до 0,5 хорды. Затрачиваемая мощность нарастает с увеличением амплитуды быстрее, чем сила тяги.

В заключение приведем результаты сравнения расчетов гидродинамических сил с имеющимися экспериментальными данными для поступательных колебаний крыла на швартовом режиме [8]. Эксперимент показал, что тонкие крылья при поступательном законе колебаний силу тяги не создают (7 %-ный профиль ЦАГИ КВ-1-7), в то время как сила тяги для толстых крыльев может быть значительной (для 15 %-ного профиля NACA-0015 средний коэффициент силы тяги, вычисленный по формуле $\overline{C}_т = 2\overline{F}_т/(\rho(\omega A)^2 b)$ (A — амплитуда колебаний), принимал значения 0,34—0,4). Результаты настоящих расчетов (рис. 4) свидетельствуют о том, что средняя сила тяги исчезает при уменьшении толщины профиля до 10 %. Расчеты для 15 %-ных профилей Кармана — Треффтца, примерно соответствующих профилю NACA-0015, давали $\overline{C}_т = 0{,}35$—$0{,}47$ при такой же, как в эксперименте, амплитуде колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Oshima Y., Oshima K.** Vortical flow behind an oscillating airfoil // Theor. and Appl. Mech.: Proc. 15th Intern. Congr., Toronto, 1980: Postprints.— Amsterdam et al., 1980.
2. **Зобнин А. И.** Расчет отрывного обтекания телесного профиля, колеблющегося в неподвижной жидкости.— Омск, 1987.— Деп. в ВИНИТИ 27.01.87, № 626—В87.
3. **Зобнин А. И.** Начальное отрывное обтекание профиля с угловой кромкой.— Омск, 1985.— Деп. в ВИНИТИ 24.06.85, № 4462.
4. **Зобнин А. И.** Исследование начальной стадии отрывного обтекания кругового цилиндра // ПМТФ.— 1983.— № 5.
5. **Бетяев С. К.** Эволюция вихревых пелен // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями.— Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1980.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.
7. **Головкин В. А.** Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся следом // Учен. зап. ЦАГИ.— 1972.— Т. 3, № 3.
8. **Гребешов Э. П., Сагоян О. А.** Гидродинамические характеристики колеблющегося крыла, выполняющего функции несущего элемента и движителя // Тр. ЦАГИ.— 1976.— Вып. 1725.

г. Омск *Поступила 15/III 1988 г., в окончательном варианте — 21/IV 1988 г.*

УДК 532.512

С. П. Актершев, А. В. Федоров

ПРИМЕНЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ТРУБОПРОВОДЕ С ГАЗОВОЙ ПОЛОСТЬЮ ДЛЯ СОЗДАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТРУИ

Высокоскоростные струи жидкости находят широкое применение в технике для разрушения и резания различных материалов. В некоторых случаях используется установившаяся струя, но результаты [1] показывают, что более перспективно применение нестационарной струи, поскольку в этом случае основной механизм эрозии материала — высокое давление гидравлического удара струи. В [2] рассмотрены некоторые аспекты создания нестационарной струи, вытекающей из сопла на конце трубопровода, применительно к гидравлической разработке полезных ископаемых. Методом математического моделирования исследуется колебательный процесс в трубе, целиком заполненной жидкостью. При этом нестационарность струи создавалась либо в результате пульсации расхода жидкости на входе трубы, либо за счет периодического изменения сечения струи колеблющимся клапаном.

Известно, что присутствие воздушной полости в заполненной жидкостью трубе может быть причиной значительных колебаний скорости и давления жидкости в различных нестационарных процессах [3—7]. Это объясняется появлением собственных колебаний колонны жидкости с частотой, которая определяется одновременно параметрами полости, жидкости и трубы [8, 9]. Обычно колебания давления в течение переходных процессов в трубопроводе рассматриваются как нежелательное явление, поэтому параметры воздушного колпака подбирают так, чтобы ослабить эти колебания. Вместе с тем существуют гидроударные устройства, в которых колебания жидкости в трубе, не содержащей газовой полости, специально организуются с помощью периодически перекрывающегося клапана для получения импульсов давления [10]. Поскольку наличие газового объема в трубопроводе с жидкостью может привести к существенному усилению давления [6, 7], целесообразно использовать этот эффект для получения высоких давлений, как это отмечено в [7].

Физико-математическая постановка задачи. В настоящей работе исследуется возможность применения резонансных колебаний жидкости в трубопроводе с газовой полостью и соплом на конце (рис. 1) для создания высокоскоростной пульсирующей струи. Предполагается, что колебания возникают в результате модуляции давления $\tilde{p}_н(\tilde{t})$ на входе трубы, которое меняется по закону $\tilde{p}_н(\tilde{t}) = \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}\cos(2\pi\tilde{t}/\tilde{T})$. Здесь $\tilde{p}_0$ — стационарное давление в системе, $\Delta\tilde{p}$, $\tilde{T}$ — амплитуда и период пульсаций, возникающих при работе насоса. Рассмотрим задачу в приближении несжимаемой жидкости, считая скорость жидкости во всех сечениях трубы одинаковой. Такое пренебрежение временем распространения возмущений по трубопроводу будет оправданным при условии $\tilde{c}\tilde{T} \gg \tilde{L}$ ($\tilde{L}$, $\tilde{c}$ — длина трубы, скорость распространения волны). Запишем уравнения движения жидкости, изменения объема газовой полости и адиабатического сжатия газа в виде

$$\tilde{\rho}\tilde{L}d\tilde{u}/d\tilde{t} = \tilde{p}_н - \tilde{p} - \lambda\tilde{L}\tilde{\rho}|\tilde{u}|\tilde{u}/2\tilde{D}, \tag{1}$$

$$d\tilde{V}/d\tilde{t} = -\tilde{f}_0\tilde{u} + \tilde{s}_0\sqrt{2(\tilde{p}-\tilde{p}_а)/\tilde{\rho}}, \quad \tilde{p}\tilde{V}^\gamma = \tilde{p}_0\tilde{V}_0^\gamma,$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$—скорость, плотность, давление жидкости в конце трубы; $\tilde{f}_0$, $\tilde{s}_0$— площадь сечения трубы, эффективная площадь сопла; $\sqrt{2(\tilde{p}-\tilde{p}_а)/\tilde{\rho}}$ — скорость струи; $\tilde{p}_а$ — атмосферное давление; λ —коэффициент трения о стенку; $\tilde{D}$ — диаметр трубы; γ — показатель адиабаты.

Определим условие, при котором можно пренебречь потерями давления на трение о стенку трубы. Приравнивая по порядку величины первые два члена во втором уравнении из (1), имеем для характерной скорости оценку $\tilde{u} \sim \tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{T}$. Для того чтобы пренебречь трением по сравнению с инерционным членом в уравнении движения, необходимо, чтобы $\lambda\tilde{u}\tilde{T}/\tilde{D} \ll 1$; отсюда получаем условие $\lambda\tilde{V}_0/\tilde{D}\tilde{f}_0 \ll 1$. Поскольку характерное значение $\lambda \sim 10^{-2}$, при $\tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{L} \sim 1$ это условие выполняется для не очень длинных труб ($\tilde{L}/\tilde{D} \sim 10$).

Пренебрегая в первом из (1) трением и переходя к безразмерным переменным $p = \tilde{p}/\tilde{p}_0$, $u = \tilde{u}/\sqrt{\tilde{p}_0\tilde{V}_0/\tilde{\rho}\tilde{L}\gamma\tilde{f}_0}$, $t = \tilde{t}/\sqrt{\tilde{\rho}\tilde{L}\tilde{V}_0/\tilde{p}_0\gamma\tilde{f}_0}$, получим, исключив $\tilde{V}$ из (1),

$$du/dt = 1 + q\cos\omega t - p, \quad dp/dt = p^{(1+\gamma)/\gamma}\,(u - 2\varepsilon\sqrt{p - p_а}). \tag{2}$$

Здесь $q = \Delta\tilde{p}/\tilde{p}_0$; $p_а = \tilde{p}_а/\tilde{p}_0$; $\varepsilon = s_0\sqrt{\gamma\tilde{f}_0\tilde{L}}/\tilde{f}_0\sqrt{2\tilde{V}_0}$; $\omega = 2\pi\sqrt{\tilde{\rho}\tilde{L}\tilde{V}_0}/\tilde{T}\sqrt{\tilde{p}_0\gamma\tilde{f}_0}$. Будем искать установившееся периодическое решение (2), соответствующее вынужденным колебаниям при заданных q, ω (амплитуде и частоте пульсаций давления на входе). Таким образом, приходим к постановке задачи теории нелинейных колебаний. Решение поставленной задачи в общем случае можно получить, например, интегрированием системы (2) численным методом. Рассмотрим прежде частный случай малых колебаний.

Приближенное решение в линейном случае. В отсутствие пульсаций давления на входе трубы ($q = 0$) стационарные значения $p = 1$, $u = 2\varepsilon\sqrt{1 - p_а}$. Линеаризуем (2), полагая $p = 1 + \bar{p}$, $u = 2\varepsilon\sqrt{1 - p_а} + \bar{u}$, $\bar{u}, \bar{p} \ll 1 - p_а$, $q \ll 1 - p_а$. В результате получим

$$d\bar{u}/dt = -\bar{p} + q\cos\omega t, \quad d\bar{p}/dt = \bar{u} - 2k\bar{p}, \quad k = \varepsilon/2\sqrt{1 - p_а}.$$

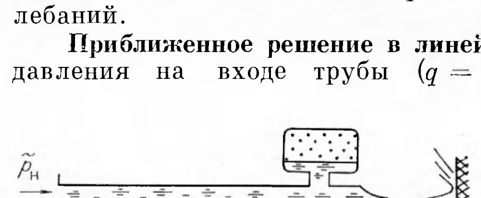

Рис. 1

Исключая $\bar{u}$, приходим к известному уравнению колебаний линейного осциллятора с затуханием

$$\ddot{\bar{p}} + 2k\dot{\bar{p}} + \bar{p} = q\cos\omega t. \tag{3}$$

Здесь коэффициент k, играющий роль трения, учитывает потери энергии в системе из-за утечки жидкости через сопло. Решение (3), соответствующее вынужденным колебаниям:

$$\bar{p} = A\cos(\omega t - \alpha),\ A = q/\sqrt{(\omega^2-1)^2 + 4k^2\omega^2},\ \mathrm{tg}\alpha = 2k\omega/(1-\omega^2). \tag{4}$$

При этом максимальное значение амплитуды при $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{1-2k^2}$ и ширина резонансного пика определяются величиной k. С уменьшением эффективной площади сопла резонансный пик становится более высоким и узким, оставаясь достаточно симметричным относительно $\omega = \sqrt{1-2k^2}$.

Нелинейное приближенное аналитическое решение. Исследуем явление резонанса в нелинейной постановке, считая $q \ll 1 - p_{\text{а}}$, $\varepsilon \ll 1$. Введем $w = 1 - p^{-1/\gamma}$; тогда, исключив u, систему (2) можно свести к уравнению

$$\ddot{w} = \frac{1}{\gamma}[1-(1-w)^{-\gamma}] + \frac{1}{\gamma}q\cos\omega t - \frac{\varepsilon\dot{w}(1-w)^{-(\gamma+2)/2}}{\sqrt{1-p_{\text{а}}(1-w)^{\gamma}}}.$$

При малых w, разлагая $(1-w)^{-\gamma}$ в ряд Тейлора в окрестности $w = 0$, с точностью до w^3 получим

$$\ddot{w} + w + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 + \varepsilon\dot{w}(1-w)^{-(\gamma+2)/2}/ \tag{5}$$
$$/\sqrt{1-p_{\text{а}} + \gamma p_{\text{а}}(w - \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3)} = (q/\gamma)\cos\omega t,$$
$$\alpha_2 = (\gamma+1)/2,\ \alpha_3 = (\gamma+1)(\gamma+2)/6.$$

Перенормируем (5), сделав замену $w = \sqrt{\varepsilon^*}y$, где $\varepsilon^* = \varepsilon/\sqrt{1-p_{\text{а}}}$. Оставляя в левой части только члены порядка $\sqrt{\varepsilon^*}$, ε^*, имеем

$$\ddot{y} + y + \sqrt{\varepsilon^*}\alpha_2 y^2 + \varepsilon^*(\alpha_3 y^3 + \dot{y}) = \varepsilon^* f\cos\omega t,\ f = q/\gamma\varepsilon^*\sqrt{\varepsilon^*}. \tag{6}$$

Ищем приближенное решение (6) методом многих масштабов [11], используя переменные $T_0 = t$, $T_1 = \sqrt{\varepsilon^*}t$, $T_2 = \varepsilon^* t$ и представляя $y(t)$ в виде

$$y = y_0(T_0, T_1, T_2) + \sqrt{\varepsilon^*}y_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^* y_2(T_0, T_1, T_2). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^* в обоих частях уравнения, получим

$$D_0^2 y_0 + y_0 = 0; \tag{8}$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_1 D_0 y_0 - \alpha_2 y_0^2; \tag{9}$$

$$D_0^2 y_2 + y_2 = -2D_1 D_0 y_1 - 2\alpha_2 y_0 y_1 - 2D_2 D_0 y_0 - \tag{10}$$
$$- D_1^2 y_0 - D_0 y_0 - \alpha_3 y_0^3 + f\cos\omega T_0.$$

Здесь $D_j = \partial/\partial T_j$ $(j = 0, 1, 2)$. Решение (8) запишем в виде $y_0 = A(T_1, T_2)\times$ $\times\, e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0}$ (A, $\bar{A}$ — комплексно-сопряженные величины). Отсюда для (9) имеем

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -\left(2i\,\partial A/\partial T_1\cdot e^{iT_0} + \alpha_2 A^2 e^{2iT_0}\right) - (\text{к. с.}) - 2\alpha_2 A\bar{A},$$

где к. с. обозначает комплексно-сопряженное слагаемое. Тогда требование отсутствия секулярных членов в решении этого уравнения приводит к условию

$$\partial A/\partial T_1 = 0. \tag{11}$$

При этом решение неоднородного уравнения (9) примет вид

$$y_1 = (\alpha_2 A^2/3)\,e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) - 2\alpha_2 A\bar{A}.$$

Используя полученные выражения для y_0, y_1 и условие (11), запишем (10) следующим образом:

$$(12)\qquad D_0^2 y_2 + y_2 = (\mu_1 A^2\bar{A} - 2i\,\partial A/\partial T_2 - iA)\,e^{iT_0} - \mu_2 A^3 e^{3iT_0} +$$
$$+ f e^{i\omega T_0}/2 + (\text{к. с.}),\quad \mu_1 = (\gamma+1)(2\gamma-1)/6,\quad \mu_2 = (\gamma+1)(2\gamma+3)/6.$$

Вводя известным образом параметр расстройки $\sigma = (\omega - 1)/\varepsilon^*$ и представляя $e^{i\omega T_0} = e^{iT_0}e^{i\sigma T_2}$, избавляемся от секулярных членов в решении (12), полагая справедливым уравнение

$$(13)\qquad \mu_1 A^2\bar{A} - 2i\,\partial A/\partial T_2 - iA + f e^{i\sigma T_2}/2 = 0.$$

Представляя A в показательной форме $A = ae^{i\beta}/2$, где a, β — действительные величины, и отделяя в (13) действительную и мнимую части, приходим к системе двух уравнений относительно a, β. Преобразуем ее в автономную, введя переменную $\varphi = \sigma T_2 - \beta$:

$$\partial a/\partial T_2 = -a/2 + (f/2)\sin\varphi,$$
$$a\partial\varphi/\partial T_2 = a\sigma + \mu_1 a^3/8 + (f/2)\cos\varphi.$$

Отсюда находим установившиеся значения a, φ, которые удовлетворяют соотношениям $a = f\sin\varphi$, $2a(\sigma + \mu_1 a^2/8) = -f\cos\varphi$, и амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) системы

$$(14)\qquad a^2 + 4a^2(\sigma + \mu_1 a^2/8)^2 = f^2.$$

Отметим, что полученная АЧХ близка к АЧХ уравнения Дуффинга [11], но отличается от нее знаком слагаемого $\mu_1 a^2/8$. Для АЧХ уравнения Дуффинга известно явление срыва, т. е. скачка амплитуды вследствие того, что $a(\omega)$ — трехзначная функция при некоторых $\omega > 1$. Оказывается, это явление также имеет место для исследуемой колебательной системы.

Рассмотрим условие, при котором возможен скачок амплитуды для АЧХ (14). Разрешая уравнение относительно ω, находим

$$(15)\qquad \omega - 1 = -\mu_1 a^2\varepsilon^*/8 \pm (1/2)\varepsilon^*\sqrt{(f/a)^2 - 1}.$$

Функция $a(\omega)$ будет неоднозначной, если для некоторых a $d\omega/da = 0$. Значения a, удовлетворяющие этому условию, могут находиться только на нижней ветви (15) (знак минус перед корнем). Отсюда $d\omega/da = \varepsilon^* f^2/2a^3\sqrt{(f/a)^2-1} - \mu_1 a\varepsilon^*/4 = 0$. Определим, при каких ε^*, f это уравнение имеет решение относительно a, для чего запишем его в виде

$$(16)\qquad \psi(z) = \mu_1\varepsilon^*/2,$$

где $z = (f\varepsilon^*/a)^2$; $\psi(z) = z^2/f^2\varepsilon^{*2}\sqrt{z - \varepsilon^{*2}}$. Функция $\psi(z)$ имеет минимум при $z_{\min} = 4\varepsilon^{*2}/3$, $\psi_{\min} = 16\sqrt{3}\varepsilon^*/9f^2$. Следовательно, у (16) есть два решения при условии $\psi_{\min} < \mu_1\varepsilon^*/2$. Выражая f через q, ε^*, получаем соотношение

$$(17)\qquad \varepsilon^{*3}/q^2 < 9\mu_1/(32\sqrt{3}\gamma^2).$$

Таким образом, для заданной величины q скачок амплитуды может быть только при достаточно малой площади сопла (малые ε^*). Отметим, что для АЧХ (14), в отличие от уравнения Дуффинга, область неоднозначности функции $a(\omega)$ расположена слева от $\omega = 1$. В исследуемом нелинейном приближении резонансный пик АЧХ (14) несимметричен, так как в целом имеет наклон в сторону меньших частот.

Запишем полученные решения y_0, y_1 в действительной форме

$$y_0 = (1/2)\left(e^{i(T_0+\beta)} + e^{-i(T_0+\beta)}\right) = a\cos(\omega t - \varphi),$$
$$y_1 = (\alpha_2 a^2/2)\,[(1/3)\cos(2\omega t - 2\varphi) - 1].$$

Отсюда находим приближенное решение (5), возвращаясь к переменной w и ограничиваясь двумя членами разложения (7):

(18) $$w = a\sqrt{\varepsilon^*}\cos(\omega t - \varphi) + (a^2\varepsilon^*\alpha_2/2)[(1/3)\cos(2\omega t - 2\varphi) - 1].$$

Для $a \ll 1$ можно пренебречь вторым слагаемым в (18). Тогда $p = (1 - w)^{-\gamma} \approx 1 + \gamma a\sqrt{\varepsilon^*}\cos(\omega t - \varphi)$. Нетрудно показать, что вблизи резонанса $\omega \approx 1$ это решение переходит в решение (4) линеаризованного уравнения (3). Действительно, если $a^2 \ll \sigma$, то из (14) получим $a = f/\sqrt{1 + 4\sigma^2}$, откуда амплитуда давления $\gamma a\sqrt{\varepsilon^*} = q/\varepsilon^*\sqrt{1 + 4(\omega - 1)^2/\varepsilon^{*2}} \approx q/\sqrt{\varepsilon^{*2} + (\omega - 1)^2(\omega + 1)^2} = q/\sqrt{4k^2 + (\omega^2 - 1)^2}$ ($\omega \approx 1$, $\omega + 1 \approx 2$).

Найденное нелинейное аналитическое решение в приближении малой амплитуды позволяет провести исследование качественных свойств изучаемого процесса.

Численное решение в общем случае немалых амплитуд. Обсуждение результатов. Для изучения установившихся вынужденных колебаний в общем случае система (2) интегрировалась численным жесткоустойчивым методом [12] пятого порядка точности с начальными данными $p(0) = 1$, $u(0) = 2\varepsilon\sqrt{1 - p_a}$ при заданных q, ω до установления периодического режима. Расчеты проводились для $\rho = 10^3$ кг/м^3 (вода), $\gamma = 1{,}4$ (воздух). На рис. 2 приведена зависимость $a\sqrt{\varepsilon^*}$ от частоты, рассчитанная по (14) для $q = 10^{-2}$, $\varepsilon^* = 1{,}34\cdot 10^{-2}$, удовлетворяющих (17). Кружками обозначены результаты интегрирования системы (2). Видно, что при малых q численное и приближенное аналитическое решение хорошо согласуются. Для частот $0{,}974 < \omega < 0{,}982$ $a(\omega)$ есть трехзначная функция и в численном счете реализуется нижняя ветвь. Участки ab, bc кривой оказываются неустойчивыми. При изменении частоты в точке $\omega = 0{,}982$ происходит скачкообразное изменение амплитуды (явление срыва).

При $q \gg 10^{-2}$ форма установившихся колебаний $p(t)$ существенно несинусоидальная из-за нелинейности (2). На рис. 3 показана зависимость давления от времени в течение периода при $p_a = 0{,}1$, $\tilde{s}_0/\tilde{f}_0 = 0{,}035$, $\tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{L} = 0{,}1$, $\omega = 0{,}958$ для различных q (кривые *1—3* — $q = 0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}6$). Видно, что колебания давления в конце трубы значительно превосходят пульсации на входе. При увеличении q возрастает не только максимальное значение p_{max}, но и крутизна пика. Тем самым растут максимальное значение и крутизна нарастания скорости струи $\tilde{v}(\tilde{t}) = \sqrt{2(\tilde{p} - \tilde{p}_a)/\tilde{\rho}}$, определяющие эффективность ее гидроударного воздействия на разрушаемый материал [2]. Будем характеризовать размах колебаний давления у сопла величиной $R = p_{max}/p_{min}$. Зависимости $R(\omega)$, заменяющие в случае большой амплитуды АЧХ (14), приведены на рис. 4 при $q = 0{,}1$, $p_a = 0{,}02$ для различных $\tilde{s}_0/\tilde{f}_0$ (кривые *1—4* — $\tilde{s}_0/\tilde{f}_0 = 0{,}035$; $0{,}05$; $0{,}075$;

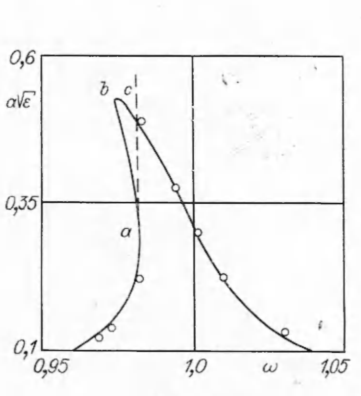

Рис. 2

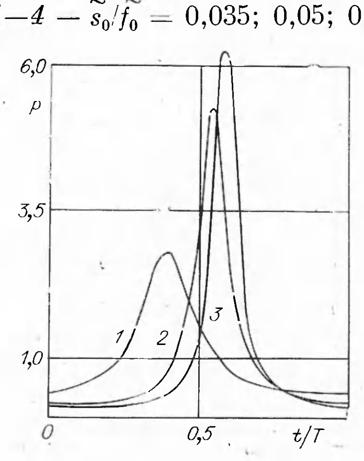

Рис. 3

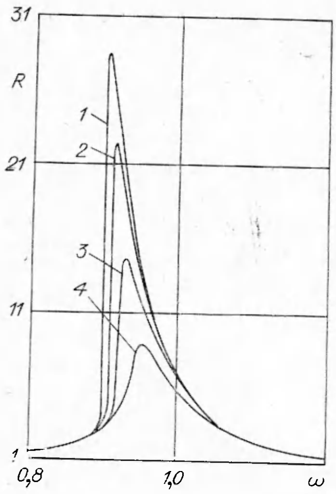

Рис. 4

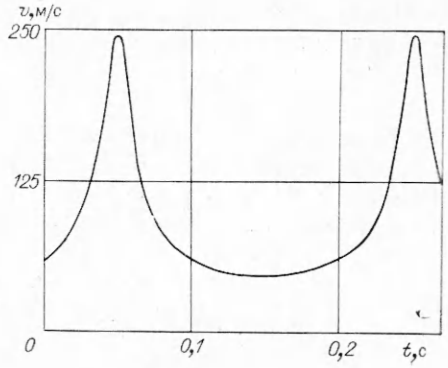

Рис. 5

0,1). Вид характеристик $R(\omega)$ для больших q качественно согласуется с АЧХ (14) для малых амплитуд. Кривые $R(\omega)$ также имеют наклон в сторону меньших частот, более крутой левый склон и максимум при $\omega < 1$. С уменьшением площади сопла резонансные пики становятся более крутыми и высокими, максимум кривой смещается влево. Для малых $\tilde{s}_0/\tilde{f}_0$ наблюдается скачок при некотором $\omega < 1$, т. е. $R(\omega)$ становится разрывной, что тоже качественно согласуется с условием (17), полученным при $q \ll 1$. Отметим существенные максимальные значения $R_{\max} \sim 10$ для небольшой глубины модуляции давления на входе $q = 0{,}1$. Этот факт свидетельствует о высокой эффективности резонансного режима для получения значительных колебаний давления перед соплом и, следовательно, скорости вытекающей струи.

Установившийся колебательный режим течения жидкости, как следует из (2), полностью определяется параметрами q, ω, $p_{\text{а}}$, ε^*. Для трубопровода с конкретными значениями $\tilde{L}$, $\tilde{f}_0$, $\tilde{s}_0$ при заданных $\tilde{p}_0$, $\Delta\tilde{p}$, $\tilde{T}$ условие резонансного максимума можно реализовать выбором объема газовой полости $\tilde{V}_0$, зная безразмерную частоту $\omega_{\text{рез}}$. В случае малой амплитуды $\omega_{\text{рез}}$ должна обеспечить максимум АЧХ (14) и определяется условием $da/d\omega = 0$. Как видно из (15), эквивалентное условие $d\omega/da \to \infty$ выполняется при $a = f$. Отсюда $\omega_{\text{рез}} = 1 - \mu_1 q^2/8\gamma^2\varepsilon^{*2}$. С другой стороны, по определению, $\omega\varepsilon^* = 2\pi\tilde{s}_0\tilde{L}/\tilde{f}_0\tilde{T}\sqrt{2(\tilde{p}_0 - \tilde{p}_{\text{а}})/\tilde{\rho}} = B$ известна. Имеем для ε^* квадратное уравнение $\varepsilon^{*2} - B\varepsilon^* - \varepsilon_q^2 = 0$ $(\varepsilon_q^2 = \mu_1 q^2/8\gamma^2)$. Отсюда находим $\varepsilon^* = B/2 + \sqrt{\varepsilon_q^2 + B^2/4}$, $\omega_{\text{рез}} = B\Big/\left(B/2 + \sqrt{\varepsilon_q^2 + B^2/4}\right)$, $\tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{L} = (\omega_{\text{рез}}/2\pi)^2\gamma\tilde{p}_0\tilde{T}^2/\tilde{\rho}\tilde{L}^2$. В общем случае немалых амплитуд необходимо посредством численных расчетов построить зависимости $R(\omega)$ для различных ε^*, затем определить из них резонансные частоты и найти пересечение графиков $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{рез}}(\varepsilon^*)$ и $\omega_{\text{рез}} = B/\varepsilon^*$.

Сделанное пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к условию для объема газа $\tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{L} \gg \tilde{p}_0/\tilde{\rho}\tilde{c}^2$. В качестве примера рассмотрим трубопровод длиной $\tilde{L} = 2{,}74$ м, заполненный водой под давлением $\tilde{p}_0 = 5$ МПа, имеющий сопло $\tilde{s}_0/\tilde{f}_0 = 0{,}035$. Пусть на входе $\Delta\tilde{p} = 0{,}5$ МПа, $\tilde{T} = 0{,}272$ с. При $\tilde{V}_0/\tilde{f}_0\tilde{L} = 1$ безразмерные $q = 0{,}1$, $p_{\text{а}} = 0{,}02$, $\varepsilon^* = 2{,}93\cdot 10^{-2}$, $\omega = 0{,}9064$, что соответствует максимуму кривой *1* на рис. 4. Зависимость $\tilde{v}(\tilde{t})$ скорости струи от времени для этого примера показана на рис. 5. Максимальное гидроударное давление струи [2] $\tilde{p}_g = \tilde{\rho}\tilde{c} \times (\tilde{v}_{\max} - \tilde{v}_{\min}) = 276{,}7$ МПа достаточно велико для разрушения многих материалов.

Таким образом, исследован процесс вынужденных нелинейных колебаний жидкости в трубопроводе с газовой полостью, возникающих при модуляции давления на входе трубы. В приближении малой амплитуды получено приближенное аналитическое решение. Показана возможность применения резонансного режима для создания в выходном сечении трубы пульсирующей скоростной струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Войцеховский Б. В., Николаев В. П. и др.** Некоторые результаты разрушения горных пород импульсным водометом // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1963.— Вып. 1, № 2.
2. **Контрактор Д.** Применение переходных режимов жидкости в гидравлической разработке полезных ископаемых // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов.— 1972.— № 2.
3. **Актершев С. П., Федоров А. В., Фомин В. М.** Математическое моделирование испытаний магистральных трубопроводов на герметичность с учетом защемленных объемов воздуха // Динамика многофазных сред/Под. ред. В. М. Фомина.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985.
4. **Zhao T., Sanada K., Kitagawa A., Takenaka T.** On the effect of trapped air in a liquid conduit on the transient flow rate // Bull. JSME.— 1985.— V. 28, N 242.
5. **Martin C.** Entrapped air in pipelines // Proc. 2nd Intern. conf. on pressure surges, London, 1976.— Cranfield, 1977.
6. **Бердников В. В., Козырева Т. С., Пантюхин Б. А.** Исследование процессов заполнения магистралей жидкостью // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1982.— № 3.
7. **Актершев С. П., Федоров А. В.** Увеличение давления гидроудара в трубопроводе при наличии локализованного объема газа // ПМТФ.— 1987.— № 6.
8. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.— М.: Недра, 1975.
9. **Атавин А. А., Скребков Г. П.** Упрощенный метод расчета давления в гидросистеме с компенсатором // Вестн. машиностроения.— 1962.— № 8.
10. **Kitagawa A., Takenaka T., Kato Y.** Study on the high pressure generation by means of oil hammer // Bull. JSME.— 1984.— V. 27, N 234.
11. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.
12. **Gear C. W.** The automatic integration of ordinary differential equations // Communs ACM.— 1971.— V. 14, N 3.

г. Новосибирск *Поступила 21/I 1987 г., в окончательном варианте—26/V 1988 г.*

УДК 532.612

Ю. В. Саночкин

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Теоретическому рассмотрению термокапиллярной конвекции в точной или приближенной постановке посвящен ряд работ. Одномерная модель движения тонкого слоя жидкости, на свободной поверхности которой предполагалось линейное распределение температуры, предложена в [1]. На ее непоследовательность обращено внимание в [2]. Приближенное решение [1] обобщено с учетом замечаний [2] в [3]. Замкнутое решение уравнений свободной конвекции для плоскопараллельного стационарного течения в горизонтальном слое жидкости с постоянным вдоль слоя градиентом температуры дано в [4]. Наряду с обычной тепловой рассматривалась термокапиллярная конвекция. Решение [4]* обобщено в [5, 6] на случай других граничных условий для температуры и в [7] для двух слоев несмешивающихся жидкостей. В [8] рассмотрено течение двух слоев несмешивающихся жидкостей в плоском наклонном канале с неизотермическими параллельными стенками. Учитывалось действие градиента давления, силы тяжести и капиллярной силы на плоской границе раздела жидкостей. Двумерная конвекция в плоской прямоугольной кювете изучалась численно в [9] и ряде последующих работ. При слабом движении задача допускает аналитическое решение [10]. Асимптотический анализ для мелкого канала и малоинтенсивной конвекции проведен в [11]. Указанные работы относятся к случаю, когда нагрев жидкости осуществляется через дно или боковые стенки сосуда. Стационарная конвекция при сосредоточенном нагреве горизонтального слоя жидкости сверху численно моделировалась в [12], а процесс ее установления — в [13]. Выводу уравнений, описывающих нестационарную термокапиллярную конвекцию в тонких слоях жидкости, и их применению к рассмотрению некоторых задач посвящена работа [14]. Точное решение, описывающее стационарное движение жидкости в полупространстве при неоднородном нагреве свободной поверхности, получено в [15]. Задача о пространственно-периодической стационарной

* Критическое обсуждение [4] содержится в [13].