В участках с более высоким коэффициентом поглощения плотность дислокаций в приповерхностном слое больше. Кривые *1—3* на фиг. 3 соответствуют участкам максимальной, минимальной и некоторой средней плотности распределения, выявленным в обработанных шлифах. Участки затененной поверхности со следами скольжения расположены против областей облучаемой поверхности с малой плотностью дислокаций. Необходимо отметить, что скольжение наблюдалось только в зернах, расположенных близко к поверхности (2 ... 3 линейных размера зерна), а в имеющих свободный выход на поверхность не наблюдалось. В то же время, если встречаются включения в области, где произошла релаксация напряжений скольжением, скольжения наблюдались на значительной глубине (до 5 ... 6 линейных размеров зерна). Вероятно, в зернах, расположенных близко к поверхности, процессы скольжения облегчены.

Поступила 2 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пшеничников Ю. П.** Выявление тонкой структуры кристаллов. М.: Металлургия, 1973.

УДК 539.3

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПЛАСТИНУ

П. А. ЖИЛИН, Т. П. ИЛЬИЧЕВА

(*Ленинград*)

1. Введение. Сосредоточенные воздействия на тонкие тела типа пластин часто встречаются в расчетной практике. В основу исследований полагаются либо теория Кирхгофа, либо неклассические теории пластин типа Тимошенко [1]. Принято считать, что в непосредственной близости от точки приложения сосредоточенной силы двумерные теории пластин не применимы [1]. Это объясняется существенной трехмерностью напряженного состояния вблизи точки приложения силы.

В данной работе производится анализ напряженно-деформированного состояния тонкой плиты на основе трехмерной и двумерной теорий. Известно, что трехмерная теория характеризуется особенностью в перемещениях типа r^{-1}, где r — расстояние до точки A, точки приложения сосредоточенной силы. Особенность имеет место только для лицевой стороны пластины, содержащей точку A. В работе показано, что смещения точек срединной плоскости конечны. Однако если толщина пластины $2h$ стремится к нулю, то смещения точек срединной плоскости приобретают особенность вида $\ln r_0$, где r_0 — расстояние от рассматриваемой точки до точки A_0, являющейся нормальной проекцией точки A на срединную плоскость. Коэффициент при особенности $\ln r_0$ будем называть коэффициентом интенсивности. Если вместо смещений срединной плоскости рассматривать средние по толщине пластины смещения точек трехмерной среды, то они также будут иметь особенность типа $\ln r_0$, но коэффициент интенсивности будет отличаться от такового для смещений точек срединной плоскости. При $\nu = 0$ (ν — коэффициент Пуассона) различие в коэффициентах интенсивности пропадает.

Обратимся к двумерным теориям. По теории Кирхгофа прогиб пластины, отождествляемый с прогибом срединной плоскости, оказывается конечным и имеет порядок $O(h^{-3})$, если считать, что нагрузка имеет порядок $O(1)$, а за единицу длины принять наименьший размер пластины в плане. Коэффициент интенсивности в трехмерной теории имеет порядок $O(h^{-1})$. Поэтому при малых h решение по теории Кирхгофа достаточно хорошо совпадает с трехмерным решением в области $|\ln r_0| \leqslant CO(h^{-1})$, где C — ограниченная функция r_0, т. е. на некотором малом удалении от точки $r_0 = 0$. Решение этой же задачи по теориям типа Тимошенко в отличие от предыдущего содержит особенность в нормальном перемещении типа $\ln r_0$, и вопрос сводится к сравнению коэффициентов интенсивности, полученных по трех- и двумерной теориям.

В основу последующих построений положена теория так называемых простых оболочек [2—4], основные соотношения которой применительно к теории пластин приведены в п. 3.

2. Трехмерная теория. С некоторыми изменениями рассматривается задача Б. Г. Галеркина [5] для прямоугольной плиты, нагруженной распределенной нормальной нагрузкой и свободно опертой по краям. Плита ограничена плоскостями $x = 0,\ a,\ y = 0,\ b,\ z = \pm h$. Краевые условия имеют вид

$$u_2 = u_3 = \sigma_1 = 0 \text{ при } x = 0,\ a,\ u_1 = u_3 = \sigma_2 = 0 \text{ при } y = 0,\ b; \tag{2.1}$$

$$\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{32} = 0 \text{ при } z = -h,\ \sigma_3 = p(x, y),\ \tau_{31} = \tau_{32} = 0 \text{ при } z = h. \tag{2.2}$$

Если в точке $(a/2,\ b/2,\ h)$ приложена сосредоточенная сила величиной P, то поверхностная нагрузка имеет вид

$$p(x, y) = -\frac{P}{ab}\,\delta\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\delta\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right). \tag{2.3}$$

Решение задачи, согласно [5], будет выражаться через одну бигармоническую функцию $\varphi(x,\ y,\ z)$ следующим образом:

$$2Gu_1 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \quad 2Gu_2 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \quad 2Gu_3 = \left[2(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi,$$

$$\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi, \quad \tau_{12} = -\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y\partial z},$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi, \quad \tau_{23} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi,$$

$$\sigma_3 - \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi, \quad \tau_{31} - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi,$$

где $\Delta^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа; G — модуль сдвига. Бигармоническая функция, удовлетворяющая краевым условиям (2.1), (2.2), имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty}[A_{mn}\operatorname{ch}\alpha_{mn}z + B_{mn}\operatorname{sh}\alpha_{mn}z + z(C_{mn}\operatorname{ch}\alpha_{mn}z + D_{mn}\operatorname{sh}\alpha_{mn}z)]\sin\lambda_m x\sin\mu_n y.$$

Здесь $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{a}$; $\mu_n = \dfrac{n\pi}{b}$, $\lambda_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2$,

$$A_{mn} = -\frac{\alpha_{mn}h\operatorname{sh}\alpha_{mn}h + 2\nu\operatorname{ch}\alpha_{mn}h}{\alpha_{mn}^3(\operatorname{sh}2\alpha_{mn}h - 2\alpha_{mn}h)}P_{mn}, \quad C_{mn} = \frac{\operatorname{sh}\alpha_{mn}h\cdot P_{mn}}{\alpha_{mn}^2(\operatorname{sh}2\alpha_{mn}h + 2\alpha_{mn}h)},$$

$$B_{mn} = -\frac{\alpha_{mn}h\operatorname{ch}\alpha_{mn}h + 2\nu\operatorname{sh}\alpha_{mn}h}{\alpha_{mn}^3(\operatorname{sh}2\alpha_{mn}h + 2\alpha_{mn}h)}P_{mn}, \quad D_{mn} = \frac{\operatorname{ch}\alpha_{mn}h\cdot P_{mn}}{\alpha_{mn}^2(\operatorname{sh}\alpha_{mn}h - 2\alpha_{mn}h)};$$

$$p(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty}P_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y, \quad P_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x, y)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,dx\,dy. \tag{2.4}$$

Обратимся к анализу решения Б. Г. Галеркина. Для нормального прогиба $u_3(x,\ y,\ z)$ имеем представление

$$2Gu_3 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\{[2(1-2\nu)\alpha D - \alpha^2A]\operatorname{ch}\alpha z - \alpha^2Dz\operatorname{sh}\alpha z + [2(1-2\nu)\alpha C - \alpha^2B]\operatorname{sh}\alpha z - \alpha^2Cz\operatorname{ch}\alpha z\}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y. \tag{2.5}$$

Здесь и далее индексы m и n у величин α_{mn}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} для краткости опущены.

Для сравнения (2.5) с данными теории пластин вычислим следующие величины:

$$\langle u_3\rangle = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3(x, y, z)\,dz, \quad w_0 = u_3(x, y, 0). \tag{2.6}$$

Кроме того, введем в рассмотрение прогиб мембраны $\varphi_p(x,\ y)$, являющийся решением задачи Дирихле

$$\Delta\varphi_p = -p(x, y),\ \varphi_I|_L = 0,\ \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{2.7}$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

Решение задачи (2.7) имеет вид

$$\varphi_p(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{P_{mn}}{\alpha^2}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y. \tag{2.8}$$

В (2.7), (2.8) функция $p(x, y)$ та же, что и в (2.4). Вычисляя (2.6) и учитывая (2.8), получаем

$$2Gh\langle u_3\rangle = \frac{3-2\nu}{2}\varphi_p(x, y) + \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{2(1-\nu)hP_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y}{\alpha(\operatorname{sh}2\alpha h - 2\alpha h)}; \tag{2.9}$$

$$2Gw_0 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\operatorname{ch}\alpha h + \alpha h\operatorname{sh}\alpha h}{\alpha(\operatorname{sh}2\alpha h - 2\alpha h)}P_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y. \tag{2.10}$$

Если нагрузка $p(x, y)$ имеет вид (2.3), то прогиб мембраны $\varphi_p(x, y)$ имеет логарифмическую особенность и допускает представление [6]

$$\varphi_p(x, y) = -\frac{P}{4\pi}\ln\frac{4ab}{(2x-a)^2+(2y-b)^2} + \theta(x, y),$$

где гармоническая функция $\theta(x, y)$ выбирается так, чтобы $\varphi_p(x, y)$ обращалась в нуль на границе прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Очевидно, что $\theta(x, y)$ ограничена во всей области прямоугольника. Сравнивая между собой выражения (2.9) и (2.10), видим существенное различие: функция $\langle u_3\rangle$ имеет логарифмическую особенность, а w_0 — нет. Причем ряды в (2.9), (2.10) сходятся равномерно во всей области и представляют собой бесконечно дифференцируемые функции. Конечно, считается, что $h \neq 0$.

Физический смысл наличия особенности у $\langle u_3\rangle$ довольно прозрачен. Действительно, из решения Б. Г. Галеркина видно, что нормальный прогиб имеет особенность на поверхности $z = h$. Бесконечно тонкий слой вблизи $z = h$ «отслаивается» в виде тонкой мембраны. После осреднения это мембранное решение входит в (2.9).

Как уже отмечалось, ряды в (2.9), (2.10) равномерно сходятся вместе с производными всех порядков, если только $h \neq 0$. Если же $h \to 0$, то функции, представленные рядами (2.9), (2.10), уже будут содержать особенности. Это понятно, ибо при $h \to 0$ пластина вырождается в мембрану, но не только в нее. Вычисляя асимптотику функций $\langle u_3\rangle$ и w_0, приходим к представлениям

$$\langle u_3\rangle = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh}\frac{12-7\nu}{10}\varphi_p(x, y) + O(h); \tag{2.11}$$

$$w_0 = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh}\frac{3(8-3\nu)}{20}\varphi_p(x, y) + O(h). \tag{2.12}$$

Здесь функция $\varphi_0(x, y)$ есть прогиб свободно опертой пластины Кирхгофа, т. е.

$$\Delta^2\varphi_0(x, y) = p(x, y)/D,\ D = 2Eh^3/3(1-\nu^2) = 4Gh^3/3(1-\nu). \tag{2.13}$$

Функция $\varphi_0(x, y)$ имеет порядок $O(h^{-3})$, поэтому если $p(x, y)$ есть гладкая функция, то в (2.11), (2.12) допустимо ограничиться только первыми слагаемыми.

Если же $p(x, y)$ имеет вид (2.3), то в окрестности точки $x = a/2$, $y = b/2$ вторые слагаемые в (2.11), (2.12) могут оказаться главными и пренебрегать ими нельзя.

Аналогично могут быть проанализированы и другие характеристики. Приведем выражения для некоторых из них:

$$\langle u_1\rangle = \frac{\nu}{4G}\frac{\partial\varphi_p}{\partial x} + O(h^2); \tag{2.14}$$

$$T_1 = \int_{-h}^{h}\sigma_1 dz = -\nu h\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial y^2} + O(h^3); \tag{2.15}$$

$$T_{12} = \int_{-h}^{h}\tau_{12}dz = \nu h\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x\partial y} + O(h^3); \tag{2.16}$$

$$N_1 = \int_{-h}^{h}\tau_{13}dz = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_0); \tag{2.17}$$

$$M_1 = \int_{-h}^{h}\sigma_1 z dz = -D\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right) - \frac{2\nu h^2}{5}\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial y^2} + O(h^4); \tag{2.18}$$

$$M_{12} = \int_{-h}^{h}\tau_{12}z dz = -D(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} + \frac{2\nu h^2}{5}\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x\partial y} + O(h^4). \tag{2.19}$$

Отметим, что выражение для перерезывающей силы (2.17) является точным, в то время как (2.14)—(2.16), (2.18), (2.19) получены асимптотически. Формулы для $\langle u_2\rangle$, T_2, N_2, M_2 получаются из формул для $\langle u_1\rangle$, T_1, N_1, M_1 путем замены $\partial/\partial x \rightleftarrows \partial/\partial y$.

Из (2.12) следует, что если нагрузка имеет вид (2.3), то при $h \to 0$ смещения точек срединной плоскости тоже приобретают особенность вида $\ln r_0$. Сравнивая (2.11) и (2.12), видим, что при $h \to 0$ $\langle u_3\rangle$ и w_0 имеют одинаковые особенности, но коэффициенты интенсивности у них различны. При $\nu = 0$ различие в коэффициентах интенсивности пропадает.

3. Теория пластин. Если тонкий параллелепипед рассматривать как пластину, то уравнения ее равновесия можно записать в общеизвестном виде [7]

$$\partial T_1/\partial x + \partial T_{21}/\partial y = 0,\ \partial T_{12}/\partial x + \partial T_2/\partial y = 0; \tag{3.1}$$

$$N_1 = \partial M_1/\partial x + \partial M_{21}/\partial y,\ N_2 = \partial M_2/\partial y + \partial M_{12}/\partial x,\ \partial N_1/\partial x + \partial N_2/\partial y = -p(x, y). \tag{3.2}$$

Соотношения упругости в теории простых пластин имеют вид [4]

$$T_1 = \frac{\nu h}{1-\nu} p(x, y) + \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),\ T_{12} = 2Gh\omega; \tag{3.3}$$

$$M_1 = \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)} p(x, y) + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2),\quad M_{12} = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)}(\tau_1 + \tau_2); \tag{3.4}$$

$$N_1 = 2Gh\Gamma_0\gamma_1. \tag{3.5}$$

Остальные пять соотношений получаются из выписанных заменой индексов $1 \rightleftarrows 2$.

Связь деформаций с перемещениями и поворотами дается формулами

$$\varepsilon_1 = \partial u/\partial x,\ \varepsilon_2 = \partial v/\partial y,\ \omega = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y; \tag{3.6}$$

$$\varkappa_1 = \partial\varphi_1/\partial x,\ \varkappa_2 = \partial\varphi_2/\partial y,\ \tau_1 + \tau_2 = \partial\varphi_2/\partial x + \partial\varphi_1/\partial y; \tag{3.7}$$

$$\gamma_1 = \varphi_1 + \partial w/\partial x,\ \gamma_2 = \varphi_2 + \partial w/\partial y, \tag{3.8}$$

где u, v, w — смещения частиц пластины; φ_1, φ_2 — углы поворота этих же частиц.

При принятии гипотезы Кирхгофа жесткость на поперечный сдвиг $Gh\Gamma_0$ следует устремить к бесконечности, тогда для конечности перерезывающих сил N_α ($\alpha = 1, 2$) необходимо, чтобы $\gamma_\alpha \to 0$:

$$\gamma_\alpha = 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\partial w/\partial x,\ \varphi_2 = -\partial w/\partial y. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.7), а (3.7) в (3.4), приходим к известным соотношениям А. Л. Гольденвейзера [8]. Однако смысл перемещений и поворотов в рассматриваемой теории простых пластин отличается от такового в традиционных версиях, а именно: верны соотношения

$$u = \langle u_1\rangle,\ v = \langle u_2\rangle,\ w = \langle u_3\rangle.$$

Углы поворота в пластине φ_α связаны со смещениями частиц трехмерной среды формулами

$$\varphi_\alpha(x, y) = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} u_\alpha(x, y, z)\, z dz\ (\alpha = 1, 2).$$

Краевые условия, соответствующие условиям (2.1), в теории пластин имеют вид

$$v = w = \varphi_2 = 0,\ T_1 = M_1 = 0 \text{ при } x = 0,\ a; \tag{3.10}$$

$$u = w = \varphi_1 = 0,\ T_2 = M_2 = 0 \text{ при } y = 0,\ b. \tag{3.11}$$

Краевая задача (3.1)—(3.8), (3.10), (3.11) допускает очевидное решение, которое приведем здесь без вывода:

$$u = \frac{\nu}{4G}\frac{\partial\varphi_p}{\partial x},\quad \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\varphi_p}{4Gh} - \varphi_0\right); \tag{3.12}$$

$$w = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh}\left(\frac{1}{\Gamma_0} - \frac{\nu}{2}\right)\varphi_p(x, y); \tag{3.13}$$

$$T_1 = -\nu h\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial y^2},\quad T_{12} = \nu h\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x\partial y},\quad N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_0); \tag{3.14}$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right) - \frac{\nu h^2}{3}\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial y^2}; \tag{3.15}$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} + \frac{\nu h^2}{3}\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x\partial y}. \tag{3.16}$$

Формулы для v, φ_2, T_2, N_2, M_2 получаются из формул для u, φ_1, T_1, N_1, M_1 заменой $\partial/\partial x \rightleftarrows \partial/\partial y$. В этих выражениях функции $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_p(x, y)$ имеют тот же смысл, что и в п. 2.

Решение по теории Кирхгофа получается из (3.12)—(3.16), если принять $\varphi_p(x, y) \equiv 0$. Решение по теории Э. Рейснера имеет вид

$$w = \varphi_0(x, y) + (3/5Gh)\varphi_p(x, y),\ u = v = 0. \tag{3.17}$$

Решение по теории Гольденвейзера получается из (3.12)—(3.16) при $\Gamma_0 = \infty$.

Обсуждение. Сравнивая результаты двумерной теории типа Тимошенко (3.12)—(3.16) со следствиями трехмерной теории (2.11), (2.12), (2.15)—(2.19), видим, что все величины совпадают с точностью до порядка $O(h^2)$, если нагрузка $p(x, y)$ — гладкая функция.

Таким образом, в случае гладкой нагрузки теории Кирхгофа, типа Тимошенко и трехмерная теория для тонких пластин дают одинаковые выражения для нормального прогиба, моментов и перерезывающих сил.

Если же нагрузка имеет вид (2.3), то положение в корне изменяется. В этом случае, как уже указывалось, функция $\varphi_p(x, y)$ имеет логарифмическую особенность и пренебрегать слагаемыми, содержащими $\varphi_p(x, y)$, нельзя. Сравнивая (2.11), (2.12), (3.13), видим, что при $h \to 0$ $\langle u_3 \rangle$, w_0, w имеют одинаковую особенность типа $\ln r_0$, что же касается коэффициентов интенсивности, то тут совпадение зависит от значения коэффициента сдвига Γ_0. Если $\Gamma_0 = 5/(6 - \nu)$, то двумерная теория дает коэффициент интенсивности такой же, как у осредненного по толщине решения трехмерной теории $\langle u_3 \rangle$. Смещение же срединной поверхности w_0 имеет другой коэффициент интенсивности. Кроме того, при $h \neq 0$ смещение срединной поверхности (2.10) вообще не имеет особенности.

Интересно отметить, что по теории Э. Рейснера $\Gamma_0 = 5/6$ и при $\nu = 0$ выражение для нормального прогиба (3.17) совпадает со следствием трехмерной теории, а при $\nu \neq 0$ не совпадает. Кроме того, различны выражения для тангенциальных перемещений, но они играют второстепенную роль.

Решение по теории Гольденвейзера содержит ту же особенность, что и осредненное решение по трехмерной теории, но они различаются коэффициентами интенсивности.

Таким образом, если отождествлять решение по двумерной теории типа Тимошенко с осредненным по толщине решением трехмерной теории, то при $\Gamma_0 = 5/(6 - \nu)$ получаем достаточно хорошее совпадение результатов как в качественном, так и в количественном отношении (они имеют одинаковую особенность и одинаковые коэффициенты интенсивности). Если же отождествлять прогиб двумерной теории со смещением срединной поверхности, то при $h \neq 0$ получаем качественное различие результатов, так как смещение срединной поверхности не имеет особенности, а при $h \to 0$ особенности будут одного вида, но коэффициенты интенсивности различны.

Следует отметить также, что теория Кирхгофа дает результат, качественно отличающийся от следствий трехмерной теории, поскольку по теории Кирхгофа прогиб ограничен.

Сравнивая выражения для перерезывающих сил (2.17), (3.14), видим, что они совпадают точно. Причем, поскольку в выражения для перерезывающих сил входит не сама функция $\varphi_0(x, y)$, а лишь ее лапласиан $\Delta\varphi_0$, ряды, представляющие перерезывающие силы, можно просуммировать с помощью эллиптических функций [9].

Так как пластина прямоугольная, то в случае свободного опирания на контуре должно выполняться условие $\Delta\varphi_0|_L = 0$.

Решая уравнение (2.13) относительно $\Delta\varphi_0$, получаем

$$\Delta\varphi_0(x, y) = -\frac{1}{D}\int_0^a\int_0^b K(x, y; \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{3.18}$$

где $K(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина уравнения Лапласа. Она в свою очередь может быть представлена [6]

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\ln|f(z)| = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\ln f(z), \tag{3.19}$$

где $f(z)$ — функция комплексного переменного, отображающая прямоугольник плоскости $z = x + iy$ на единичный круг плоскости $\zeta = \xi + i\eta$.

Известно [10], что такой функцией является

$$f(z) = \frac{\sigma(z - \zeta)\,\sigma(z + \zeta)}{\sigma(z - \bar{\zeta})\,\sigma(z + \bar{\zeta})},\quad z = x + iy,\quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где $\sigma(U)$ — сигма-функция Вейерштрасса с полупериодами $\omega_1 = a$, $\omega_2 = ib$.

Выражая сигма-функцию через тэта-функцию [11] и учитывая (3.18), (3.19), получаем для случая нагружения пластины сосредоточенной силой

$$\Delta\varphi_0(x, y) = -\frac{P}{D} K(x, y; \xi, \eta) = \frac{P}{2\pi D} \operatorname{Re} \ln \frac{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)\theta_1\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)},$$

где P — интенсивность сосредоточенной силы; (ξ, η) — точка приложения сосредоточенной силы.

Из (3.14) выражение для перерезывающей силы имеет вид

$$(3.20)\qquad N_1 = -\frac{P}{4\pi a} \operatorname{Re}\left[\frac{\theta_1'\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)} + \frac{\theta_1'\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)} - \frac{\theta_1'\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)} - \frac{\theta_1'\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)}\right].$$

Функция $\theta_1(v)$ имеет нули в точках $v = m + nbi/a$, где m и n — целые числа. Следовательно, функции, входящие в знаменатели (3.20), будут иметь нули в точках

$$z = +\zeta + 2am + 2bni,\ z = +\bar\zeta + 2am + 2bni.$$

Но в прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$. $0 \leqslant y \leqslant b$ попадает лишь одна точка $z = \zeta$ — точка приложения сосредоточенной силы. Таким образом, выражение для перерезывающей силы (3.20) будет везде ограничено, за исключением точки приложения сосредоточенной силы.

Поступила 18 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кильчевский Н. А., Издебская Г. А., Киселевская Л. М.** Лекции по аналитической механике оболочек. Киев: Вища школа, 1974.
2. **Zhilin P. A.** Mechanics of deformable directed surfaces.— Int. J. Solids and Structures, 1976, vol. 12, p. 635.
3. **Жилин П. А.** Теория упругих простых оболочек.— В кн.: V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике. Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981.
4. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек.— Труды Ленингр. политехн. ин-та, 1982, № 386.
5. **Галеркин Б. Г.** Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу.— ДАН СССР, 1931, № 10.
6. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
7. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
8. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
9. **Джанелидзе Г. Ю.** Определение перерезывающих сил при изгибе опертых тонких пластин.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
10. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.: Наука, 1974.
11. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.

УДК 539.374

ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ПРАНДТЛЯ О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

С. И. СЕНАШОВ

(*Красноярск*)

В работе найдены новые поля скоростей для известного решения Прандтля.

Система уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности с условием текучести Мизеса имеет вид

$$(1)\qquad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0;$$

$$(2)\qquad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2;$$

$$(3)\qquad 2\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - (\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$