J как функционалы на пространстве непрерывных функций, удовлетворяющих условию (1).

Получена вариационная задача на условный экстремум: найти минимум функционала $J(f)$ на пространстве непрерывных функций, удовлетворяющих (1), при условиях

$$F_i(f) = \overline{Q}_i. \tag{2}$$

Прежде чем исследовать эту задачу, перейдем к эквивалентной формулировке. Обозначим

$$\tilde{F}_i(f) = \int_0^a \int_0^{f(x)} Q_i(x, y)\, dydx.$$

В новых обозначениях условия (2) примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(f) &= \int_0^a \int_0^{f(x)} Q_1 dydx = \\ &= \int_0^a \int_0^{b_0} Q_1\, dydx - \overline{Q}_1 = \tilde{Q}_1, \\ \tilde{F}_2(f) &= \int_0^a \int_0^{f(x)} Q_2 dydx = \\ &= \overline{Q}_2 - \int_0^{a_0} \int_0^b Q_2\, dydx = \tilde{Q}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим функционал J:

$$J(f) = \int_0^a \int_0^{f(x)} (Q_2 y - Q_1 x) dydx + \int_0^a \int_0^{b_0} Q_1\, xdydx + \int_0^{a_0} \int_0^b Q_2\, y\, dydx.$$

В полученном выражении два последних слагаемых суть константы, поэтому вместо минимума функционала J можем искать минимум функционала

$$\tilde{J}(f) = \int_0^a \int_0^{f(x)} (Q_2\, y - Q_1\, x)\, dydx.$$

Таким образом, получаем эквивалентную формулировку задачи: найти минимум функционала $\tilde{J}(f)$ при условии $\tilde{F}_1(f) = \tilde{Q}_1$, $\tilde{F}_2(f) = \tilde{Q}_2$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

По классической теореме вариационного исчисления, если для функции $f = f(x)$ вариации функционалов $\delta\tilde{F}_1(f)$ и $\delta\tilde{F}_2(f)$ линейно независимы, то для того, чтобы функция $f(x)$ реализовала экстремум $\tilde{J}(f)$, при условиях $\tilde{F}_i(f) = \mathrm{const}$, необходимо, чтобы нашлись постоянные λ_1, λ_2 такие, что $\delta(\tilde{J}(f) + \lambda_1 \tilde{F}_1(f) + \lambda_2 \tilde{F}_2(f)) \equiv 0$.

Найдем вариации функционалов $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_1$ и $\tilde{J}$. Для этого определим следующие функции:

$$q_i(x, \zeta) = \int_0^\zeta Q_i(x,y)\,dy,$$

$$j(x, \zeta) = \int_0^\zeta (Q_2(x, y)\,y - Q_1(x, y)x)dy.$$

Тогда

$$\tilde{F}_i(f) = \int_0^a q_i(x, f(x))\,dx,$$

$$\tilde{J}(f) = \int_0^a j(x, f(x))\,dx.$$

После того как мы привели наши функционалы к простейшему интегральному виду, можно без труда посчитать их вариации. Пусть $\delta f(x)$ – вариация кривой $f(x)$, тогда вариации функционалов $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, и $\tilde{J}$ на $\delta f(x)$ суть

$$\delta\tilde{F}_i(f) = \int_0^a Q_i(x, f(x))\delta f(x)\,dx,$$

$$\delta\tilde{J}(f) = \int_0^a (Q_2(x, f(x))\,f(x) -$$

$$- Q_1(x, f(x))\,x)\,\delta f(x)\,dx.$$

Линейная независимость вариаций $\delta\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ эквивалентна линейной независимости функций $Q_1(x, f(x))$ и $Q_2(x, f(x))$. Необходимым условием того, чтобы f была экстремалью J в случае, когда $Q_1(x, f(x))$ и $Q_2(x, f(x))$ линейно независимы, является условие существования таких λ_1, λ_2, что

$$\int_0^a [Q_2(x, f(x))\,f(x) - Q_1(x, f(x))\,x +$$

$$+ \lambda_1 Q_1(x, f(x)) + \lambda_2 Q_2(x, f(x))]\,\delta f(x)\,dx = 0$$

для всякой вариации $\delta f(x)$. А это равносильно уравнению

$$Q_2(x, f(x))\,f(x) - Q_1(x, f(x))\,x +$$

$$+ \lambda_1 Q_1(x, f(x)) + \lambda_2 Q_2(x, f(x)) = 0. \quad (4)$$

В случае, когда $Q_1(x, f(x))$ и $Q_2(x, f(x))$ линейно зависимы, необходимо, чтобы существовала одна константа λ такая, что

$$Q_2(x, f(x))\,f(x) - Q_1(x, f(x))\,x +$$

$$+ \lambda Q_1(x, f(x)) = 0. \quad (4')$$

Но добавляется еще условие совместности уравнений (3).

Если функции Q_1 и Q_2 заданы в явном виде, то необходимо разрешить функциональное уравнение (4) относительно f. Тогда мы получим выражение f, как функции от x, λ_1 и λ_2

$$f = f(x, \lambda_1, \lambda_2). \quad (5)$$

Теперь нужно проварьировать параметры a и b. Для этого будем менять a в интервале от a_1 до a_0, для каждого конкретного значения a, подставляя полученное выражение для f в первое из уравнений (3), найдем множество значений, которые могут принимать параметры λ_1, λ_2. Подставив возможные значения параметров λ_1, λ_2 во второе уравнение (3), получим множество допустимых значений b при заданном a. Находя множество допустимых значений параметра b, мы не должны забывать о проверке условия (1). В результате определим множество допустимых пар (a, b), т. е. таких значений a и b, для которых существует решение вариационной задачи. Кроме того, считая, что подстановка выражения (5) в условия (3) дает нам невырожденную систему, получаем выражение констант λ_1, λ_2 как функций от a и b, а стало быть, и выражение f как функции от x, a и b – $f = f(x, a, b)$. Допустим, что при заданных a, b кривая f реализует минимум $\tilde{J}$; подставив выражение для f в функционал совокупных затрат J, получаем величину совокупных затрат J как функцию от a и b – $J = J(a, b)$. Эта функция определена на множестве допустимых пар (a, b).

Необходимым и достаточным условием минимума функции J является обращение в ноль частных производных $\frac{\partial J}{\partial a}$ и $\frac{\partial J}{\partial b}$, а также положительная определенность матрицы из вторых производных. Среди всех пар (a, b), удовлетворяющих этим условиям, необходимо найти точку глобального минимума функции J; кроме этого, необходимо исследовать граничные точки множества допустимых пар, потому что минимум функции $J(a, b)$ может достигаться на границе области определения.

Таким образом, задача оптимального деления будет решена, в предположении, что уравнение (4) разрешимо относительно f и далее все преобразования корректны.

СЛУЧАЙ ПОСТОЯННЫХ Q_1, Q_2

Рассмотрим один пример, который иллюстрирует предложенную нами схему. Подобный случай был разобран ранее В. А. Охониным.

Пусть нам известно, что функции Q_1 и Q_2 постоянны: $Q_1\ (x,\ y) = Q_1 = \text{const}$, при $0 < x < a_0$, $0 < y < b_0$.

Когда Q_1 и Q_2 постоянны, вариации $\delta\tilde{F}_1$ и $\delta\tilde{F}_2$ линейно зависимы:

$$\delta\tilde{F}_i = Q_i\int_0^a \delta f(x)dx.$$

Уравнение (4′) принимает вид

$$Q_2\, f(x) - Q_1 x + \lambda Q_1 = 0. \qquad (6)$$

Это уравнение прямой. Для тех x, для которых прямая выходит в отрицательную область, мы доопределяем $f(x)$ нулем. Таким образом, в нашем случае условные экстремали функционала $\tilde{J}$ суть ломаные.

Дополнительное условие совместности заключается в том, что a и b не будут независимы. При равной производительности всех долин Q_1,Q_2 должна быть постоянна площадь сельскохозяйственных угодий и энергетической области. Это отражено соотношением

$$b = \frac{\dfrac{\overline{Q}_1}{Q_1} + \dfrac{\overline{Q}_2}{Q_2} - ab_0}{a_0 - a}.$$

Выбрав конкретное значение параметра a из отрезка $[a_1; a_0]$ (в нашем случае $a_1 = \dfrac{\overline{Q}_1 b_0}{Q_1}$), необходимо подставить выражение (6) в первое из уравнений (3) и определить, какие значения может принимать λ. Геометрический смысл уравнения, полученного в результате подстановки, состоит в том, что площадь, ограниченная кривой f, должна равняться $ab_0 - \dfrac{\overline{Q}_1}{Q_1}$. Понятно, что это может быть выполнено только для одного значения λ. Таким образом, для заданного a можно найти значение b и кривую f, которая реализует минимум $\tilde{J}$ при данных a, b. Чтобы определить множество допустимых пар $(a,\ b)$, необходимо еще позаботиться о выполнении условия (1). Так как угловой коэффициент прямой $\dfrac{Q_1}{Q_2}>0$, $f(x) \le f(a)$. Условие $f(x) \le b$ дает нам $f(a) \le b$.

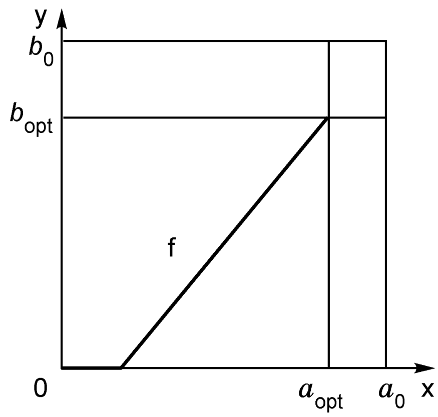

Рис. 4.

На следующем шаге мы должны проварьировать параметр a. Так как кривая f и параметр b зависят только от a, величина совокупных затрат J является функцией от $a - J = J(a)$. Требуется найти ее производную. Вычисления дают нам

$$J'(a) = \frac{Q_2}{2}\,[(b - f(a))\ (b + f\,(a) - 2b_0)].$$

Очевидно, что $J'(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(a) = b$, потому как всегда выполнено $b + f\,(a) - 2b_0 < 0$. Кроме того, $J'(a) < 0$

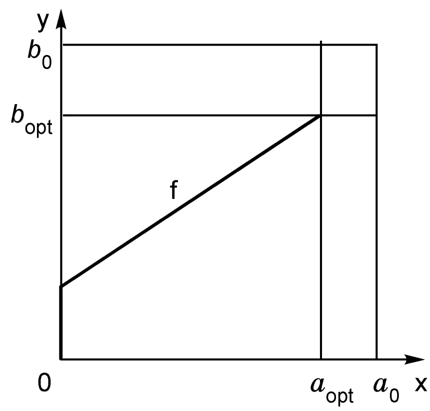

Рис. 5.

при $f(a) < b$, $J'(a) > 0$, при $f(a) > b$. Таким образом, мы видим, что функция совокупных затрат J имеет единственную точку минимума, когда $f(a) = b$. Обозначим значение параметра a, при котором достигается минимум функции J, через a_{opt}, соответствующее ему значение параметра b через b_{opt}. Пара (a_{opt}, b_{opt}) лежит на границе множества допустимых пар (a, b). Оптимальное значение a_{opt} зависит от постоянных a_0, b_0, Q_1, Q_2, $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, его можно найти численным путем. Аналитические же вычисления приводят к довольно громоздким уравнениям третьего порядка; мы не будем воспроизводить их здесь. Схематически возможные решения задачи оптимального деления показаны на рисунках 4 и 5. Эти результаты согласуются с результатами, полученными В. А. Охониным.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.G.Khlebopros, SocioeconomIcal Estimation of Ecological Objects (Two Limiting Cases of the Hierarchy of Characteristic Times), Global and Regional Ecological Problems, Krasnoyarsk, 1994, 140–160.

Optimization Approach to Competitive Use of Ecological Objects

O. V. KHVOSTENKO

The paper contains a strict consistent mathematical analysis of the use of ecological objects having two mutually exclusive values. For the first time, the case of discrete distribution is considered separately.