УДК 534.231

К РАСЧЕТУ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ

Д. Н. Горелов

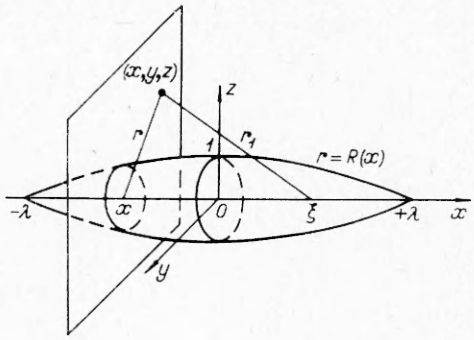
(Новосибирск)

Теоретическое исследование пространственного звукового поля, создаваемого осциллирующим телом ненулевой толщины, представляет собой сложную задачу, решенную практически только для сферы [1].

В данной работе предложен приближенный метод расчета пространственного звукового поля, создаваемого тонким телом вращения при произвольном законе колебаний его поверхности. Полученное решение может быть применено к расчету ближнего звукового поля и присоединенных масс тела вращения, колеблющегося в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим задачу о колебаниях тела вращения в идеальной сжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечном удалении от тела. Введем декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось Ox направлена вдоль оси симметрии тела, а начало координат расположено в его среднем сечении (см. фигуру).

Пусть S — поверхность недеформированного тела, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $r = R(x)$ — уравнение образующей тела вращения, $R_0 = R(0)$, l — половина длины тела, $\lambda = l/R_0$ — удлинение тела, ω — круговая частота колебаний тела, t — время, $\theta = \operatorname{arctg}(z/y)$, $w(x, \theta, t)$ — перемещение поверхности тела по нормали к S, a — скорость звука в покоящейся жидкости, $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости.



Предположим, что

(1) $\lambda \gg 1,\ dR/dx \sim R_0/l;$

(2) $|w| \ll R_0,\ \partial w/\partial x \sim A/l\ (A = \max|w|).$

Предположения (1), (2) позволяют ввести в рассмотрение два малых параметра

$$\varepsilon_1 = R_0/l,\ \varepsilon_2 = A/R_0.$$

Перейдем к безразмерным координатам x, y, z и функциям r, R, отнесенным к R_0, оставляя для них прежние обозначения. Полагая, что тело колеблется по заданному гармоническому закону бесконечно долгое время, представим функцию w и потенциал скорости φ в виде

$$w(x, \theta, t) = A\ \mathrm{Re}\{W(x, \theta)e^{i\omega t}\};$$

(3) $$\varphi(x, y, z, t) = aR_0\ \mathrm{Re}\{\Phi(x, y, z)e^{i\omega t}\}.$$

Предположение (2) позволяет решать задачу об определении потенциала скорости φ вне колеблющегося тела в акустическом приближении. В этом случае функция Φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

(4) $$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} + k^2\Phi = 0 \quad (k = \omega R_0/a)$$

и следующим граничным условиям:

5) $$\nabla\Phi\cdot\mathbf{v} = ik\varepsilon_2 W(x,\ \theta)\ \text{при}\ (x,\ y,\ z)\in S;$$

(6) $$\lim_{r_0\to\infty} r_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_0} + ik\Phi\right) = 0,$$

где $\mathbf{v}$—орт нормали к S; $r_0 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Выражение (5) определяет собой условие непротекания жидкости через поверхность колеблющегося тела, а (6) — принцип излучения. В общем случае функция $W(x,\ \theta)$ имеет вид

(7) $$W(x,\theta) = W_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[W_{1n}(x)\cos n\theta + W_{2n}(x)\sin n\theta].$$

Рассмотрим сначала осесимметричные колебания тела. В этом случае

$$W(x,\ \theta) = W_0(x)$$

и решение уравнения (4) можно строить с помощью непрерывного распределения источников некоторой интенсивности $Q_0(x)$ на отрезке $|x|\leqslant\lambda$. Функция Φ_0, удовлетворяющая уравнению (4) и принципу излучения (6), имеет тогда вид

(8) $$\Phi_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_0(\xi)\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}d\xi,$$

где $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+r^2}$.

Для определения искомой функции $Q_0(\xi)$ имеем следующее интегральное уравнение, получающееся из условия (5) непротекания жидкости через поверхность тела:

(9) $$\frac{1}{\sqrt{1+(R'(x))^2}}\left[-R'(x)\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right] = ik\varepsilon_2 W_0(x)\quad \text{при}\quad r = R(x).$$

Точное решение этого уравнения наталкивается на серьезные трудности. Поэтому целесообразно искать приближенное решение с учетом предположений (1), (2).

Приближенное решение уравнения (9) будем строить, следуя идее метода Франкля — Карпович, развитого для решения задачи обтекания тонкого тела вращения стационарным дозвуковым потоком газа [2].

В качестве первого шага найдем решение соответствующей задачи плоского течения газа около кругового цилиндра, образующегося в сечении $x = \text{const}$ $(|x|\leqslant\lambda)$. Амплитудную функцию потенциала скорости такого течения $\widetilde{\Phi}_0(x,\ r)$ можно определить формулой

(10) $$\widetilde{\Phi}_0(x,r) = \frac{1}{4\pi}\widetilde{Q}_0(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}d\xi = -\frac{i}{4}\widetilde{Q}_0(x)H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(2)}(kr)$ — функция Ганкеля второго рода, а координата x играет роль параметра.

В соответствии с (9) условие непротекания через цилиндр постоянного радиуса $r = R(x)$ имеет вид

$$\partial\widetilde{\Phi}_0/\partial r = ik\varepsilon_2 W_0(x)\ \text{при}\ r = R(x).$$

Отсюда следует

(11) $$\widetilde{Q}_0(x) = 4\varepsilon_2 W_0(x)/H_1^{(2)}(kR).$$

Отметим, что ограниченность первых производных $R'(x)$ и $W_0'(x)$ позволяет представить функцию $\widetilde{Q}_0(\xi)$ на отрезке $|\xi| \leqslant \lambda$ в виде

(12) $$\widetilde{Q}_0(\xi) = \widetilde{Q}_0(x) + F(\xi),$$

где

$$|F(\xi)| \leqslant |\xi - x| M, \quad M = \sup_{|\xi| \leqslant \lambda} |\widetilde{Q}_0'(\xi)|.$$

Из формулы (11) и условий (1), (2) следует

(13) $$\widetilde{Q}_0(x) \sim \varepsilon_2, \quad \widetilde{Q}_0'(x) \sim \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad M \sim \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Покажем теперь, что функция $Q_0 = \widetilde{Q}_0$ является решением уравнения (9) в первом приближении.

Подставим в выражение (8) вместо Q_0 функцию $\widetilde{Q}_0$, определяемую формулой (11). Тогда, воспользовавшись выражением (12), функцию Φ_0 можно записать в виде

(14) $$\Phi_0(x, y, z) = \overline{\Phi}_0(x, r) + \frac{\widetilde{Q}_0(x)}{4\pi}\left[\int_{-\lambda}^{-\infty} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} d\xi + \int_{\infty}^{\lambda} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} d\xi\right] + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{-\lambda}^{+\lambda} F(\xi)\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} d\xi.$$

Вычислим производные Φ_{0r}, Φ_{0x} для точек поверхности S и оценим их порядки. Воспользовавшись формулами (14), (10) и (12), имеем

(15)

$$\Phi_{0r}|_{r=R(x)} = \frac{ik}{4}\widetilde{Q}_0(x) H_1^{(2)}(kR)\left\{1 - \frac{iR}{\pi k H_1^{(2)}(kR)}\left[\int_{-\lambda}^{-\infty} \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right) d\xi + \right.\right. \\ \left.\left. + \int_{\infty}^{\lambda} \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right) d\xi\right]\right\} + \frac{R}{4\pi}\int_{-\lambda}^{+\lambda} F(\xi)\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right) d\xi,$$

где $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + R^2}$.

Оценим порядок интегралов, входящих в это выражение, учитывая, что при всех $|x| \leqslant \lambda$ справедливы соотношения (13) и $R/(\lambda - |x|) \sim \varepsilon_1$.

Для первого интеграла в квадратных скобках имеет место оценка

$$\left|\int_{-\lambda}^{-\infty} \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right) d\xi\right| \leqslant \left|\int_{-\lambda}^{-\infty}\left(\frac{k}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^3}\right) d\xi\right| = \\ = \frac{k}{R}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\lambda + x}{R}\right] + \frac{1}{R^2}\left[1 - \frac{\lambda + x}{\sqrt{(\lambda + x)^2 + R^2}}\right] = \\ = 0(\varepsilon_1/R) + 0(\varepsilon_1^2/R^2).$$

Аналогичную оценку имеет и второй интеграл в квадратных скобках. Если теперь учесть, что при $|x| \leqslant \lambda$ величина $H_1^{(2)}(kR) \sim R^{-1}$, то второе слагаемое в фигурных скобках имеет порядок ε_1. Что касается последнего слагаемого в выражении (15), то

$$R\left|\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} F(\xi)\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)d\xi\right| \leqslant RM\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}|\xi - x|\left(\frac{k}{r_1^2}+\frac{1}{r_1^3}\right)d\xi =$$

$$= RM\left\{\frac{k}{2}\ln\left[(\lambda+x)^2+R^2\right]\left[(\lambda-x)^2+R^2\right] - 2k\ln R + \frac{2}{R} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(\lambda+x)^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\lambda-x)^2+R^2}}\right\} = 0\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\varepsilon_1\right).$$

Таким образом,

$$\Phi_{0r}\big|_{r=R(x)} = \frac{ik}{4}\widetilde{Q}_0(x)\,H_1^{(2)}(kR)\left[1+0(\varepsilon_1)\right] + 0\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\varepsilon_1\right). \tag{16}$$

Для вычисления производной Φ_{0x} удобно воспользоваться формулой (8), полагая $Q_0 = \widetilde{Q}_0$. Тогда с учетом (12)

$$\Phi_{0x}\big|_{r=R(x)} = \frac{\widetilde{Q}_0(x)}{4\pi}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}d\xi + \frac{\widetilde{Q}_0(x)}{4\pi}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}F(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)d\xi.$$

Оценивая интегралы, входящие в это выражение, получим

$$\Phi_{0x}\big|_{r=R(x)} = 0(\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\varepsilon_1) + 0(\varepsilon_1\varepsilon_2/R). \tag{17}$$

Подставляя выражения (16), (17) в условие (9) непротекания жидкости через поверхность тела, получим

$$\nabla\Phi_0\cdot\mathbf{v}\big|_{r=R(x)} = ik\varepsilon_2 W_0(x) + 0(\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\varepsilon_1). \tag{18}$$

Таким образом, функция $\widetilde{Q}_0$ является приближенным решением уравнения (4), отличающимся от точного на величину порядка $\varepsilon_1\ln\varepsilon_1$. В силу корректности краевой задачи (4) — (6) можно утверждать, что формула (8) при $Q_0 = \widetilde{Q}_0$ дает приближенное решение во всей области течения, мало отличающееся от точного.

Пусть теперь тело вращения колеблется по произвольному закону (7) в предположениях (1), (2). Решение краевой задачи (4) — (6) в этом случае можно строить путем линейной комбинации мультидиполей определенного типа. При этом следует различать случаи четной и нечетной зависимости функции $W(x, \theta)$ от переменной θ.

Построим сначала решение для четной функции $W(x, \theta)$. В силу линейности задачи достаточно найти решение для случая

$$W(x,\theta) = W_{1n}(x)\cos n\theta. \tag{19}$$

Отметим, что функция $\cos n\theta$ может быть представлена разложением по степеням $\cos\theta$ вида [3]

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{n}{2j}C_{n-j-1}^{j-1}(2\cos\theta)^{n-2j}, \tag{20}$$

где C_n^m — биномиальные коэффициенты.

В соответствии с выражением (20) решение краевой задачи (4) — (6), (19) можно искать с помощью линейной комбинации мультидиполей типа

$$Q_{1m}(\xi)\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right) \qquad (m=0, 1, \ldots, n),$$

распределенных непрерывно вдоль оси Ox при $|\xi| \leqslant \lambda$. Обозначая это решение через $\Phi_1(x, y, z)$, имеем

$$\Phi_1 = \sum_{m=0}^{n} \Phi_{1m}, \quad \Phi_{1m} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_{1m}(\xi)\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)d\xi. \tag{21}$$

Функции Q_{1m} определяются из условия непротекания (5), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} = ik\varepsilon_2 W_{1n}(x)\cos n\theta \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in S. \tag{22}$$

Подставляя выражение (21) в условие (22) и учитывая, что $y = r\cos\theta$, а $\cos n\theta$ выражается через степени $\cos\theta$ с помощью соотношения (20), придем к системе интегральных уравнений относительно функций $Q_{1m}(m = 0, \ldots, n)$. Полученную систему будем решать приближенно с помощью предложенного выше метода. Следуя этому методу, найдем решение соответствующей краевой задачи плоскопараллельного течения жидкости около бесконечного цилиндра с радиусом $r = R(x)$, где x играет роль параметра. Амплитудная функция потенциала скорости такого течения $\widetilde{\Phi}_{1m}$, создаваемого мультидиполем с интенсивностью $\widetilde{Q}_{1m}(x)$, определяется формулой

$$\widetilde{\Phi}_{1m}(x, r, \theta) = -\frac{i}{4}\widetilde{Q}_{1m}(x)\frac{\partial^m}{\partial y^m}H_0^{(2)}(kr),$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Потребуем, чтобы

$$\partial\Phi_{1m}/\partial\nu = \partial\widetilde{\Phi}_{1m}/\partial r \qquad \text{при } r = R(x).$$

Тогда по аналогии с выводом соотношения (18), можно показать, что

$$Q_{1m} = Q_{1m} + O(\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\varepsilon_1), \tag{23}$$

в то время как функция $\widetilde{Q}_{1m}$ является величиной порядка ε_2.

Подставляя теперь выражение (21), в котором $\Phi_{1m} = \widetilde{\Phi}_{1m}$, в граничное условие (22), получим линейную систему алгебраических уравнений для определения величин $\widetilde{Q}_{1m}(m = 0, \ldots, n)$. Заменяя далее в формуле (21) функции Q_{1m} на $\widetilde{Q}_{1m}$, получим искомое приближенное решение задачи (4) — (6) для случая колебаний тела по закону (19).

Аналогичным путем строится решение задачи (4) — (6) при колебаниях тела по закону

$$W(x, \theta) = W_{2n}(x)\sin n\theta. \tag{24}$$

Учитывая, что [3]

$$\sin n\theta = \sin\theta\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}C_{n-j}^{j}(2\cos\theta)^{n-2j+1},$$

решение Φ_2 этой задачи можно искать в виде

$$(25)\qquad \Phi_2=\sum_{m=1}^{n}\Phi_{2m},\quad \Phi_{2m}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}Q_{2m}(\xi)\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)\right\}d\xi.$$

Тем же путем строится и приближенное решение задачи (4) — (6). В частности, амплитудная функция $\widetilde{\Phi}_{2m}$ соответствующего плоскопараллельного течения около цилиндра $r=R(x)$ определяется формулой

$$\widetilde{\Phi}_{2m}(x,r,\theta)=-\frac{i}{4}\widetilde{Q}_{2m}(x)\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(H_0^{(2)}(kr)\right)\right\},$$

а функции $\widetilde{Q}_{2m}$ — решением системы алгебраических уравнений, получающихся из условия непротекания.

Можно снова показать, что $\widetilde{Q}_{2m}$ является приближенным решением для Q_{2m} с оценкой типа (23).

В рамках акустического приближения гидродинамическое давление p в жидкости, создаваемое осциллирующим телом, определяется интегралом Коши — Лагранжа

$$(26)\qquad p-p_\infty=-\rho\partial\varphi/\partial t,$$

где p_∞ — давление в покоящейся жидкости; ρ — плотность жидкости.

Введем безразмерную функцию давления $C_p(x,\ y,\ z,\ t)$, полагая

$$(27)\qquad p-p_\infty=(1/2)\rho a^2C_p.$$

В соответствии с выражениями (26), (27) и (3)

$$(28)\qquad C_p=-2k\ \mathrm{Re}\ \{i\Phi e^{i\omega t}\}.$$

Выясним асимптотику решения в некотором направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{l}=(l_x,\ l_y,\ l_z)$. Обозначим

$$r=\sqrt{y^2+z^2},\ r_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}.$$

Полагая $|\xi|\leqslant\lambda,\ r_0\gg\lambda$, имеем

$$r_1=r_0-\frac{x\xi}{r_0}+0\left(r_0^{-1}\right),\quad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_0}+0\left(r_0^{-2}\right).$$

Отсюда следует

$$(29)\qquad \frac{e^{-ikr_1}}{r_1}=\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\left[e^{ikl_x\xi}+0\left(r_0^{-1}\right)\right].$$

Подставляя выражение (29) в формулу (8), получим

$$(30)\qquad \Phi_0(x,y,z)=\frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda}Q_0(\xi)\,e^{ikl_x\xi}d\xi+0\left(r_0^{-2}\right).$$

Формулы (28), (30) определяют асимптотику решения в направлении вектора $\mathbf{l}$ для случая осесимметричных колебаний тела.

Для получения асимптотических формул в случае колебаний тела по законам (19), (24) следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)=(-ik)^m\left(\frac{y}{r_0}\right)^m\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}+0\left(r_0^{-2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)=(-ik)^m\frac{z}{r_0}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{m-1}\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}+0\left(r_0^{-2}\right),$$

$$z/r_0 = \sqrt{1 - l_x^2}\sin\theta, \quad y/r_0 = \sqrt{1 - l_x^2}\cos\theta.$$

С учетом этих выражений формулы (21), (25) для амплитудных функций Φ_1, Φ_2 при $r_0 \gg \lambda$ можно представить в виде

(31)

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0}\sum_{m=0}^{n}\left(-ik\sqrt{1 - l_x^2}\cos\theta\right)^m \int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_{1m}(\xi)\, e^{ikl_x\xi}d\xi + 0\left(r_0^{-2}\right);$$

(32)

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0}\sin\theta\sum_{m=1}^{n}\left(-ik\sqrt{1 - l_x^2}\right)^m \cos^{m-1}\theta \times$$

$$\times \int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_{2m}(\xi)\, e^{ikl_x\xi}d\xi + 0\left(r_0^{-2}\right).$$

Из формул (31), (32) следует, что в случае низкочастотных колебаний тела, когда параметр $k = \omega R_0/a \ll 1$, основной вклад в звуковое поле вдали от осциллирующего тела вносят осесимметричные его колебания.

Поступила 7 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морз Ф.** Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
2. **Франкль Ф. И., Карпович Е. А.** Газодинамика тонких тел. М., ОГИЗ, 1948.
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

УДК 532.5 : 539.37

УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

В. П. Ястребов

(Ленинград)

Вопросы воздействия ударных нагрузок на безграничные пластины, контактирующие с жидкостью, рассматривались в ряде работ [1—9]. В работах [1—6] изучалась осесимметричная деформация пластин, работы [1, 7—9] посвящены плоской задаче. Исследования выполнялись в разных постановках. Рассматривались различные виды нагружения пластин (воздействие акустических волн давлений, сосредоточенных сил или распределенных нагрузок; задание скорости движения). Деформация пластин описывалась разными уравнениями (уравнением прогиба мембраны, уравнением изгиба Бернулли — Эйлера или уравнением типа Тимошенко). Основным методом решения этих задач является метод интегральных преобразований. В процессе решения определенные затруднения возникают при переходе от изображений к оригиналам. С еще большими трудностями приходится сталкиваться при анализе решения и получении конкретных числовых результатов по оригиналам, записанным в виде сложных однократных или двойных интегралов. Поэтому в ряде работ [3, 5, 8] решение ограничивается записью формул в квадратурах, в других исследованиях [1, 2, 4, 6, 9] задача решена асимптотическими методами, справедливыми в определенном диапазоне