ПМТФ, № 2, 1962

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ

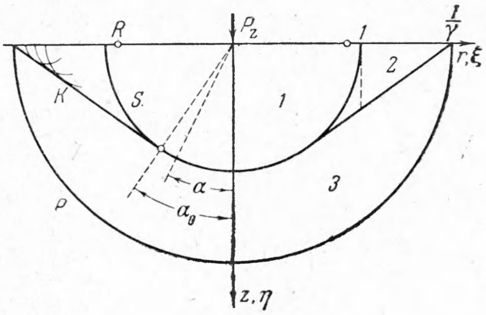
В. С. Никифоровский

(*Новосибирск*)

Рассматривается задача о динамическом напряженном состоянии среды в окрестности точки приложения нестационарного точечного источника на границе упругого полупространства (задача Лэмба в напряжениях).

Задача Лэмба имеет многочисленные применения и неоднократно привлекала внимание исследователей. Первым в 1904 г. было исследование Лэмба [1], посвященное изучению поля перемещений на поверхности однородного полупространства. В 1932—1933 гг. В. И. Смирнов и С. Л. Соболев при помощи нового метода функционально-инвариантных решений динамических задач теории упругости [2] построили решение задачи Лэмба в упругом полупространстве.

В послевоенные годы ленинградской группой динамиков под руководством Г. И. Петрашеня был развит метод неполного разделения переменных в применении к широкому кругу динамических задач теории упругости. В настоящее время динамические задачи для упругих сред (полупространство, слой или слоистая среда с плоскопараллельными границами раздела) рассматриваются во многих работах. Большая часть этих работ посвящена получению и исследованию поля смещений при нестационарных нагрузках. Изучению поля напряжений посвящено сравнительно небольшое количество работ, причем, по-видимому, наиболее полным исследованием, основанным на точных решениях, является работа К. И. Огурцова [3]. В этой работе приведена постановка динамической задачи для упругой плиты при нестационарных поверхностных нагружениях, первые результаты, относящиеся к исследованию поля напряжений на оси симметрии, где решение представимо в замкнутом виде, а также критика акустического и квазистатического решения этой задачи.



Фиг. 1

Представляется очевидным необходимость изучения полного поля напряжений, так как решение этой задачи может найти широкое применение и в технических расчетах и в задаче об исследовании разрушения твердых (хрупких) тел при импульсивных динамических нагружениях.

Отметим, что построение решения задачи не составляет затруднений и может быть выполнено при помощи промежуточных данных справочника [4]. Это позволяет сократить соответствующие разделы статьи, отсылая за деталями к [5] и подробному исследованию [6], обозначения которых сохранены в статье.

Окончательное представление решения в виде компонент тензора напряжений потребовало проведения большого объема численных исследований. Расчеты были произведены на быстродействующей электронной машине Сибирского отделения АН СССР.

§ 1. 1°. Пусть упругая среда занимает полупространство $z \geqslant 0$ (фиг. 1), характеризуется параметрами Ляме λ, μ и плотностью ρ и покоится при $t < 0$. В начальный момент в точке $r = 0$, $z = 0$ поверхности полупространства включается нестационарная нагрузка $f(t)$ — нормальное напряжение на границе упругой среды [6]

$$P_z(r, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{n^2}{(1+n^2r^2)^{3/2}} f(t) = \frac{f(t)}{2\pi} \int_0^\infty kJ_0(kr) \exp\left(\frac{-k}{n}\right) dk \qquad (1.1)$$

Здесь r — координата, n — некоторый параметр, $n > 0$.

Формула (1.1) указывает на распределение нагрузки по поверхности $z = 0$ по некоторому куполообразному закону при $n \neq \infty$; при $n = \infty$ нагрузка становится пространственно сосредоточенной и отвечает особенности $r^{-1}\delta(r)$, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Зависимость нагрузки от времени t в рассматриваемой задаче удобно выбрать в виде

$$f(t) = mt\varepsilon(t), \qquad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0) \end{cases} \tag{1.2}$$

В силу осевой симметрии нагрузки задачу рассматриваем в цилиндрической системе координат r, θ, z. Тензор напряжений будет определяться четырьмя компонентами

$$\sigma_z(r, z, t), \qquad \sigma_r(r, z, t), \qquad \sigma_\theta(r, z, t), \qquad \tau_{rz}(r, z, t)$$

Решение задачи в напряжениях, отвечающее нагрузке (1.2) при $n = \infty$, назовем фундаментальным. После построения и исследования этого решения переход к произвольному закону изменения нагрузки во времени выполняется при помощи интеграла Дюамеля

$$\Sigma_f(r, z, t) = \int_0^t f''(t-\tau)\,\Sigma_l(r, z, \tau)\,d\tau \tag{1.3}$$

Здесь Σ_f означает любую из компонент тензора напряжений для сигнала $f(t)$, а Σ_l — для сигнала (1.2); кроме того, считается, что $f(0) = f'(0) = 0$. Изменения (1.3) в случае, если $f(0) \neq 0$ или $f'(0) \neq 0$, очевидны.

Для дальнейшего удобно ввести понятие длины волны в источнике $\lambda = V_sT$, где V_s — скорость поперечных волн, а T — некоторое характерное время сигнала (например, длительность фазы сжатия в точке $r = 0$, $z = 0$).

2°. Как известно, решение динамических задач теории упругости, в частности отыскание компонент тензора напряжений, можно свести к задаче для потенциалов: $\varphi(r, z, t)$ — продольный потенциал, $\psi(r, z, t)$ — поперечный потенциал. При этом каждая из функций φ и ψ удовлетворяет своему волновому уравнению, нулевым начальным условиям и следующим краевым условиям:

$$\begin{gathered} \mu\left[(b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{z=0} = \sigma_z|_{z=0} = -P_z \\ \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} + b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=0} = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Метод неполного разделения переменных позволяет указать [6] для потенциалов φ и ψ при $n \neq \infty$ следующее представление решения:

(1.5)

$$\varphi = \frac{-1}{2\pi\mu b}\int_0^\infty J_0(kr)\exp\frac{-k}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{A(\zeta k/b)(2+\zeta^2)}{R(\zeta)}\exp\left[k\left(\zeta\frac{t}{b} - z\alpha\right)\right]d\zeta\right\}dk$$

$$\psi = \frac{-1}{\pi\mu b}\int_0^\infty J_1(kr)\exp\frac{-k}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{A(\zeta k/b)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{R(\zeta)}\exp\left[k\left(\zeta\frac{t}{b} - z\beta\right)\right]d\zeta\right\}dk$$

Здесь l — контур в интеграле Меллина на комплексной плоскости ζ, при этом $\operatorname{Re}\zeta = \delta > 0$

$$R(\zeta) = (2+\zeta^2)^2 - 4\alpha\beta, \qquad \gamma = \frac{a}{b} = \frac{V_s}{V_p}, \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Ветви радикалов

$$\alpha = \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}, \qquad \beta = \sqrt{1+\zeta^2} \tag{1.6}$$

фиксированы условиями

$$\arg\alpha = \arg\beta = 0 \quad \text{при} \quad \zeta > 0$$

Функция $A(s)$ в случае граничного импульса (1.2) имеет вид

$$A(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{b^2 m}{k^2\zeta^2} \qquad \left(\zeta = \frac{bs}{k}\right) \tag{1.7}$$

При выводе окончательных формул, представляющих решение в напряжениях, следует также иметь в виду формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \mu\left[b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z}\right] \\ \sigma_\theta &= \mu\left[b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

3°. Формула для компоненты поля напряжений σ_z может быть получена при помощи метода неполного разделения переменных

$$\begin{aligned} \sigma_z = &-\frac{bm}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\exp\frac{-k}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{(2+\zeta^2)^2}{\zeta^2 R(\zeta)}\exp\left[k\left(\zeta\frac{t}{b} - z\alpha\right)\right]d\zeta\right\}dk + \\ &+\frac{bm}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\exp\frac{-k}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{4\alpha\beta}{\zeta^2 R(\zeta)}\exp\left[k\left(\zeta\frac{t}{b} - z\beta\right)\right]d\zeta\right\}dk \end{aligned} \tag{1.9}$$

Формулы для σ_r, σ_θ, τ_{rz} не приводятся (они имеют аналогичную структуру).

Заметим, что решения динамических задач теории упругости обычно даются в виде формул, содержащих два типа слагаемых (вошедших в (1.9)), соответственно возникающих от продольного потенциала φ и от поперечного потенциала ψ.

Из анализа поля перемещений [7] в задаче Лэмба известно, что поле возмущений от продольного потенциала отлично от нуля внутри областей *3*, *2*, *1* (фиг. 1), в то время как поперечный потенциал описывает поле возмущений в областях *2* и *1*.

При этом внешняя граница области *3* будет фронтом продольной волны P, а граница между областями *3* и *1* и между *2* и *1* — сферическим фронтом поперечной волны; граница между областями *2* и *3* проходит по фронту конической поперечной волны. Это же деление на области, как и существование тех же фронтов волн, может быть отмечено и на основе анализа поля напряжений (см. (1.9)). Последнее утверждение можно доказать, в частности, если применить к анализу формул (1.9) асимптотические методы исследования решений динамических задач теории упругости [4, 6].

Не останавливаясь на деталях, рассмотрим поведение σ_z-компоненты в окрестности фронта продольной волны, основываясь на простых преобразованиях [8] интегралов в формуле (1.9).

При этом, имея в виду получение асимптотических формул для функции $\sigma_z(r, z, t)$ на больших расстояниях от источника ($\sqrt{r^2 + z^2} \gg \lambda$), будем исследовать $\partial\sigma_z / \partial t$, что отвечает σ_z-компоненте напряжения для нагрузки, изменяющейся не по закону (1.2), а по закону

$$m \frac{d}{dt} t\varepsilon(t) = m\varepsilon(t) \tag{1.10}$$

т. е. для включенной силы со скачком, равным m.

В этом случае главная часть возмущений в σ_z-компоненте описывается формулой

$$\sigma_{zp}(r, z, t) \approx -\frac{m(2+\zeta_0^2)^2\sqrt{1+\gamma^2\zeta_0^2}}{2\pi\zeta_0 R(\zeta_0)} \frac{\delta(t-t_p)}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad \left(\zeta_0 = \frac{i}{\gamma \sin\alpha}\right) \tag{1.11}$$

Здесь α — угол между осью $r = 0$ и лучом в точку наблюдения с координатами r, z на фронте продольной волны $t_p = a\sqrt{r^2 + z^2}$, а $\delta(t - t_p)$ — функция Дирака.

Отметим, что для нагрузки на поверхности, изменяющейся по закону $\varepsilon(t)$, поле напряжений в окрестности продольной волны изменяется по закону

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\varepsilon(t) \tag{1.12}$$

Этот результат, имеющий значение в дальнейшем анализе, был отмечен на основе точных формул для σ_z-компоненты на оси симметрии в работе [3] и не замечен в работе [9], где главная часть поля возмущений, описываемая (1.11), ошибочно опущена.

Формула (1.11) указывает также на затухание амплитуды напряжений на фронте вдоль луча (множитель $(r^2 + z^2)^{-1/2}$) и на зависимость этой амплитуды от угла α

$$\frac{(2+\zeta_0^2)^2\sqrt{1+\gamma^2\zeta_0^2}}{\zeta_0 R(\zeta_0)} \tag{1.13}$$

которую в аналогичных задачах принято характеризовать угловыми диаграммами [8, 10].

Формулы, аналогичные (1.11), имеют место для всех компонент напряжений в окрестности фронтов волн, отличаясь лишь различными зависимостями от угла α, от r, z (в окрестности конической волны) и некоторыми дополнительными особенностями на фронте сферической поперечной волны при $\alpha > \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = \arcsin\gamma \tag{1.14}$$

§ 2. 1°. В работе [6] был предложен метод сведения интегрального представления решения в виде (1.9) к формулам, содержащим вещественные интегралы и конечное число элементарных функций. Этот метод, несмотря на громоздкость выражений, по-видимому, наиболее пригоден для численного исследования решения.

Сущность преобразований (1.9) к окончательным формулам для фундаментального решения заключается в следующем. Контурные интегралы в (1.9) содержат подынтегральные функции с особенностями: полюсы в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm i\vartheta$, где ϑ — корень релеевского знаменателя $R(\zeta) = 0$, и точки ветвления радикалов α, β на мнимой оси

$$\zeta = \pm i, \qquad \zeta = \pm\frac{i}{\gamma}, \qquad \gamma < 1$$

Подынтегральные функции однозначны на плоскости с разрезами, проведенными из точек ветвления $\zeta = \pm i$ вдоль своих участков мнимой оси на бесконечность.

Деформация меллиновского контура в контур, охватывающий разрезы, позволяет представить решение в виде суммы слагаемых, определенных по вычетам в полюсах, и некоторых вещественных интегралов (после перехода в контурном интеграле на мнимую ось).

Для краткости в дальнейшем приводятся формулы только для σ_z-компоненты. Заметим также, что поле напряжений может быть записано в автомодельных переменных

$$\xi = \frac{r}{V_s t}, \qquad \eta = \frac{z}{V_s t} \tag{2.1}$$

а компоненты напряжений могут быть представлены формулами

$$\Sigma = \frac{k}{t^*}(\Sigma_0 + \Sigma_R + \Sigma_p) \qquad \left(t^* = \frac{V_s t}{\lambda}, \; k = \frac{mb}{2\pi\lambda}\right) \tag{2.2}$$

Здесь t^* — безразмерное время, k — масштабный множитель размерности напряжения, а Σ_0, Σ_R и Σ_p означают слагаемые, определенные по вычетам в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm i\vartheta$, и вещественные интегралы, сооответственно; функции Σ_0, Σ_R и Σ_p зависят только от переменных ξ, η и от безразмерной характеристики упругой среды γ; плотность в решение нигде явно не входит.

2°. При подготовке формул к расчету следует иметь в виду, что функции Σ_i необходимо представлять в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых возникает от продольного или поперечного потенциала (первого или второго интеграла в (1.9)); так что

$$\Sigma_i = \Sigma_{i\varphi} + \Sigma_{i\psi} \qquad (i = 0,\ R,\ p)$$

Выпишем расчетные формулы для σ_z-компоненты напряжения в фундаментальном решении (2.2)

$$\Sigma_{0\varphi} = -\frac{1}{2(1-\gamma^2)^2}\frac{\eta}{R^7}\{(1-6\gamma^2+3\gamma^4)\eta^4 + 2(1-3\gamma^2)\eta^2\xi^2 + (1-3\gamma^4)\xi^4 + {}$$
$$+ 2(1-\gamma^2)(2\eta^2 - 3\xi^2)\}$$

$$\Sigma_{0\varphi} + \Sigma_{0\psi} = -\frac{3\eta^3}{R^5} \qquad (R = \sqrt{\xi^2+\eta^2})$$

$$\Sigma_{R\varphi} + \Sigma_{R\psi} = \frac{(2-\vartheta^2)^2}{2c_0\vartheta^3}\frac{1}{\sqrt{R_\gamma}}\sin\frac{\Omega_\gamma}{2} - \frac{2\sqrt{1-\vartheta^2}\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{c_0\vartheta^3}\frac{1}{\sqrt{R_1}}\sin\frac{\Omega_1}{2} \tag{2.3}$$

Здесь

$$c_0 = \frac{\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\sqrt{1-\vartheta^2}} + \gamma^2\frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}} - 2 + \vartheta$$

$$R_\gamma = \sqrt{A_\gamma^2 + 4\eta^2\vartheta^2(1-\gamma^2\vartheta^2)}, \qquad A_\gamma = \vartheta^2 - \xi^2 - \eta^2(1-\gamma^2\vartheta^2)$$

$$\Omega_\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta\vartheta\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{A_\gamma} - \pi\varepsilon(A_\gamma) \tag{2.4}$$

Для функций R_1, Ω_1 справедливы формулы (2.4), если в них заменить всюду γ на 1.

Третье слагаемое в (2.2), содержащее вещественный интеграл и отвечающее продольному потенциалу, имеет вид

$$\Sigma_{p\varphi} = -\frac{8}{\pi}\int\limits_1^{1/\gamma}\frac{(2-\lambda^2)^2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda^2 P(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{R_\gamma(\lambda)}}\sin\frac{\Omega_\gamma(\lambda)}{2}\,d\lambda$$

Здесь

$$P(\lambda) = (2-\lambda^2)^4 + 16(\lambda^2-1)(1-\gamma^2\lambda^2) \tag{2.5}$$

Функции $R_\gamma(\lambda)$ и $\Omega_\gamma(\lambda)$ вычисляются по формулам (2.4) с заменой ϑ на λ.

Третье слагаемое, отвечающее поперечному потенциалу

$$\Sigma_{p\psi} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_1^{1/\gamma} A(\lambda)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)d\lambda + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_1^{1/\gamma} B(\lambda)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)d\lambda \tag{2.6}$$

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 - (\lambda - \eta\sqrt{\lambda^2-1})^2}, \qquad r_2 = \sqrt{\xi^2 - (\lambda + \eta\sqrt{\lambda^2-1})^2}$$

$$A(\lambda) = \frac{16(\lambda^2-1)(1-\gamma^2\lambda^2)}{\lambda^2 P(\lambda)}, \qquad B(\lambda) = \frac{4(2-\lambda^2)^2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda^2 P(\lambda)}$$

имеет различное представление в подобластях области *2*, разделенных прямой $\xi = 1$, и одно и то же представление в области *1*

$$\Sigma_{p\psi_1} = \frac{1}{\pi}\int_1^{\lambda'} B(\lambda)\left[\frac{1}{\sqrt{(\lambda+\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}}\right]d\lambda \tag{2.7}$$

Выпишем, наконец, вещественные интегралы в области *2* при $\xi > 1$

$$\Sigma_{p\psi} = \frac{1}{\pi}\int_1^{\lambda'} \frac{A(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\xi^2-(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda'}^{1/\gamma} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_1^{\lambda''} \frac{A(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\xi^2-(\lambda+\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda''}^{1/\gamma} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda+\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} \tag{2.8}$$

и в области *2* при $\xi < 1$

$$\Sigma_{p\psi} = \frac{1}{\pi}\int_1^{1/\gamma} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda+\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} + \frac{1}{\pi}\int_1^{\lambda''} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\lambda'}^{1/\gamma} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2-\xi^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{A(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\xi^2-(\lambda-\eta\sqrt{\lambda^2-1})^2}} \tag{2.9}$$

В формулах (2.8) и (2.9) через λ' и λ'' обозначены корни уравнений в подкоренных выражениях

$$\lambda' = \frac{\xi + \eta\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}{1-\eta^2}, \qquad \lambda'' = \frac{\xi - \eta\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}{1-\eta^2} \tag{2.10}$$

Рассмотрим вычислительные особенности представления фундаментального решения при помощи точных формул.

Всюду в области возмущения, исключая поверхность сферического фронта поперечной волны, несобственные интегралы в формулах для фундаментального решения (2.7) — (2.9) имеют интегрируемые особенности.

На сферическом фронте продольной волны напряжения могут иметь конечные скачки (ср. (1.11)), а на сферическом фронте поперечной волны как конечные скачки, так и логарифмические особенности.

Так, например, интеграл N_1, входящий в формулы (2.9), описывает конечный скачок при переходе через фронт сферической поперечной волны

$$N_1 = \lim_{\substack{\lambda'\to\lambda_0\\ \lambda''\to\lambda_0}} \frac{1}{\pi}\int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{g(\lambda)}}\,d\lambda = \lim \frac{A(\lambda_0)}{\pi\sqrt{g_1(\lambda_0)}}\int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda'-\lambda)(\lambda-\lambda'')}} = \frac{A(\lambda_0)}{\sqrt{g_1(\lambda_0)}} \tag{2.11}$$

Здесь

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)(\lambda' - \lambda)(\lambda - \lambda''), \quad g_1(\lambda_0) \neq 0$$

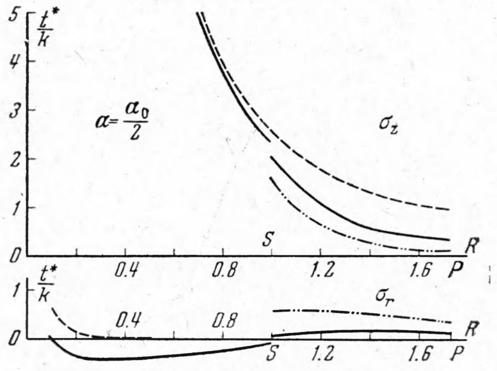
Корни λ', λ'', определенные (2.10), при переходе на фронт $\xi^2 + \eta^2 = 1$ стремятся к общему пределу $\lambda' \to \lambda_0$, $\lambda'' \to \lambda_0$, $\lambda_0 = 1/\xi$.

В формулах для напряжений в окрестности сферической поперечной волны ($\xi^2 + \eta^2 \to 1 + 0$) при $\alpha > \alpha_0$ встречаются и интегралы типа N_2, описывающие логарифмическую особенность решений

$$N_2 = \lim_{\substack{\lambda'' \to \lambda_0 \\ \lambda' \to \lambda_0}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\lambda'' - \varepsilon}^{\lambda''} \frac{B(\lambda)}{\sqrt{g(\lambda)}} d\lambda =$$

$$= -2 \frac{B(\lambda_0)}{\pi \sqrt{g_1(\lambda_0)}} \lim_{\substack{\lambda'' \to \lambda_0 \\ \lambda' \to \lambda_0}} \left[\ln \frac{\sqrt{\lambda' - \lambda''}}{2\sqrt{\varepsilon}} \right] \tag{2.12}$$

Здесь $g(\lambda)$ — та же функция, что и в (2.11), взятая с обратным знаком, а $\varepsilon > 0$ — некоторая малая фиксированная величина.

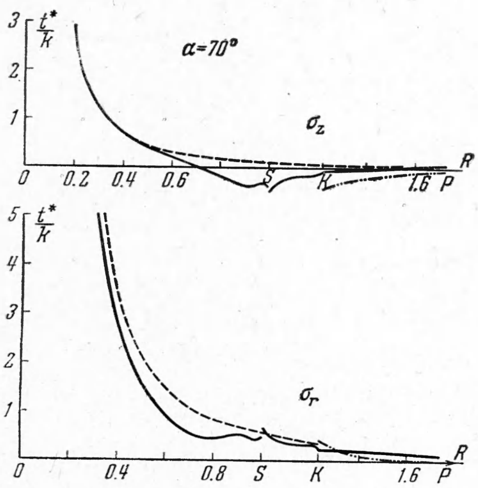


Фиг. 2

На существование логарифмических особенностей полей возмущений при $\alpha > \alpha_0$ было указано в [9] при изучении разрывных полей перемещений в этой же задаче.

Если произвести исследование исходных формул приближенными методами, упомянутыми в § 1.3, то можно доказать, что функции $A(\lambda_0)$ в (2.11) и $B(\lambda_0)$ в (2.12) в точности совпадают с угловыми зависимостями для соответствующих компонент напряжений, т. е. приближенные методы дают точное описание разрывных компонент поля напряжений на фронтах волн.

Результаты расчетов контролировались как при помощи вторичных вычислений, так и путем сравнения с результатами приближенного анализа, дающего точные значения на фронтах волн.



Фиг. 3

3°. Численные исследования проводились для упругой среды с параметрами $\gamma = 1/\sqrt{3}$, $V_p = 4500$ *м/сек* ($V_s = 2600$ *м/сек*).

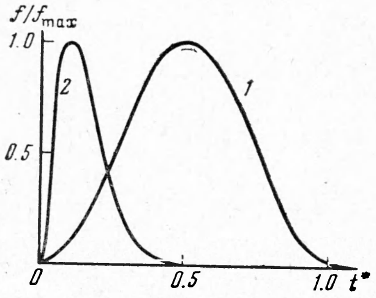
Ниже приводятся некоторые предварительные результаты расчета фундаментального решения.

Теоретические осциллограммы σ_r и σ_z-компонент фундаментального решения в координатах $\sigma(R)t^*/k$ по вертикали и $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ($\xi = R \sin\alpha$) по горизонтали для углов $\alpha = {}^1/_2\, \alpha_0$ и $\alpha = 70°$ даны соответственно на фиг. 2 и 3, где сплошные линии — точное решение, пунктирная — статическое (2.2), штриховая — квазистатическое [11]; индексы P, K, S на оси абсцисс указывают фронты волн (в принятых переменных параметр V_s (или V_p) входит только в вертикальный масштаб, так что вид кривой $\sigma(R)$ зависит только от безразмерных переменных ξ, η и параметра γ).

Первое значение угла выбрано в сравнительно простой области возмущения (луч пересекает сферические фронты продольной и поперечной волн), а второе — ближе к поверхности среды, где луч пересекает фронты всех возмущений, проходящих в среде. На осциллограммах, отвечающих

$\alpha = 70°$, в окрестности сферической поперечной волны должен быть указан логарифмический разрыв, но он наблюдается в столь узкой области, что она не может быть отмечена на фигуре в принятом масштабе. Кроме того, на этих же осциллограммах отмечается слабое проявление релеевских возмущений (при временах, близких ко времени прихода волны R на поверхности).

Отметим важный факт, следующий из расчета: при сжимающей нагрузке на поверхности среды внутри среды появляются области с растягивающими напряжениями на горизонтальных площадках (например, σ_z на фиг. 3 вблизи фронтов волн K и S), при этом переход от сжимающих усилий к растягивающим может происходить довольно резко.



Фиг. 4

Наконец, отметим, что осциллограммы фундаментального решения позволяют указать на непригодность в целом квазистатической теории [1], ограниченность применения которой к изучению поля напряжений на оси симметрии была отмечена в [3]. Как показывает сравнение точных осциллограмм с осциллограммами в случае квазистатического решения, последние не только в несколько раз отличаются по амплитудам от точных решений и не учитывают резких изменений поля, но в отдельных областях неверно указывают знаки напряжений (например, σ_z на фиг. 3).

Расчеты показывают, что в случае необходимости выполнения приближенной оценки поля напряжений можно воспользоваться новым вариантом квазистатической теории, основанным на статических частях точных решений (2.2). В этом случае можно указать достаточно широкую область, в которой предлагаемое квазистатическое решение если и приводит к количественным расхождениям с точным решением, то в качественном отношении сохраняет все особенности поля напряжений, указывая разрывы на фронтах волн, и верные знаки напряжений (фиг. 2 и 3).

§ 3. 1°. Рассмотрим некоторые характерные эпюры «напряжение-время», отвечающие сосредоточенным динамическим нагрузкам (фиг. 4) на поверхности упругой среды типа f_1 и f_2.

В принятой постановке нагрузки типа $f_1(t)$ и $f_2(t)$ выбраны при помощи аппроксимации некоторых реальных сигналов, указанных на основе опыта в [12], при этом $f_1(t)$ и $f_2(t)$ взяты достаточно гладкими ($f(0) = f'(0) = 0$).

При выполнении интегрирования с функцией $f(t)$ в соответствии с (1.3) фундаментальное решение переписывается в зависимости от безразмерного переменного t^* (см. (2.2)).

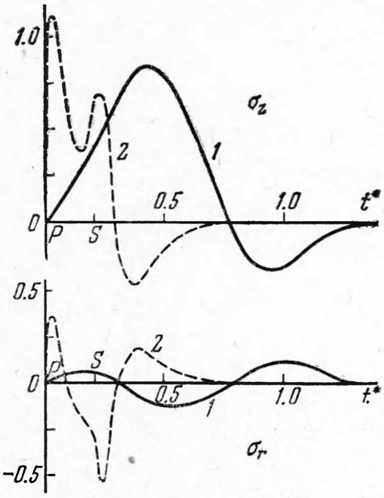
При этом интегрированию были подвергнуты эпюры фундаментального решения без уточнений расчетных величин за счет логарифмической особенности в узкой окрестности сферического фронта поперечной волны, что может, вообще говоря, внести погрешность.

Рассмотрим осциллограммы нормальных напряжений σ_z, отвечающие [2] $\alpha = {}^1/_2\, \alpha_0$ и $\rho = {}^1/_2\, \lambda$, что соответствует достаточно близким расстояниям от источника. Эти осциллограммы (фиг. 5), представляют собой зависимость σ/k от t^*; они отличаются одна от другой много больше, чем вызвавшие их граничные воздействия (фиг. 4). В то же время общим свойством осциллограмм будет наличие растягивающих напряжений в конце записи, в то

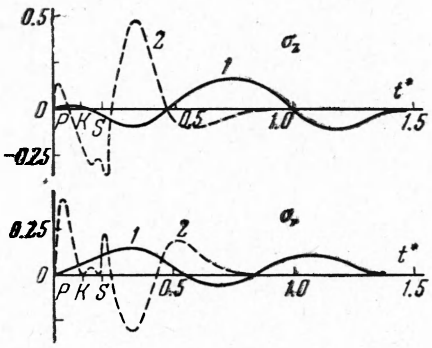
[1] Квазистатическое решение описывает пространственное распределение напряжений как в статике (задача Буссинеска), а временное распределение как в источнике на поверхности [11].

[2] При вычислении длины волны в качестве T была принята длительность положительной фазы сжатия ударной нагрузки и введена скорость поперечных волн.

время как в самих воздействиях растягивающие усилия отсутствовали. Появление зоны растягивающих напряжений на горизонтальной площадке в эпицентральной области ($\alpha < \alpha_0$) является примечательным фактом. Как было отмечено при исследовании фундаментального решения (§ 1 и 3), амплитуды напряжений внутри среды пропорциональны быстроте изменения нагрузки на поверхности во времени (величине m).



Фиг. 5



Фиг. 6

Этим обстоятельством, по-видимому, и поясняется появление растягивающих значений σ_z при $\alpha < \alpha_0$.

Обсуждаемые осциллограммы имеют и отличительные особенности. К ним относится второй пик на записи σ_z-компоненты, отвечающей нагрузке $f_2(t)$ (фиг. 5). Нетрудно установить, что приход этого пика связан с поперечной волной S и отвечает скачку напряжений на сферическом фронте этой волны при $\alpha < \alpha_0$ (или скачку производной напряжения при $\alpha = 0$). Отличительным будет и тот факт, что зона растягивающих напряжений наступает при нагрузке $f_2(t)$ раньше, чем при нагрузке $f_1(t)$, при одинаковой приблизительно длительности этих зон во времени.

Особенности, имеющие аналогичную природу и подчеркивающие различный характер напряжений во внутренних точках при различных типах нагрузки, могут быть отмечены и на осциллограммах σ_r-компоненты напряжений при $\alpha = {}^1/_2\, \alpha_0$ и $\rho = {}^1/_2\, \lambda$.

2°. Зависимость σ/k от t^*, отвечающая $\alpha = 70°$, представлена осциллограммами на фиг. 6. Волновая картина при $\alpha > \alpha_0$ усложнилась как за счет появления поперечной волны с коническим фронтом, так и за счет более сложного изменения напряжений в окрестности сферического фронта поперечной волны. При воздействии импульса колокольного типа ($f_1(t)$ на фиг. 4) на поверхности смена знаков напряжений σ_r и σ_z происходит в момент прохождения сферического фронта поперечной волны, а при нагрузке $f_2(t)$ эта смена наблюдается значительно ранее — в окрестности фронта конической волны. Важно отметить, что смена знаков σ_z-компоненты при различных нагружениях происходит одновременно с максимальными [1] сжимающими усилиями на σ_r-компоненте.

Эти предварительные результаты расчета позволяют сделать ряд качественных выводов, относящихся к механизму хрупкого разрушения твердого тела при динамических нагружениях. При этом следует иметь в виду, что разрушения твердого тела (горной породы, например) скорее наступают при растяжении, чем при сжатии.

а) Вне эпицентральной области ($\alpha > \alpha_0$) поверхность разрушения образуется за счет разрыва по площадкам с вертикальной нормалью, при этом

[1] Имеются в виду относительные максимумы.

разрушение сопровождается сжатием элемента в радиальном направлении.

б) В эпицентральной области ($\alpha < \alpha_0$) поверхность разрушения образуется за счет лицевого откола в момент растяжения в окрестности сферического фронта поперечной волны.

Если на основании расчетов произвести сравнительную оценку поверхностей разрушения при различных типах нагрузок $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (фиг. 4), то следует ожидать при воздействии типа $f_2(t)$ воронку более пологой и выстилающей границы между областями *1* и *3* при $\alpha < \alpha_0$ и между областями *2* и *3* при $\alpha > \alpha_0$; при $f_1(t)$ — более крутой и с поверхностью близкой по форме к поверхности сферического фронта поперечной волны.

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича за предоставление темы и обсуждение результатов, а также Е. И. Шемякина, сделавшего ряд замечаний.

Поступила 15 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Ser. A, 1904, Vol. 203.
2. Смирнов В. И., Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний. Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1932, № 20; 1933, № 29.
3. Огурцов К. И. Волны напряжений в упругой плите. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
4. Петрашень Г. И. Методика построения решений задач на распространение сейсмических волн в изотропных средах, содержащих плоскопараллельные слои. Спр. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. 1, Гостоптехиздат, 1957.
5. Шемякин Е. И., Файншмидт В. Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном касательной поверхностной силой. Уч. зап. ЛГУ, 1954, № 148, вып. 28.
6. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, 1951, № 149, вып. 24.
7. Огурцов К. И. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий. Уч. зап. ЛГУ, 1956, № 208, вып. 30.
8. Маркова К. И., Шемякин Е. И. Распространение нестационарных возмущений в слое жидкости, находящемся в контакте с упругим полупространством. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
9. Davids N. Transient Analysis of stress — wave Penetration in Plates. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, N A — 16.
10. Онисько Н. И., Шемякин Е. И. Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве. ПМТФ, 1961, № 4.
11. Белаенко Ф. А. Исследование полей напряжений и процесса образования трещин при взрыве колонковых зарядов в скальных породах. Сб. Вопросы теории разрушения горных пород действием взрыва. Изд-во АН СССР, 1958.
12. Broberg K. Shock Waves in elastic and elastic - plastic media Stocholm, 1956. (Имеется перевод Броберга К. Б. Ударные волны в упругой и упруго-пластической среде. Госгортехиздат, 1959).