ПМТФ, № 1, 1971

ГИДРОМАГНИТНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

В. П. Милантьев

(Москва)

Для бесстолкновительной плазмы получены общие гидромагнитные уравнения, отвечающие упорядочению (1.2), с учетом «магнитной вязкости» и теплопроводности. Эти уравнения оказываются незамкнутыми, так как они содержат четвертые моменты. Вычисляя эти моменты, например, по методу Града, можно замкнуть полученную систему уравнений. Приведена также система уравнений двухмерной теории.

Вид макроскопических уравнений разреженной плазмы в магнитном поле сильно зависит от процедуры упорядочения физических величин. Известны упорядочение Чу, Гольдбергера и Лоу (ЧГЛ) [1-4] упорядочение теории конечного ларморовского радиуса [5-7], упорядочение низкой плотности [8] и др. Для получения гидромагнитных уравнений часто используют соответствующее разложение функции распределения [1,3,7,9]. Однако представляется более простым метод непосредственного использования бесконечной цепочки моментных уравнений [4]. Очень близок к этому методу модифицированный метод моментов Града [10-12], который, однако, имеет ряд недостатков.

1. В работе [3] был получен замкнутый ряд макроскопических уравнений при упорядочении ЧГЛ

$$\frac{\omega}{\Omega} \sim \frac{a}{L} \sim \frac{\omega}{\omega_p} \sim \frac{\lambda_D}{L} \sim \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

Здесь Ω, ω_p — циклотронная и плазменная частоты, ω — характерная частота макроизменений, a, λ_D — ларморовский радиус и дебаевская длина, L — характерная макродлина. Упорядочение (1.1) означает, что $\Omega \sim \omega_p$. Однако во многих практически важных случаях $\Omega \ll \omega_p$. Целью данной работы является вывод гидромагнитных уравнений бесстолкновительной плазмы при упорядочении

$$\omega/\Omega \sim a/L \sim \varepsilon \ll 1, \quad \Omega/\omega_p \sim \lambda_D/a \sim \mu \ll 1 \tag{1.2}$$

Искомые уравнения получаются непосредственно из бесконечной цепочки моментных уравнений путем разложения всех величин в ряд по малым параметрам ε и μ, которые считаются независимыми.

Подобное двухпараметрическое разложение было использовано в [9], где были получены уравнения низшего приближения по параметрам ε и β (β — отношение материального давления к магнитному). В противоположность такому разложению упорядочение (1.2) дает возможность, например, исследовать зависимость устойчивости плазмы от β. Как известно [1,2], разложение ЧГЛ не приводит к замкнутой системе уравнений, так как в эти уравнения входит вектор теплового потока (третий момент) вдоль магнитного поля. Для определения продольного теплового потока требуется знание четвертых моментов. Для определения последних нужны пятые моменты и т. д. Эту трудность обычно устраняют тем, что пренебрегают продольными потоками тепла [3, 9], или рассматривают так называемую двухмерную теорию [3]. В этих случаях получается замкнутая система уравнений, пригодная для физических приложений.

2. За исходную систему уравнений принимается цепочка моментных уравнений, получающихся стандартным образом из кинетического уравнения Власова, и система уравнений Максвелла (см. [4]). В этих уравнениях независимыми переменными являются (в стандартных обозначениях)

$$\mathbf{E},\ \mathbf{B},\ \rho,\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{R},\ \ldots$$

Вместо них удобно ввести следующие переменные:

$$\mathbf{V},\ E_{\parallel},\ B,\ \mathbf{e}_1,\ \rho,\ \mathbf{u}_{\perp},\ u_{\parallel},\ p_{\perp},\ p_{\parallel},\ \sigma_{\alpha\beta},\ Q_{\alpha\beta\gamma},\ \ldots \tag{2.1}$$

Здесь

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{B}/B,\quad A_{\parallel} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - A_{\parallel}\mathbf{e}_1$$

$\mathbf{V} = \frac{c}{B}[\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{e}_1]$ — скорость электрического дрейфа, $p_{\parallel} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \boldsymbol{P} \equiv P_{11}$ — «продольное» давление, $p_{\perp} = {}^1/_2(\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) : \boldsymbol{P} \equiv {}^1/_2(P_{22} + P_{33})$ — «поперечное» давление, $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор, $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений, обладающий свойствами $\sigma_{11} = 0$, $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma} = 0$, $Q_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta : (\mathbf{e}_\gamma\cdot\boldsymbol{Q})$ — проекции тензора потоков тепла $\boldsymbol{Q}$ на координатные оси локальной системы координат, образованной правой тройкой единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (α, β, γ принимают значения 1, 2, 3).

В терминах переменных (2.1) исходная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho(\mathbf{u}_{\perp} + u_{\parallel}\mathbf{e}_1) = 0 \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\parallel} + \frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{P})_{\parallel} - \frac{e}{m}E_{\parallel} = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{V} = \frac{1}{\Omega}\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{P}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \boldsymbol{P}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} + [\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{u}]^s = \Omega\,[\boldsymbol{P}\times\mathbf{e}_1]^s \tag{2.5}$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = -2p_{\perp}\nabla\cdot\mathbf{u} + p_{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{Q}) + \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}) : \nabla\mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \frac{d}{dt}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \tag{2.6}$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = -p_{\parallel}\nabla\cdot\mathbf{u} - 2p_{\parallel}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{u} - 2\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}) : \nabla\mathbf{u} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : (\nabla\cdot\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d}{dt}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \tag{2.7}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} + \boldsymbol{Q}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\boldsymbol{R} + [\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\mathbf{u}]^s - \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{P}\nabla\cdot\boldsymbol{P}]^s = \Omega\,[\boldsymbol{Q}\times\mathbf{e}_1]^s \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}2q_{\parallel}^{\parallel} + 2q_{\parallel}^{\parallel}\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : (\mathbf{e}_1\nabla : \boldsymbol{R}) + 6q_{\parallel}^{\parallel}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{u} =$$
$$= \frac{3p_{\parallel}}{\rho}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1\} \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}2q_{\parallel}^{\perp} + 4q_{\parallel}^{\perp}\nabla\cdot\mathbf{u} + (\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_1\nabla : \boldsymbol{R}) = \frac{2p_{\perp}}{\rho}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1\} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\cdot B\mathbf{V} + B\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{V} - cE_{\parallel}\mathbf{e}_1\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{e}_1 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} = -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{V}) + \mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{e}_1 - \frac{c}{B}\{E_\parallel \operatorname{rot}_\perp \mathbf{e}_1 + [\nabla E_\parallel \mathbf{e}_1]\} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial E_\parallel}{\partial t} = -4\pi j_\parallel + cB\,\mathbf{e}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{e}_1 +$$
$$+\frac{B}{c}\mathbf{V}\cdot[\mathbf{e}_1\{\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{V}\}] - E_\parallel \mathbf{V}\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1 + \mathbf{V}\cdot\nabla E_\parallel \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right)_\perp = -\frac{c^2}{B}\nabla_\perp B + \left\{c^2 + \left(c\frac{E_\parallel}{B}\right)^2\right\}\mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{e}_1 + \frac{4\pi c}{B}[\mathbf{e}_1\mathbf{j}] - c^2\frac{E_\parallel}{B^2}\nabla_\perp E_\parallel -$$
$$-\mathbf{V}\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{V} - \frac{1}{B}\nabla\cdot B\mathbf{V} - \frac{cE_\parallel}{B}\mathbf{e}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{e}_1\right) + \frac{cE_\parallel}{B}[\mathbf{e}_1\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{e}_1\}] \quad (2.14)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\cdot\nabla\ln B = 0 \quad (2.15)$$

$$E_\parallel\nabla\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\cdot\nabla E_\parallel + \frac{B}{c}(\mathbf{V}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{V}) + \frac{1}{c}[\mathbf{e}_1\mathbf{V}]\cdot\nabla B = 4\pi\sigma \quad (2.16)$$

В уравнениях опущены индексы a, нумерующие сорт частиц

$$\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \mathbf{u}_a, \quad \sigma = \sum_a e_a n_a, \quad \Omega = \frac{eB}{mc}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla, \quad \nabla_\perp = \nabla - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\cdot\nabla$$

Сокращение $[\ldots]^s$ означает сумму членов, получающихся циклической перестановкой индексов; $\mathbf{ab} : \mathbf{cd}$ — двойное скалярное произведение диад $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{cd}$; $\mathbf{q}^\parallel$, $\mathbf{q}^\perp$ — потоки параллельной и поперечной тепловой энергии соответственно

$$\mathbf{q}^\parallel = {}^1/_2 \boldsymbol{Q} : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}^\perp = {}^1/_2 \boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{q} = {}^1/_2 \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{I}$$

Записывая теперь уравнения в безразмерной форме с помощью характерных масштабов (длины L, времени T, тепловой скорости v_T и т. д.) и представляя все величины в виде разложения в двойной ряд по ε и μ, можно получить уравнения последовательных приближений.

3. В нулевом приближении тензоры $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ удовлетворяют соотношениям вида

$$[\boldsymbol{A}\times\mathbf{e}_1]^s = 0 \quad (3.1)$$

Из этих соотношений следует, что в нулевом приближении

$$\boldsymbol{P} = p_\parallel \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + p_\perp(\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1), \quad \sigma = 0 \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{Q} = (2q_\parallel^\parallel - 3q_\parallel^\perp)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + q_\parallel^\perp[\mathbf{e}_1\boldsymbol{I}]^s \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{R} = (R_1 - 6R_2 + {}^3/_4 R_3)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + (R_2 - {}^1/_4 R_3)[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\boldsymbol{I}]^s + {}^1/_4 R_3[\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}]^s \quad (3.4)$$

где $R_1 = m\langle c_\parallel^4\rangle$, $R_2 = \frac{m}{2}\langle c_\parallel^2 c_\perp^2\rangle$, $R_3 = \frac{m}{2}\langle c_\perp^4\rangle$, $\mathbf{c}$ — хаотическая скорость частиц, $\langle\cdots\rangle$ означает статистическое усреднение.

Далее, из уравнений (2.3) и (2.4) видно, что в нулевом приближении продольное электрическое поле отсутствует $E_\parallel = 0$, а поперечная скорость частиц совпадает со скоростью электрического дрейфа

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{V} \quad (3.5)$$

Чтобы получить уравнение эволюции продольной скорости $u_{\parallel}$, надо рассмотреть первое приближение по ε в уравнении (2.3)

$$\frac{\partial u_{\parallel}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla u_{\parallel} + u_{\parallel}\mathbf{e}_1\cdot\nabla u_{\parallel} - \mathbf{V}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_1\mathbf{V}:\nabla\mathbf{V} + u_{\parallel}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1\} = \frac{e}{m}E_{\parallel}^{(1)} \tag{3.6}$$

Далее, в нулевом приближении

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho(\mathbf{V} + u_{\parallel}\mathbf{e}_1) = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{d_0 p_{\perp}}{dt} = -2p_{\perp}\nabla\cdot\mathbf{u} + p_{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u} - 2q_{\parallel}^{\perp}\nabla\cdot\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\cdot\nabla q_{\parallel}^{\perp} \tag{3.8}$$

$$\frac{d_0 p_{\parallel}}{dt} = -p_{\parallel}\nabla\cdot\mathbf{u} - 2p_{\parallel}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u} - 2(q_{\parallel}^{\parallel} - q_{\parallel}^{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1\cdot\nabla q_{\parallel}^{\parallel} \tag{3.9}$$

$$\frac{d_0}{dt}2q_{\parallel}^{\parallel} + 2q_{\parallel}^{\parallel}(\nabla\cdot\mathbf{u} + 3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{e}_1\cdot\nabla R_1 + (R_1 - 3R_2)\nabla\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{3p_{\parallel}}{\rho}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1\} \tag{3.10}$$

$$\frac{d_0 2q_{\parallel}^{\perp}}{dt} + 4q_{\parallel}^{\perp}\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{e}_1\cdot\nabla R_2 + (4R_2 - R_3)\nabla\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{2p_{\perp}}{\rho}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\nabla\cdot\mathbf{e}_1\} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\cdot B\,\mathbf{V} + B\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{V} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial t} = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{V} + \mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{e}_1 \tag{3.13}$$

где

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{u}_{\parallel}\mathbf{e}_1)\cdot\nabla$$

К этой системе должны быть добавлены еще уравнения для $E_{\parallel}^{(1)}$ и $\mathbf{V}$, которые, вообще говоря, надо получить из (2.13) и (2.14). Однако в эти уравнения входят токи первого приближения по ε, для нахождения которых надо иметь уравнения для $\mathbf{u}$ первого приближения с электрическим полем и токами второго приближения и т. д. Можно обойти эту трудность (ср. с [3]). Из общего уравнения для $\mathbf{u}$ следует

$$E_{\parallel}\sum_a\frac{e_a^2 n_a}{m_a} = \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial t} + \sum_a e_a u_{\parallel a}\nabla\cdot n_a\mathbf{u}_a - \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial t} + \sum_a\frac{e_a}{m_a}\mathbf{e}_1\nabla:\boldsymbol{P}_a \tag{3.14}$$

Отсюда в первом приближении по ε и нулевом по μ

$$E_{\parallel}^{(1,0)}\sum_a\frac{e_a^2 n_a^{(0,0)}}{m_a} = \sum_a e_a\left\{u_{\parallel a}\nabla n_a\mathbf{u}_a + \frac{1}{m_a}[\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_{\parallel a} + (p_{\parallel a} - p_{\perp a})\nabla\cdot\mathbf{e}_1]\right\}^{(0,0)} \tag{3.15}$$

поскольку, как вытекает из уравнений (2.13), (2.14)

$$j_{\parallel}^{(0,0)} = j_{\parallel}^{(1,0)} = j_{\parallel}^{(0,1)} = j_{\parallel}^{(0,2)} = j_{\parallel}^{(1,1)} = 0$$

$$j_{\perp}^{(0,0)} = j_{\perp}^{(1,0)} = j_{\perp}^{(0,1)} = j_{\perp}^{(0,2)} = j_{\perp}^{(1,1)} = 0$$

Теперь из общего уравнения для u легко получить

$$\sum_a \left(\rho_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_a\right) = \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{c}[j\mathbf{B}]$$

Правая часть преобразуется стандартным образом при помощи уравнений Максвелла, после чего уравнение принимает вид

$$\sum_a \left\{\rho_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_a + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_a\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left\{\mathbf{EE} + \mathbf{BB} - \frac{1}{2}(E^2 + \mathbf{B}^2)\,\boldsymbol{I}\right\} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}_\perp \mathbf{B}] \qquad (3.16)$$

Отсюда следует уравнение нулевого приближения для $\mathbf{V}$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)\mathbf{V} + \rho \mathbf{e}_1 \mathbf{V} \mathbf{e}_1 : \nabla \mathbf{V} + \sum_a \rho_a \{2u_{\parallel a} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \mathbf{V} - 2u_{\parallel a} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 : \nabla \mathbf{V} +$$

$$+ u_{\parallel a}^2 \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \mathbf{e}_1\} = \mathbf{e}_1 E_{\parallel}^{(1,0)} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a + \sum_a \{(\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \nabla p_{\perp a} +$$

$$+ (p_{\parallel a} - p_{\perp a})\, \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \mathbf{e}_1\} = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot B^2 \left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\right) \qquad (3.17)$$

где $\rho = \sum\limits_a \rho_a$.

Уравнения (3.5) — (3.13), (3.15), (3.17) являются искомыми уравнениями нулевого приближения. Однако они не представляют собой замкнутой системы, поскольку в них входят неизвестные моменты четвертого порядка $\boldsymbol{R}$. В принципе для $\boldsymbol{R}$ можно написать общее уравнение, но в него входят моменты пятого порядка и т. д. Полученную систему можно замкнуть, находя приближенное выражение для $\boldsymbol{R}$, например, по методу моментов Града [10–12]

$$\rho \boldsymbol{R} = [\{p_\perp (\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) + p_\parallel \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1\}\{p_\perp (\boldsymbol{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) + p_\parallel \mathbf{e}\mathbf{e}_1\}]^s$$

4. Рассмотрим теперь уравнения первого приближения по ε и нулевого по μ (опуская индекс 0, относящийся к разложению по μ). Уравнение непрерывности первого приближения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho (\mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel \mathbf{e}_1) = 0 \qquad (4.1)$$

Если ввести вектор $\mathbf{s}$ — «недостающую» компоненту поперечной скорости $\mathbf{u}_\perp \equiv \mathbf{V} + \mathbf{s}$, то согласно уравнению (2.4) в первом приближении

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\Omega}\left[\mathbf{e}_1 \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right]^{(0)} + \frac{1}{\Omega \rho^{(0)}} \{[\mathbf{e}_1 \nabla p_\perp] + (p_\parallel - p_\perp)[\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)\, \mathbf{e}_1]\}^{(0)} \qquad (4.2)$$

Вектор $\mathbf{s}$ включает в себя эффекты градиентного, центробежного и других дрейфовых движений частиц плазмы. Уравнение для $\mathbf{V}^{(1)}$ получается из общего уравнения (3.16)

$$\rho^{(0)} \frac{\partial \mathbf{V}^{(1)}}{\partial t} + \left\{\sum_a \rho_a \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\perp a}}{\partial t} + u_{\parallel a} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial u_{\parallel a}}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a\right)\right\}^{(1)} =$$

$$= \nabla \cdot \left\{\frac{B^2}{4\pi}\left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\right) - \boldsymbol{P}\right\}^{(1)} \qquad (4.3)$$

где $\boldsymbol{P} = \sum\limits_a \boldsymbol{P}_a$.

Далее следуют уравнения:

$$\frac{\partial u_\parallel^{(1)}}{\partial t} - \left(\mathbf{u}_\perp \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t}\right)^{(1)} + \left\{\mathbf{e}_1(\mathbf{V}+u_\parallel \mathbf{e}_1):\nabla\mathbf{u}_\perp + (\mathbf{V}+u_\parallel\mathbf{e}_1)\cdot\nabla u_\parallel + \mathbf{e}_1\mathbf{s}:\nabla\mathbf{V}\right\}^{(1)} +$$
$$+ \frac{1}{\rho^{(0)}}\left\{(\nabla\cdot\boldsymbol{P})_\parallel^{(1)} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}}(\nabla\cdot\boldsymbol{P})_\parallel^{(0)}\right\} = \frac{e}{m}E_\parallel^{(2)} \tag{4.4}$$

$$\frac{d_0 p_\perp^{(1)}}{dt} + \mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla p_\perp^{(0)} = \left\{-2p_\perp\nabla\cdot\mathbf{u} + p_\perp \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \frac12 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:(\nabla\cdot\boldsymbol{Q})\right\}^{(1)} -$$
$$- \boldsymbol{\sigma}^{(1)}:\nabla\mathbf{u}^{(0)} - \frac12\boldsymbol{\sigma}^{(1)}:\frac{d_0}{dt}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)^{(0)} \tag{4.5}$$

$$\frac{d_0 p_\parallel^{(1)}}{dt} + \mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla p_\parallel^{(0)} = \{-p_\parallel\nabla\cdot\mathbf{u} - 2p_\parallel \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:(\nabla\cdot\boldsymbol{Q})\}^{(1)} -$$
$$- 2\mathbf{e}_1^{(0)}(\mathbf{e}_1^{(0)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(1)}):\nabla\mathbf{u}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}:\frac{d_0}{dt}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)^{(0)} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1^{(1)}}{\partial t} = \{\mathbf{e}_1\cdot\nabla\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{V}\}^{(1)} - \frac{E_\parallel^{(1)}}{B}\operatorname{rot}_\perp \mathbf{e}_1^{(0)} = \frac{1}{B}[\mathbf{e}_1^{(0)}\nabla E_\parallel^{(1)}] \tag{4.7}$$

$$E_\parallel^{(2)}\sum_a \frac{e_a^2 n_a^{(0)}}{m_a} + E_\parallel^{(1)}\sum_a\frac{e_a^2 n_a^{(1)}}{m_a} = \sum_a e_a\left\{u_{\parallel a}\nabla\cdot n_a\mathbf{u}_a + \frac{1}{m_a}\mathbf{e}_1\nabla:\boldsymbol{P}_a\right\}^{(1)} \tag{4.8}$$

$$\rho^{(0)}\left\{\frac{d_0 2q_\parallel^{\parallel(1)}}{dt} + \mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla q_\parallel^{\parallel(0)} + [2q_\parallel^\parallel\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:(\mathbf{e}_1\nabla:\boldsymbol{R}) + 6q_\parallel^\parallel\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1:\nabla\mathbf{u}]^{(1)} -\right.$$
$$\left.- 3Q_{11\alpha}^{(1)}\left(\mathbf{e}_\alpha\cdot\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_\alpha:\nabla\mathbf{u}\right)^{(0)}\right\} +$$
$$+ 3\left(\frac{\rho^{(1)}p_\parallel^{(0)}}{\rho^{(0)}} - p_\parallel^{(1)}\right)\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_\parallel + (p_\parallel - p_\perp)\nabla\cdot\mathbf{e}_1\}^{(0)} =$$
$$= 3p_\parallel^{(0)}\{\mathbf{e}_\alpha\cdot\nabla P_{\alpha1} + P_{1\alpha}\nabla\cdot\mathbf{e}_\alpha + P_{\alpha\beta}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\alpha:\nabla\mathbf{e}_\beta\}^{(1)} \tag{4.9}$$

$$\rho^{(0)}\left\{\frac{d_0 2q_\parallel^{\perp(1)}}{dt} + 2\mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla q_\parallel^{\perp(0)} + [2q_\parallel^\perp(\boldsymbol{I}+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1):\nabla\mathbf{u} + (\boldsymbol{I}-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1):(\mathbf{e}_1\nabla:\boldsymbol{R}) +\right.$$
$$+ 2(Q_{122}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + Q_{133}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3):\nabla\mathbf{u}]^{(1)} + 3Q_{11\alpha}^{(1)}\mathbf{e}_\alpha\cdot\frac{d_0\mathbf{e}_1}{dt} -$$
$$- Q_{\alpha\alpha\beta}^{(1)}\mathbf{e}_\beta\cdot\frac{d_0\mathbf{e}_1}{dt} + [2Q_{112}^{(1)}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 2Q_{113}^{(1)}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + 2Q_{123}^{(1)}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) +$$
$$\left.+ (Q_{222}^{(1)} + Q_{233}^{(1)})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (Q_{223}^{(1)} + Q_{333}^{(1)})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3]:\nabla\mathbf{u}^{(0)}\right\} + \frac{2p_\perp^{(0)}\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}}\{\mathbf{e}_1\cdot\nabla p_\parallel +$$
$$+ (p_\parallel - p_\perp)\nabla\cdot\mathbf{e}_1\}^{(0)} = \{2P_{12}(\mathbf{e}_\alpha\cdot\nabla P_{2\alpha} + P_{2\alpha}\nabla\cdot\mathbf{e}_\alpha + P_{\alpha\beta}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_\beta:\nabla\mathbf{e}_\alpha) +$$
$$+ 2P_{13}(\mathbf{e}_\alpha\cdot\nabla P_{3\alpha} + P_{3\alpha}\nabla\cdot\mathbf{e}_\alpha + P_{\alpha\beta}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\beta:\nabla\mathbf{e}_\alpha) +$$
$$+ (P_{22}+P_{33})(\mathbf{e}_\alpha\cdot\nabla P_{\alpha1} + P_{1\alpha}\nabla\cdot\mathbf{e}_\alpha + P_{\alpha\beta}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\beta:\nabla\mathbf{e}_\alpha)\}^{(1)} \tag{4.10}$$

Теперь осталось определить тензоры $\boldsymbol{P}^{(1)}$ и $\boldsymbol{Q}^{(1)}$, которые описывают вязкость и теплопроводность бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле. Чтобы найти $\boldsymbol{P}^{(1)}$, надо воспользоваться первым приближением уравнения (2.5)

$$([\boldsymbol{P}\times\mathbf{e}_1]^s)^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \boldsymbol{P}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} + [\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{u}]^s\right)^{(0)}$$

Отсюда после скалярного умножения на соответствующие диады, составленные из единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, следуют формулы:

$$P_{13}^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\Big\{(p_{\parallel}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + p_{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) : \nabla\mathbf{u} + \tag{4.11}$$

$$+ (p_{\parallel} - p_{\perp})\left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_2\mathbf{u} : \nabla\mathbf{e}_1\right) + \mathbf{e}_2\cdot\nabla q_{\parallel}^{\perp} + 2\,(q_{\parallel}^{\parallel} - q_{\parallel}^{\perp})\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1\Big\}^{(0)}$$

$$P_{12}^{(1)} = -\frac{1}{\Omega}\Big\{(p_{\parallel}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + p_{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) : \nabla\mathbf{u} + \tag{4.12}$$

$$+ (p_{\parallel} - p_{\perp})\left(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_3\mathbf{u} : \nabla\mathbf{e}_1\right) + \mathbf{e}_3\cdot\nabla q_{\parallel}^{\perp} + 2\,(q_{\parallel}^{\parallel} - q_{\parallel}^{\perp})\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1\Big\}^{(0)}$$

$$P_{23}^{(1)} = \frac{1}{2\Omega}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) : (p_{\perp}\nabla\mathbf{u} + q_{\parallel}^{\perp}\nabla\mathbf{e}_1)^{(0)} \tag{4.13}$$

$$P_{33}^{(1)} = -P_{22}^{(1)} = p_{\perp}^{(1)} + \frac{1}{2\Omega}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) : (p_{\perp}\nabla\mathbf{u} + q_{\parallel}^{\perp}\nabla\mathbf{e}_1)^{(0)} \tag{4.14}$$

$$P_{\parallel}^{(1)} = p_{\parallel}^{(1)} \tag{4.15}$$

Заменяя в этих выражениях $\partial e_1 / \partial t$ согласно уравнению (3.13), легко получить формулы Макмахона [4] (см. [12]).

Тензор $\boldsymbol{Q}^{(1)}$ определяется уравнением (2.8)

$$([\boldsymbol{Q}\times\mathbf{e}_1]^s)^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} + \boldsymbol{Q}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\boldsymbol{R} + [\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\mathbf{u}]^s - \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{P}\nabla\cdot\boldsymbol{P}]^s\right)^{(0)}$$

Отсюда получим (ср. с [4])

$$Q_{113}^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\Big\{2\,(q_{\parallel}^{\parallel} - q_{\parallel}^{\perp})\left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_2\mathbf{u} : \nabla\mathbf{e}_1\right) + 2\,(q_{\parallel}^{\parallel}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + q_{\parallel}^{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) : \nabla\mathbf{u} +$$

$$+ (R_1 - 3R_2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\cdot\nabla R_2 - \frac{p_{\parallel}}{\rho}\,[\mathbf{e}_2\cdot\nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1]\Big\}^{(0)} \tag{4.16}$$

$$Q_{112}^{(1)} = -\frac{1}{\Omega}\Big\{2\,(q_{\parallel}^{\parallel} - q_{\parallel}^{\perp})\left(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} + \mathbf{e}_3\mathbf{u} : \nabla\mathbf{e}_1\right) + 2\,(q_{\parallel}^{\parallel}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + q_{\parallel}^{\perp}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) : \nabla\mathbf{u} +$$

$$+ (R_1 - 3R_2)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\cdot\nabla R_2 - \frac{p_{\parallel}}{\rho}\,[\mathbf{e}_3\cdot\nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1]\Big\}^{(0)} \tag{4.17}$$

$$Q_{123}^{(1)} = \frac{1}{2\Omega}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) : \left\{q_{\parallel}^{\perp}\nabla\mathbf{u} + \left(R_2 - \frac{1}{4}R_3\right)\nabla\mathbf{e}_1\right\}^{(0)} \tag{4.18}$$

$$(Q_{133} - Q_{122})^{(1)} = \frac{1}{\Omega}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) : \left\{q_{\parallel}^{\perp}\nabla\mathbf{u} + \left(R_2 - \frac{1}{4}R_3\right)\nabla\mathbf{e}_1\right\}^{(0)} \tag{4.19}$$

$$-Q_{233}^{(1)} = 2Q_{233}^{(1)} - Q_{222}^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\Big\{2q_{\parallel}^{\perp}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{u} + \left(R_2 - \frac{1}{4}R_3\right)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{4}\mathbf{e}_3\cdot\nabla R_3 - \frac{p_{\perp}}{\rho}\,[\mathbf{e}_3\cdot\nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1]\Big\}^{(0)} \tag{4.20}$$

$$Q_{223}^{(1)} = Q_{333}^{(1)} - 2Q_{322}^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\Big\{2q_{\parallel}^{\perp}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{u} + \left(R_2 - \frac{1}{4}R_3\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{4}\mathbf{e}_2\cdot\nabla R_3 - \frac{p_{\perp}}{\rho}\,[\mathbf{e}_2\cdot\nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 : \nabla\mathbf{e}_1]\Big\}^{(0)} \tag{4.21}$$

Компоненты $Q_{111}^{(\cdot)} = 2q_{\parallel}^{\parallel}$ и $(Q_{122} + Q_{133})_{(\cdot)} = 2q_{\parallel}^{\perp}$ описываются уравнениями (4.9), (4.10). Формулы (4.11), (4.21) дают приближение типа Навье — Стокса в описании бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле.

5. Под двухмерной теорией понимают специальный случай, когда силовые линии магнитного поля являются прямыми и остаются такими с течением времени. При этом рассматриваются лишь явления, происходящие в плоскости, перпендикулярной силовым линиям, т. е. принимается, что

$$\mathbf{e}_1\cdot\nabla = 0,\quad \nabla\mathbf{e}_1 = 0,\quad u_{\parallel} = 0 \tag{5.1}$$

Тогда в нулевом приближении получается довольно простой ряд уравнений

$$D\rho_a = -\rho_a\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{5.2}$$

$$Dp_{\perp a} = -2p_{\perp a}\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{5.3}$$

$$DB = -B\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{5.4}$$

$$\rho D\mathbf{V} = -\nabla\left(p_{\perp} + \frac{1}{8\pi}B^2\right) \tag{5.5}$$

где

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla,\quad \rho = \sum_a \rho_a,\quad p_{\perp} = \sum_a p_{\perp a}$$

С точностью ε^2, μ уравнения двухмерной теории имеют вид

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \nabla\cdot\rho_a\mathbf{V} + \frac{1}{\Omega_a}\mathbf{e}_1\cdot\Big\{\Big[\nabla\frac{\rho_a}{\rho}\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big] -$$

$$-\Big[\Big\{\nabla p_{\perp a} - \frac{\rho_a}{\rho}\nabla p_{\perp}\Big\}\nabla\ln B\Big]\Big\}^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial p_{\perp a}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla p_{\perp a} + 2p_{\perp a}\nabla\cdot\mathbf{V} + \frac{1}{\Omega_a}\Big\{\frac{1}{\rho}\Big[\nabla p_{\perp a}\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{2p_{\perp a}}{\rho}\mathbf{e}_1\cdot\Big(\Big[\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\nabla\ln\rho\Big] + [\nabla p_{\perp}\nabla\ln B]\Big) - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\cdot[\nabla R_{3a}\nabla\ln B]\Big\}^{(0)} = 0$$

$$\rho D\mathbf{V} + \nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big) + \sum_a\frac{1}{\Omega_a}\Big(\Big[\mathbf{e}_1\Big\{\nabla p_{\perp a} - \frac{\rho_a}{\rho}\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big\}\Big]\cdot\nabla\mathbf{V} -$$

$$-2\Big\{p_{\perp a} - \frac{\rho_a}{\rho}\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big\}[\mathbf{e}_1\nabla]\,\nabla\cdot\mathbf{V} - [\mathbf{e}_1\nabla]\underset{\llcorner\!\uparrow}{\mathbf{V}}\cdot\Big\{\nabla p_{\perp a} - \frac{\rho_a}{\rho}\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big\} +$$

$$+\Big\{\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big) - \Big[\mathbf{e}_1\nabla\Big(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}\Big)\Big]\Big\}\mathbf{V}\cdot\nabla\frac{\rho_a}{\rho}\Big)^{(0)} + \nabla\cdot\sigma^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\cdot B\mathbf{V}$$

Стрелка $\llcorner\!\uparrow$ означает, что оператор ∇ действует только на $\mathbf{V}$.

Эта система остается незамкнутой до тех пор, пока не определена величина $R_{3a}^{(0)}$. По методу моментов Града [12] можно вычислить

$$R_{3a}^{(0)} = 4p_{\perp}/\rho$$

Тогда найденная система уравнений замыкается. Используя формулы (4.11) — (4.15), нетрудно получить, что в двухмерной теории

$$\nabla\cdot\sigma_a^{(1)} = \frac{p_{\perp a}}{2\Omega_a}\Big\{\Delta_{\perp}[\mathbf{e}_1\mathbf{V}] + \nabla\ln\frac{p_{\perp a}}{B}\cdot\nabla[\mathbf{e}_1\mathbf{V}] - \Big[\mathbf{e}_1\nabla\ln\frac{p_{\perp a}}{B}\Big]\cdot\nabla\mathbf{V}\Big\}$$

Отсюда, в частности, следуют известные формулы [13] для компонент $\nabla\cdot\sigma^{(1)}$ в цилиндрической системе координат.

Поступила 16 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in absence of particle collisions. Proc. Roy. Soc., 1956, vol. A236, No. 1204.
2. Волков Т. Ф. Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, вып. 4.
3. Frieman E., Davidson R., Langdon B. Higher-order corrections to the Chew — Goldberger — Low theory. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 8, p. 1475.
4. Macmahon A. Finite gyro-radius corrections to the hydromagnetic equations for a Vlasov plasma. Phys. Eluids, 1965, vol. 8, No. 10, p. 1840.
5. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Finite Larmor radius stabilisation of «weakly» unstable confined plasmas. Nucl. Fusion, 1962, vol. 2, Suppl. pt. 1.
6. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1963, вып. 3.
7. Rosenbluth M. N., Simon A. Finite Larmor radius equations with non-uniform electric fields and velocities. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 7, p. 1300.
8. Stringer T. E., Schmidt G. Flute instability in the presence of non-uniform electric fields. Plasma Phys., 1967, vol. 9, No. 1.
9. Сагдеев Р. З., Кадомцев Б. Б., Рудаков Л. И., Веденов А. А. Динамика разреженной плазмы в магнитном поле. Тр. II Междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958; Докл. советских ученых, т. 1, М., Атомиздат, 1959.
10. Oraevskii V., Chodura R., Feneberg W. Hydrodynamic equations for plasmas in strong magnetic fields. Plasma Phys., 1968, vol. 10, No. 9.
11. Milantiev V. P. On the viscosity and heat conductivity of a collisionless plasma in a magnetic field. Risö Rep., 1968, No. 175.
12. Milantiev V. P. On the viscosity of a collisionless plasma in a magnetic field. Plasma Phys., 1969, vol. 11, No. 2.
13. Berge G. Instability of a rotating plasma from the two-fluid equations including finite radius of gyration effects, 1966. Plasma Phys. and Controll. Nucl. Fusion Res. Vienna, 1966, vol. 1.