

Р и с. 5

несовпадение. Оболочка теряет устойчивость в верхней части с образованием шести ярко выраженных продольных складок. В силу плоскостной симметрии оболочки и нагрузки из оболочки вырезалась четвертая часть, которая в продольном и поперечном направлениях разбивалась на n криволинейных прямоугольных конечных элементов естественной кривизны.

На рис. 5 представлен график сходимости решения (определения критической нагрузки) по числу конечных элементов n . Видна достаточно хорошая сходимость решения. Результаты расчетов сравнивались с решением на сетке 16×16 . Разработанный алгоритм позволяет стандартно исследовать устойчивость оболочек при произвольных нагрузках и начальных прогибах. При этом форма потери устойчивости не связывается с формой начальных прогибов.

Результаты расчетов сравнивались с решением на сетке 16×16 . Разработанный алгоритм позволяет стандартно исследовать устойчивость оболочек при произвольных нагрузках и начальных прогибах. При этом форма потери устойчивости не связывается с формой начальных прогибов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов В. В., Железнов Л. П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика.— 1985.— Т. 21, № 9.
2. Кабанов В. В., Железнов Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричном внешнем давлении методом конечных элементов // Прикл. механика.— 1981.— Т. 17, № 3.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974.
4. Райни, Уилкинсон. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра.— М.: Машиностроение, 1976.
5. Григольок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1978.

г. Новосибирск

Поступила 6/X 1987 г.,
в окончательном варианте —
16/II 1988 г.

УДК 539.376+539.4

А. Л. Аршакуни

ОБОБЩЕННАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

В [1] предложена обобщенная кинетическая модель ползучести и длительной прочности металлов при отсутствии эффекта упрочнения:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= Bf(\sigma) \exp(qa), \quad p(0) = 0, \\ \dot{a} &= L\varphi(\tau) \exp(\kappa a), \quad a(0) = a_0, \quad a(t_*) = a_*. \end{aligned}$$

Здесь p — деформация ползучести; σ — напряжение; a — структурный параметр; t_* — время до разрушения; $B, L, q, \kappa, a_0, a_*$ — постоянные материала; $q \geq 0; B \geq 0; L \geq 0$; функции f, φ определены с точностью до постоянного множителя; точка обозначает дифференцирование по времени t ; температура предполагается фиксированной.

Модель (1) — обобщение четырех классических моделей второй и третьей стадии ползучести [1]. Она не описывает стадию упрочнения, которая обычно удовлетворительно соответствует теории упрочнения:

$$(2) \quad \dot{p} = f_1(\sigma)p^{-\lambda}, \quad p(0) = 0$$

(λ — постоянная материала).

Существуют две достаточно апробированные теории, учитывающие эффект упрочнения. Деформационное соотношение [2, 3]

$$(3) \quad \dot{p} = f_1(\sigma)p^{-\lambda} \exp(\alpha p), \quad p(0) = 0$$

(α — постоянная материала). Энергетическое соотношение [4—6]

$$(4) \quad \dot{A} = f_2(\sigma)A^{-\lambda}/\Psi(A),$$

где $A = \int_0^t \sigma dp$ — удельная энергия рассеяния при ползучести; при $\lambda = 0$ (отсутствие эффекта упрочнения) $\Psi(A) = (A_* - A)^\alpha$; A_* , α — постоянные материала.

В данной работе предложено обобщение (1), которое на первой стадии эквивалентно теории упрочнения (2) и содержит соотношения (3), (4) в качестве частных случаев.

При наличии эффекта упрочнения соотношение (4) прошло экспериментальную проверку в условиях стационарного нагружения. В этом случае на стадии неустановившейся ползучести ($\Psi(A) = \text{const}$) модель (4) эквивалентна теории упрочнения. В условиях нестационарного нагружения (2) соответствует эксперименту лучше энергетической модели [7, 8]. Эффекты, наблюдаемые иногда в условиях ступенчатого и кратковременного увеличения нагрузки, имеют сложную природу и не могут быть описаны ни теорией упрочнения, ни моделями типа (4) [8]. Поэтому для описания неустановившегося участка в модель (1) необходимо ввести второй структурный параметр — деформацию ползучести. Тогда с учетом подобия кривых ползучести и уравнения (2) модель (1) примет вид

$$\dot{p} = Bf p^{-\lambda_1} \exp(qa), \quad \dot{a} = L\varphi p^{-\lambda_2} \exp(\kappa a)$$

(λ_1, λ_2 — постоянные материала). Для того чтобы модель (4) была частным случаем этого соотношения, необходимо положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Окончательно получим

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= Bf(\sigma)p^{-\lambda} \exp(qa), \quad p(0) = 0, \\ \dot{a} &= L\varphi(\sigma)p^{-\lambda} \exp(\kappa a), \quad a(0) = a_0, \quad a(t_*) = a_*. \end{aligned}$$

На первой стадии ($a = a_0$) модель (5) эквивалентна (2).

Рассмотрим частные случаи модели (5).

1. $q = \kappa(r = \infty)$, тогда $a = a_0 + zL/B \left(z = \int_0^t \frac{\varphi(\sigma)}{f(\sigma)} dp \right)$ и модель (5) может

быть записана как

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= D\varphi(\sigma)p^{-\lambda} \exp(\alpha z), \quad z(0) = 0 \quad (\alpha = qL/B, \\ D &= B \exp(qa_0)). \end{aligned}$$

При $f = \varphi(z \equiv p)$ модели (6) и (3) эквивалентны. В условиях постоянного напряжения $p = (f/\varphi)z$ и уравнение (6) имеет вид

$$(6') \quad \begin{aligned} \dot{z} &= D\Phi(\sigma)z^{-\lambda} \exp(\alpha z), \quad z(0) = 0 \\ (\Phi(\sigma) &= [f(\sigma)]^{-\lambda} [\varphi(\sigma)]^{1+\lambda}). \end{aligned}$$

При $q \neq \kappa$ в уравнениях (5) удобно произвести замену переменной

$$l = \text{sgn}(r) \frac{B}{L(q - \kappa)} \exp\{a(q - \kappa)\};$$

$$(5') \quad \dot{p} = Df(\sigma)p^{-\lambda} l^r, \quad \dot{l} = \text{sgn}(r) D\varphi(\sigma)p^{-\lambda} l^r, \quad l(0) = l_0, \quad l(t_*) = l_*,$$

$$\text{где} \quad r = \frac{\dot{q}}{q - \kappa}; \quad D = B \left[\text{sgn}(r) \frac{Lq}{Br} \right]^r; \quad \text{sgn}(r) = \begin{cases} 1, & r > 0, \\ -1, & r < 0. \end{cases}$$

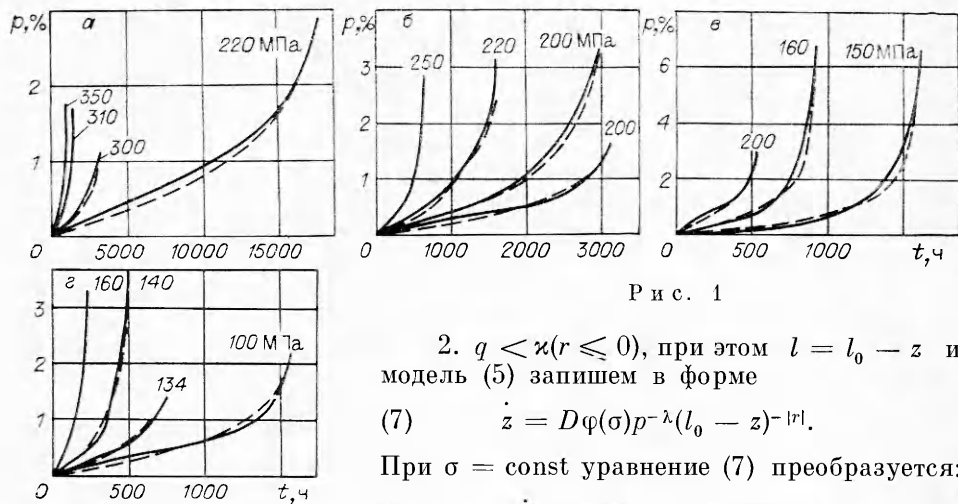


Рис. 1

2. $q < \kappa(r \leq 0)$, при этом $l = l_0 - z$ и модель (5) запишем в форме

$$(7) \quad \dot{z} = D\varphi(\sigma)p^{-\lambda}(l_0 - z)^{-|r|}.$$

При $\sigma = \text{const}$ уравнение (7) преобразуется:

$$(7') \quad \dot{z} = D\Phi(\sigma)z^{-\lambda}(l_0 - z)^{-|r|}.$$

При $\varphi(\sigma) = \sigma f(\sigma)(z \equiv A)$ модель (7') отвечает энергетической модели (4).

3. $q > \kappa(r \geq 0)$, тогда $l = l_0 + z$ и модель (5) принимает вид

$$(8) \quad \dot{z} = D\varphi(\sigma)p^{-\lambda}(l_0 + z)^r.$$

При постоянном напряжении

$$(8') \quad \dot{z} = D\Phi(\sigma)z^{-\lambda}(l_0 + z)^r.$$

В общем случае в модели (5) необходимо найти пять постоянных материала (две постоянные, например L, κ , могут быть выбраны произвольно [1]): D, λ, r, l_0, z_* , где $z_* = z(t_*)$, и две функции $f(\sigma), \varphi(\sigma)$. Постоянная D и функция $\varphi(\sigma)$ определяются по кривой длительной прочности $t_{**} = t_{**}(\sigma)$. Функция $f(\sigma)$ находится из условия подобия кривых $[\varphi(\sigma)/f(\sigma)]p$ при различных напряжениях (в частности, из условия $(\varphi/f)p(t_*) = \text{const}$). Постоянные λ, r, l_0 получаются из приведенной кривой ползучести $t/t_* = V(p, \lambda, r, l_0)$.

Для упрощения расчетов важно иметь аналитическое выражение функции V , что возможно только для целых значений $\lambda = 1, 2, \dots$. Как показали вычисления, это допущение действительно может быть принято при $\lambda > 1$. При $\lambda < 1$ участок неустановившейся ползучести, как правило, выражен слабо, и при учете третьей стадии им можно пренебречь. В качестве примера на рис. 1 сплошными линиями представлены данные [9] о ползучести жаропрочного никелевого сплава ЭИ826. В табл. 1 приведены значения постоянной λ , найденной по начальным участкам кривых ползучести. В первом приближении экспериментальные

данные удовлетворительно описываются соотношением (6) с $\lambda = 0$. При этом деформация ползучести [1]

$$(9) \quad p = H(\sigma) \ln(1 - ct/t_*)^{-1}$$

$$(H(\sigma) = (1/\alpha) f(\sigma)/\varphi(\sigma), \quad c = 1 - \exp(-\alpha z_*)).$$

Расчетные значения H и c представлены в табл. 2, где значения температуры соответствуют рис. 1, а—г. Штриховые линии, построенные по соотношению (9), удовлетворительно описывают экспериментальные результаты.

Таблица 2

$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{МПа}$	$H, \%$	ϵ	$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{МПа}$	$H, \%$	ϵ
750	220	1,028	0,9405	850	150	0,809	0,9997
	300	0,4017	0,9353		160	1,035	0,9986
	310	0,4025	0,9854		200	1,183	0,9086
	350	0,52	0,9641				
800	200	0,5263	0,9573	880	100	0,7155	0,9528
	200	1,017	0,9622		134	0,67	0,9748
	220	0,869	0,9727		140	0,8384	0,9871
	250	0,747	0,9764		160	0,872	0,977

В общем случае, согласно модели (5), кривые ползучести запишем в виде

$$(5'') \quad t/t_* = [J(z) - J(0)]/[J(z_*) - J(0)],$$

$$\text{где } J(z) = \begin{cases} \int z^\lambda \exp(-\alpha z) dz, \\ \int z^\lambda (l_0 - z)^{|r|} dz, \\ \int z^\lambda (l_0 + z)^{-r} dz \end{cases}$$

для случаев 1—3 соответственно. При $\lambda = 1, 2, \dots$, интегрируя указанные соотношения, для случаев 1—3 получим

$$(6'') \quad J(z) = -\exp(-\alpha z) \sum_{k=0}^{\lambda} J_k(z)/\alpha^{k+1};$$

$$(7'') \quad J(z) = (l_0 - z)^{|r|+1} \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{J_k(z) l_0^k}{(\lambda + |r| + 1)(\lambda + |r|) \dots (\lambda + |r| - k + 1)};$$

$$(8'') \quad J(z) = \begin{cases} (l_0 + z)^{1-r} \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k \frac{J_k(z) l_0^k}{(\lambda - r + 1)(\lambda - r) \dots (\lambda - r - k + 1)}, & r \neq 1, \\ \sum_{k=0}^{\lambda-1} (-1)^k \frac{J_k(z) l_0^k}{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k)} + (-1)^\lambda l_0^\lambda \ln(l_0 + z), & r = 1. \end{cases}$$

Здесь $J_k(z) = \begin{cases} z^\lambda, & k=0, \\ \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1) z^{\lambda-k}, & k=1, 2, \dots, \lambda. \end{cases}$

В общем случае в соотношении (5'') необходимо найти три постоянные: λ, r (или α), l_0 ; λ определяется по участкам неустановившейся ползучести согласно (2), две другие — численно. В частности, когда число постоянных может быть сокращено до двух [1]: случаи 1, 2 с $l_0 = z_*$, 3 с $l_0 = 0$ и т. д., обе постоянные могут быть определены численно в соответствии с соотношениями (5'')—(8'').

На рис. 2 ($T = 565^\circ\text{C}$) показаны кривые ползучести стали ЭП44 [3]. Процесс ползучести ЭП44 удовлетворительно описывается деформационной моделью ($z \equiv p$), значение r оказывается достаточно большим ($|r| \approx 10$), поэтому в качестве расчетного принято $r = \infty$. При $\lambda = 1$ соотношения (5''), (6'') запишем в виде

$$(6''') \quad \frac{t}{t_*} = \frac{1/\alpha^2 - \exp(-\alpha p)(p/\alpha + 1/\alpha^2)}{1/\alpha^2 - \exp(-\alpha p_*)(p_*/\alpha + 1/\alpha^2)}.$$

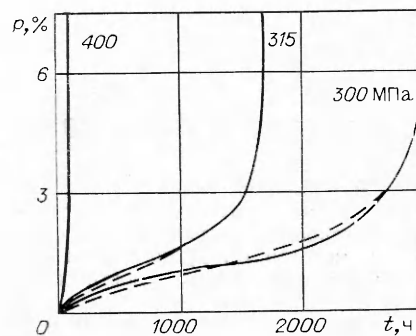
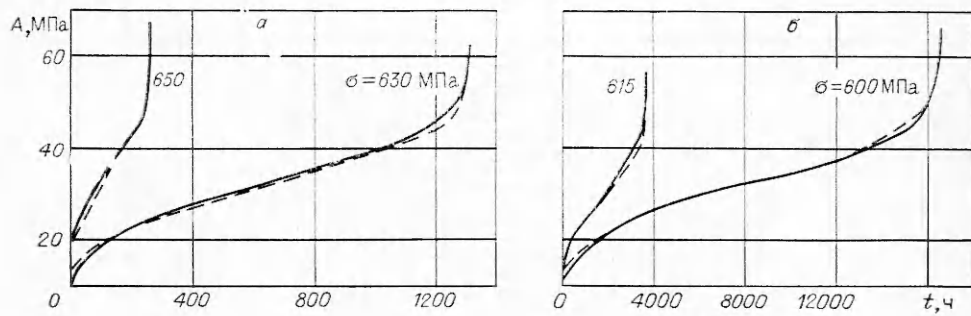


Рис. 2



Р и с. 3

Как видно из рис. 2, штриховые линии, построенные по (6''') с $p_* = 7,5\%$, $\alpha = 1,3$, удовлетворительно отвечают сплошным (эксперимент).

На рис. 3 представлены диаграммы ползучести титанового сплава ЗВ при нормальной температуре [4] (20°C). Здесь реализуется энергетическая модель $z \equiv A$. Из вычислений видно, что процесс ползучести описывается случаем 2 с $\lambda = 5$. При этом может быть приближенно принято $l_0 = A_*$ [4] и соотношения (5''), (7'') преобразуются:

$$(7''') \quad \frac{t}{t_*} = 1 - (1 - A/A_*)^{|r|+1} \sum_{k=0}^5 \frac{(|r|+1) \dots (|r|+k)}{k!} \left(\frac{A}{A_*}\right)^k.$$

Штриховые линии, построенные по соотношению (7''') с $r = -4,8$, удовлетворительно совпадают со сплошными (эксперимент).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршакуни А. Л. Кинетический вариант теории ползучести и длительной прочности металлов // ПМТФ.— 1986.— № 3.
2. Трунин И. И. Об одном варианте уравнения состояния при ползучести // Деформирование и разрушение твердых тел.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Лепин Г. Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности.— М.: Металлургия, 1976.
4. Соснин О. В. Оценка длительной прочности по диссипативным характеристикам // Закономерности ползучести и длительной прочности.— М.: Машиностроение, 1983.
5. Горев Б. В., Никитенко А. Ф., Соснин О. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести // Пробл. прочности.— 1976.— № 11.
6. Соснин О. В., Шокало И. К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // Пробл. прочности.— 1974.— № 1.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
8. Аршакуни А. Л., Мельников Г. П. и др. Экспериментальная проверка моделей неустановившейся ползучести // Пробл. прочности.— 1981.— № 4.
9. Киселевский В. Н., Косов Б. Д. Экспериментальная проверка уравнения состояния для процесса ползучести упрочняющегося материала // Пробл. прочности.— 1976.— № 9.

г. Москва

Поступила 16/II 1988 г.

УДК 639.3

А. Г. Колпаков

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНОК

В работе на основании выполненных в [1] асимптотических исследований задачи теории упругости в тонких (толщины $h \rightarrow 0$) областях проведено вычисление жесткостных характеристик слоистых пластинок. Применение к полученным формулам методов [2, 3] позволило решить задачу проектирования слоистых пластинок с заданным набором жесткостных характеристик.

Определяющие уравнения слоистых пластинок. В [1] проведен асимптотический анализ задачи теории упругости в тонкой области, толщина h которой стремится к нулю, и обоснованы два метода, которые могут быть