ПМТФ, № 1, 1972

УДК 536.22+536.252

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ОТ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ В ПАРОВОЙ СРЕДЕ

О. В. Воинов, А. М. Головин, А. Г. Петров

(*Москва*)

Рассматривается распределение температуры вокруг испаряющейся капли в паровой среде. Перенос энергии осуществляется молекулярной теплопроводностью, конвекцией и излучением. Средняя длина свободного пробега излучения существенно превышает характерное расстояние, на котором изменяется температура. Получены времена релаксации температуры к стационарному значению и характерные расстояния, на которых изменяется распределение температуры.

1. Основные уравнения. Перенос энергии конвекцией, молекулярной теплопроводностью и излучением, как известно [1,2], описывается уравнениями

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial r}-S\right) \qquad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)S=\alpha c\,(U_p-U),\quad v=\frac{\rho_a v_a a^2}{\rho r^2},\quad U_p=\frac{4\sigma}{c}T^4$$

Здесь r — расстояние до центра капли; t— время; ρ, c_p, v — плотность, теплоемкость, радиальная компонента скорости паровой среды; a — радиус капли; индексом a отмечены величины, относящиеся к поверхности капли; T, $\varkappa$ — температура и молекулярная теплопроводность; $1/\alpha$ — средняя длина свободного пробега излучения; σ — постоянная Стефана — Больцмана; c — скорость света. Последнее уравнение оправдано при локальном термодинамическом равновесии, исследование условий применимости которого содержится в работе [3].

Плотность лучистой энергии U и радиальная компонента плотности потока лучистой энергии S связаны с интенсивностью излучения $I\,(r,\theta)$ следующим образом:

$$U=\frac{2\pi}{c}\int_0^\pi I\sin\theta\,d\theta,\qquad S=2\pi\int_0^\pi I\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

Интенсивность излучения вдали от капли $I_\infty=(\sigma/\pi)\,T_\infty^4$ определяется температурой среды, т. е. T_∞.

Предполагается, что характерное расстояние r_0, на котором устанавливается температура T_∞, удовлетворяет условию $\alpha r_0\ll 1$. В этом случае интенсивность излучения с точностью до членов порядка αr_0 равна

$$I\,(r,\ \theta)=I\,(a,\ \theta)\quad \text{при}\ \ \theta\leqslant\arcsin a/r$$

$$I\,(r,\theta)=\frac{\sigma}{\pi}T_\infty^4\quad \text{при}\ \ \arcsin\frac{a}{r}<\theta\leqslant\pi$$

$$I\,(a,\theta)=\varepsilon\,(\sigma/\pi)\,T_a^4+(1-\varepsilon)\,(\sigma/\pi)\,T_\infty^4$$

Здесь ε — эффективная степень черноты. Отсюда следует, что

$$U=\frac{4\sigma}{c}T_\infty^4+\frac{2\varepsilon\sigma}{c}(T_a^4-T_\infty^4)\left[1-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right] \qquad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) можно получить уравнение, описывающее распределение температуры вокруг капли

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_a c_p v_a \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \varkappa \frac{\partial T}{\partial r} - 4\alpha\sigma (T^4 - T_\infty{}^4) + \tag{1.3}$$
$$+ 2\varepsilon\alpha\sigma (T_a{}^4 - T_\infty{}^4)\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right]$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$T(r, 0) = T_\infty, \quad r > a; \quad T(a, t) = T_a, \quad t > 0$$
$$T(r, t) \to T_\infty \quad \text{при } r \to \infty \tag{1.4}$$

Сформулированная задача оказывается незамкнутой, так как скорость пара на поверхности капли и температура ее поверхности, вообще говоря, зависят от распределения температуры внутри капли. Однако ниже рассматриваются такие режимы испарения капли, что характерные времена изменения скорости пара, радиуса капли и температуры на ее поверхности существенно превышают время релаксации температуры в паре. В этом случае при расчете распределения температуры вокруг капли можно не учитывать нестационарность процесса, связанную с изменением величин a, T_a, v_a.

Если $|T_a - T_\infty| \ll T_\infty$, то в уравнении (1.3) можно не учитывать зависимость ρ, c_p, $\varkappa$ от температуры и линеаризовать это уравнение по T. Тогда

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Pa}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{T - T_*}{\mu^2} \tag{1.5}$$

$$T_* = T_\infty + \frac{\varepsilon}{2}(T_a - T_\infty)\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$P = \frac{v_a a}{\chi}, \quad \chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}, \quad \mu^2 = \frac{\varkappa}{16\alpha\sigma T_\infty{}^3}$$

Отсюда видно, что характерное расстояние, на котором меняется температура, определяется величинами a, Pa, μ, наибольшая из которых, как предполагалось при выводе этого уравнения, должна быть пренебрежимо малой по сравнению с $1/\alpha$.

Известно [4], что температура при лучистом переносе энергии испытывает скачок на сфере. Молекулярная теплопроводность приводит к сглаживанию этого скачка. Ниже показано, что конвективный перенос энергии также устраняет скачок температуры.

Пусть температура резко изменяется в тонком слое $r - a \sim \delta \ll a$ вблизи поверхности сферы.

Стационарное распределение температуры в этом слое, как следует из уравнения (1.5), имеет вид

$$\frac{T - T_*(a)}{T_a - T_*(a)} = \exp\left(-\frac{r-a}{\delta}\right), \qquad \delta = \frac{\mu^2 P}{2a}\left[1 + \left(1 + \frac{4a^2}{\mu^2 P^2}\right)^{1/2}\right]$$

Таким образом, в отсутствие конвекции $\delta = \mu$. При больших числах Пекле ($P^2 \gg 4a^2/\mu^2$) толщина теплового пограничного слоя существенно возрастает $\delta = \mu^2 P/a$ и оказывается независящей от величины коэффициента молекулярной теплопроводности.

2. Молекулярная теплопроводность и конвекция. Если температура среды такова, что $\mu \gg a$, $\mu \gg Pa$ ($\alpha\mu \ll 1$), то распределение температуры, как видно из уравнения (1.5), определяется молекулярной теплопроводностью и конвекцией. В этом случае, как известно [5], можно получить стационарное решение и без предположения о малом перепаде температур между поверхностью капли и бесконечностью.

При $|T_a - T_\infty| \ll T_\infty$ распределение температуры описывается уравнением

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Pa}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial T}{\partial r} \tag{2.1}$$

стационарное решение которого имеет вид

$$\overline{T} = \frac{1 - \exp(-Pa/r)}{1 - e^{-P}}, \qquad \overline{T} = \frac{T - T_\infty}{T_a - T_\infty} \tag{2.2}$$

При больших числах Пекле тепловой поток является экспоненциально малой величиной. Вдали от сферы ($r > Pa$) распределение температуры имеет тот же вид, что и в отсутствие конвекции вокруг сферы с эффективным радиусом a_*

$$\overline{T} = a_*/r, \qquad a_* = Pa/(1 - e^{-P}) \tag{2.3}$$

Если пренебречь конвективным переносом тепла, то, как известно

$$\overline{T} = \frac{a}{r}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\chi t}}\right), \qquad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \exp(-t^2)\,dt \tag{2.4}$$

Это решение представляет собой произведение стационарного распределения температуры, определяемого молекулярной теплопроводностью, на функцию, описывающую скорость распространения фронта тепловой волны. По аналогии с (2.4) можно предположить, что функция

$$\overline{T} = \frac{1 - \exp(-Pa/r)}{1 - e^{-P}}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\chi t}}\right)$$

будет мало отличаться от точного решения уравнения (1.4) при $\mu \gg a$, $\mu \gg Pa$.

Действительно, если функцию

$$\overline{T} = \Phi(r)\Psi(r, t)$$

$$\left(P\frac{a}{r^2}\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr}, \quad \frac{1}{\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\right)$$

подставить в исходное уравнение (2.1), то можно получить

$$\Phi\left(\frac{1}{\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\right) + \Psi\left(\frac{Pa}{r^2}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{d\Phi}{dr} + \frac{\Phi}{r}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{Pa}{r^2}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} \sim \frac{\Psi}{t}, \quad \frac{d\Phi}{dr} \sim \frac{Pa\Phi}{r^2}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial r} \sim \frac{\Psi}{\sqrt{\chi t}}$$

видно, что функция $\Phi\Psi$ удовлетворяет исходному уравнению, когда выполняется какое-либо из условий

$$r^2 \gg Pa\sqrt{\chi t}, \quad r^2 \ll Pa\sqrt{\chi t}, \quad r \gg Pa$$

Таким образом, время релаксации температуры в области $r \sim Pa$ — величина порядка P^2a^2/χ.

3. Молекулярная теплопроводность и излучение. При малых числах Пекле ($P \ll 1$) в уравнении (1.5) можно пренебречь конвективным переносом энергии

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial rT}{\partial t} = \frac{\partial^2 rT}{\partial r^2} = -\frac{r(T - T_*)}{\mu^2} \tag{3.1}$$

Решение этого уравнения с граничными и начальным условиями (1.4) имеет вид

$$r(T - T_\infty) = a(T_a - T_\infty)G(r - a, t) + \tag{3.2}$$

$$+\int_a^\infty \frac{r'}{2\mu}[T_*(r') - T_\infty][G(|r - r'|, t) - G(r + r' - 2a, t)]\,dr'$$

$$G(r, t) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\chi t}} - \frac{\sqrt{\chi t}}{\mu}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\chi t}} + \frac{\sqrt{\chi t}}{\mu}\right)\right] \tag{3.3}$$

Стационарное решение описывается той же формулой (3.2), но с заменой $G(r, t)$ на функцию

$$G(r) = \exp(-r/\mu)$$

Как видно из формулы (3.3), в области $r \ll \mu$ существуют два характерных времени изменения температуры: на малых временах — r^2/χ, на больших — μ^2/χ. В области $r \gtrsim \mu$ стационарное распределение температуры устанавливается за время $t \sim \mu r/\chi$.

Пусть $\mu \gg a$, тогда при $t > \mu^2/\chi$ с точностью до членов, порядок величины которых в соответствии с формулой (3.2) не превышает $\varepsilon(a/\mu) \ln(\mu/a)$, распределение температуры имеет вид

$$\bar{T} = \frac{a}{r}\exp\left(-\frac{r - a}{\mu}\right) \tag{3.4}$$

Молекулярная теплопроводность оказывается существенной в слое толщиной μ.

Эти результаты совпадают с полученными ранее [6,7].

Если при наличии конвекции выполнено условие $Pa \ll \mu$, то в области $Pa < r < \mu$, где существенна только молекулярная теплопроводность, применимы как формула (2.2), так и (3.4).

В результате асимптотического сращивания получается следующее распределение температуры:

$$\bar{T} = \frac{1 - \exp(-Pa/r)}{1 - e^{-P}}\exp\left(-\frac{r - a}{\mu}\right)$$

4. Конвекция и излучение. Нестационарное распределение температуры в условиях преобладающего влияния конвективно-лучистого переноса энергии описывается уравнением

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Pa}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T}{\mu^2} = \frac{T_*}{\mu^2} \tag{4.1}$$

с начальным и граничным (при $r = a$) условиями (1.4).

Решение этого уравнения имеет вид

$$\overline{T} = \eta\left(t - \frac{r^3 - a^3}{3Pa\chi}\right)\exp\left(-\frac{r^3 - a^2}{3\mu^2 Pa}\right) +$$

$$+\int_a^r \frac{r'^2}{\mu^2 Pa}\,\frac{T_*(r') - T_\infty}{T_a - T_\infty}\,\eta\left(t - \frac{r^3 - r'^3}{3Pa\chi}\right)\exp\left(-\frac{r^3 - r'^3}{3\mu^2 Pa}\right)dr'$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Область применимости этого уравнения соответствует допущению, что расстояния, на которые расплывается тепловой фронт за счет молекулярной теплопроводности, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием, пройденным фронтом за то же время, т. е.

$$(\chi t)^{1/2} \ll (Pa\chi t)^{1/3}$$

Лучистое равновесие устанавливается в области $r^3 \sim 3\mu^2 Pa$ за время $t \sim \mu^2 / \chi$.

Как видно из полученного решения, на достаточно больших временах это неравенство не может выполняться.

Стационарное распределение температуры

$$T = T_a \exp\left(-\frac{r^3 - a^3}{3\mu^2 Pa}\right) + \int_a^r \frac{r'^2 T_*(r')]}{\mu^2 Pa}\exp\left(-\frac{r^3 - r'^3}{3\mu^2 Pa}\right)dr'$$

отличается от вычисленного в приближении лучистого равновесия лишь в области $r^3 - a^3 \lesssim 3\mu^2 Pa$.

Как показывают оценки, при $\mu \gg a$ переносом энергии посредством молекулярной теплопроводности можно пренебречь, если $\mu \ll Pa$. В этом случае переход к лучистому равновесию $r^3 \sim \mu^2 Pa$ происходит в области $r \ll Pa$.

При $\mu \ll a$, как показано в п. 1, можно не учитывать молекулярную теплопроводность в уравнении (1.5) при $P^2 \gg 4a^2 / \mu^2$.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение полученных результатов.

Поступила 28 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
3. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. М., «Мир», 1969.
4. Кузнецов Е. С. Лучистое равновесие газовой оболочки, окружающей абсолютно черную сферу. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1951, № 3.
5. Вильямс Ф. А. Теория горения. М., «Наука», 1971.
6. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Перенос энергии от излучающей сферы в среде с молекулярной теплопроводностью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
7. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Нестационарный перенос энергии от излучающей сферы в среде с молекулярной теплопроводностью. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.