

**ВЛИЯНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ  
ПЛОСКОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ**

*Ю. П. Ладиков, В. Ф. Ткаченко*

(Киев)

Рассматривается задача о свободной конвекции в условиях фазового перехода. Методом малых возмущений исследуется устойчивость фронта кристаллизации. Приведены критические значения параметров и рассчитаны области неустойчивости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из жидкой и твердой фаз. В невозмущенном состоянии жидкая фаза занимает область  $0 < z < l$ , твердая — область  $l < z < H$ . Плоскость  $z = l$  является границей фазового перехода и имеет постоянную температуру, равную температуре плавления  $T_*$ . На плоскости  $z = 0$  задана температура  $T_0$ .

Из уравнения теплопроводности следует, что в состоянии равновесия для жидкой фазы

$$dT/dz = (T_* - T_0)/l = \beta = \text{const} \quad (1.1)$$

Для твердой фазы, учитывая (1.1) и условие равенства потоков тепла на границе раздела фаз, получим, что в состоянии равновесия

$$dT_1/dz = \sigma\beta, \quad \sigma = \kappa/\kappa_1 \quad (1.2)$$

где  $T$  и  $T_1$  — температуры жидкой и твердой фаз,  $\kappa$  и  $\kappa_1$  — коэффициенты теплопроводности.

Пусть величины, характеризующие рассматриваемое состояние, в том числе и поверхность фронта кристаллизации, испытывают малые возмущения. Уравнения возмущенного состояния для твердой и жидкой фаз могут быть линеаризованы и записаны в безразмерном виде. Если в качестве характерных величин скорости, времени, длины и температуры выбрать соответственно  $\chi_0/l$ ,  $l^2/\nu$ ,  $l$ ,  $T_0 - T_*$ , то числа Прандтля  $Pr$  и Рэлея  $Ra$

$$Pr = \nu/\chi_0, \quad Ra = g\alpha_0(T_0 - T_*)l^3/\chi_0\nu$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi_0$  — коэффициент температуропроводности в жидкой фазе,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha_0$  — коэффициент объемного расширения жидкой фазы.

Решение системы уравнений возмущенного состояния ввиду однородности задачи по горизонтальным координатам  $x$ ,  $y$  и времени  $t$  можно искать в виде волн

$$\varphi = \Phi(\xi) \exp i(m\xi + n\eta - \omega\tau)$$

Здесь  $\varphi$  — любая из безразмерных характеристик возмущенного течения,  $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ ,  $\zeta = z/l$ ,  $\tau = tv/l^2$ .

После преобразований система уравнений, описывающая возмущенное состояние в жидкой фазе, может быть приведена [1] к одному уравнению

относительно амплитуды возмущения температуры  $\Theta$

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2\right)\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega\right)\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + \text{Pr } i\omega\right)\Theta + k^2 \text{Ra } \Theta = 0 \quad (1.3)$$

$(k^2 = m^2 + n^2)$

Амплитуды возмущений скорости  $U$ ,  $V$ ,  $W$  при этом выражаются через возмущение температуры следующим образом:

$$W(\zeta) = -\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + \text{Pr } i\omega\right)\Theta, \quad mU + nV = i \frac{dW}{d\zeta} \quad (1.4)$$

Уравнение для амплитуды возмущения температуры в твердой фазе  $\Theta_1$  имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + \text{Pr } q^{-1} i\omega\right)\Theta_1 = 0, \quad q = \chi_1 / \chi_0 \quad (1.5)$$

где  $\chi_1$  — коэффициент температуропроводности в твердой фазе.

Запишем граничные условия, которые должны удовлетворять амплитуды возмущений. Поверхность  $z = 0$  предполагается жесткой с заданной температурой  $T_0$ , поэтому возмущения температуры и скорости на ней обращаются в нуль. Учитывая (1.4), будем иметь

$$W = \frac{dW}{d\zeta} = \Theta = \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta} = \left(\frac{d}{d\zeta^2} - k^2 + \text{Pr } i\omega\right)\Theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (1.6)$$

На верхней границе твердой фазы рассматривается в дальнейшем два вида граничных условий:

а) условие постоянства температуры

$$\Theta_1 = 0 \quad \text{при } \zeta = a = H/l \quad (1.7)$$

б) условие постоянства потока тепла

$$d\Theta_1/d\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = a \quad (1.8)$$

Рассмотрим условия на границе фазового перехода. Пусть уравнение возмущенной поверхности фазового перехода имеет вид

$$\zeta = 1 + Z \exp i(m\xi + n\eta - \omega\tau) \quad (1.9)$$

Поскольку температура на границе раздела фаз остается постоянной, равной температуре плавления, то возмущения температуры в жидкой и твердой фазах должны обращаться в нуль на поверхности (1.9). Раскладывая температуру возмущенного состояния в окрестности  $\zeta = 1$  в ряд Тейлора, найдем

$$\Theta = Z, \quad \Theta_1 = \sigma Z \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.10)$$

Условие прилипания требует обращения в нуль касательной компоненты скорости на поверхности (1.9). Поэтому

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d^2}{d\zeta^2} k^2 + \text{Pr } i\omega\right)\Theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.11)$$

На возмущенной поверхности фазового перехода должны выполняться также законы сохранения потоков массы и энергии [2]

$$\rho_0(D_n - u_n) = \rho_1 D_n, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1'}{\partial z} - \kappa \frac{\partial T'}{\partial z} = \rho_0 \lambda D_n$$

где  $D_n$  — нормальная скорость поверхности фазового перехода,  $\lambda$  — удель-

ная теплота плавления,  $\rho_0$  и  $\rho_1$  — плотность жидкой и твердой фаз при температуре плавления,  $T_1'$  и  $T'$  — возмущения температуры.

В безразмерном виде для амплитуд характеристик возмущенного состояния с учетом (1.9) эти условия запишутся следующим образом:

$$W = - \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + \text{Pr } i\omega \right) \Theta = - i\omega r Z \quad \left( r = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0} \right) \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\Theta_1}{d\zeta} - \frac{d\Theta}{d\zeta} = - i\omega R Z \quad \left( R = \frac{\rho \lambda \nu}{\kappa (T_0 - T_*)} \right) \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.13)$$

Таким образом, исследование устойчивости плоской границы фазового перехода сводится к задаче на собственные значения для уравнений (1.3), (1.5) при граничных условиях (1.6) — (1.8), (1.10) — (1.13).

2. Доказательство вещественности собственных значений. Уравнение (1.3) можно записать в виде системы двух уравнений

$$k^2 \text{Ra } \Theta = \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega \right) \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 \right) W \quad (2.1)$$

$$W = - \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega \text{Pr} \right) \Theta$$

Для доказательства вещественности собственных значений воспользуемся методом Пэллю и Саусвелла [1]. Умножим первое уравнение (2.1) на  $\bar{W}$ , а второе на  $\bar{\Theta}$  и проинтегрируем в пределах от 0 до 1. Чертой отмечены комплексно-сопряженные величины. Используя граничные условия (1.6), (1.11), получим

$$\int_0^1 W \bar{\Theta} d\zeta = - \Theta'(1) \bar{\Theta}(1) + (J_1^2 + k^2 J_0^2) - i\omega \text{Pr } J_0^2 \quad (2.2)$$

$$k^2 \text{Ra} \int_0^1 \Theta \bar{W} d\zeta = G'(1) \bar{W}(1) + I_2^2 + 2k^2 I_1^2 + k^4 I_0^2 - i\omega (I_1^2 + k^2 I_0^2)$$

Здесь

$$G = \frac{d^2 W}{d\zeta^2} - k^2 W, \quad I_2^2 = \int_0^1 |W''|^2 d\zeta, \quad I_1^2 = \int_0^1 |W'|^2 d\zeta$$

$$I_0^2 = \int_0^1 |W|^2 d\zeta, \quad J_1^2 = \int_0^1 |\Theta'|^2 d\zeta, \quad J_0^2 = \int_0^1 |\Theta|^2 d\zeta$$

Аналогично, умножая уравнение (1.5) на  $\bar{\Theta}_1$  и интегрируя в пределах от 1 до  $a$ , с помощью (1.7), (1.8), (1.10) получим

$$\Theta'(1) \bar{Z} = \frac{1}{\sigma} (-J_{11}^2 - k^2 J_{10}^2 + i\omega q^{-1} \text{Pr } J_{10}^2) \quad (2.3)$$

где  $J_{10}^2, J_{11}^2$  — интегралы, аналогичные  $J_0^2$  и  $J_1^2$ . Подставляя (2.3) в уравнение теплового баланса (1.13), можно определить значение  $\Theta_1'$  при  $\zeta = 1$ , которое затем подставить в первое из соотношений (2.2). Величина  $\Theta$  при  $\zeta = 1$  может быть найдена с помощью (1.10).

Используя безразмерные уравнения возмущенного состояния и второе из равенств (1.4), можно для амплитуды возмущения давления  $\Pi$  получить

$$\Pi(1) = i\omega k^{-2} W'(1) + \text{Pr} k^{-2} G'(1) \quad (2.4)$$

Из граничного условия (1.11) следует:

$$W'(1) = 0$$

Амплитуду возмущения давления на поверхности можно оценить как возмущение гидростатического давления за счет замещения жидкого элемента твердым

$$P(1) \approx -rFr^{-2}Z, \quad Fr^2 = \chi_0^2 / gl^3$$

откуда

$$G'(1) = -\frac{rk^2}{Pr Fr^2} Z \quad (2.5)$$

Из условия (1.12)

$$\bar{W}(1) = i\bar{\omega}r\bar{Z} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) во второе уравнение (2.2) и замечая, что левые части первого и второго уравнений (2.2) являются с точностью до множителя  $k^2Ra$  комплексно-сопряженными, получим

$$-\frac{k^2}{Pr Fr^2} i\bar{\omega} |Z|^2 r^2 + M^2 - i\omega N^2 = -k^2 Ra \left[ \frac{1}{\sigma^2} (-K^2 - i\bar{\omega}q^{-1} Pr J_{10}^2) - \right. \\ \left. - i\bar{\omega}R |Z|^2 - L^2 - i\bar{\omega} Pr J_0^2 \right]$$

Здесь

$$M^2 = I_2^2 + 2k^2 I_1^2 + k^4 I_0^2, \quad N^2 = I_1^2 + k^2 I_0^2 \\ K^2 = I_{11}^2 + k^2 J_{10}^2, \quad L^2 = J_1^2 + k^2 J_0^2$$

Положим  $s = s_r + is_i = -i\omega$  и приравняем в (2.7) действительные и мнимые части

$$[N^2 + k^2 Pr^{-1} Fr^{-2} r^2 |Z|^2 + k^2 Ra (q^{-1} \sigma^{-2} J_{10}^2 + R |Z|^2 + J_0^2)] s_i = 0 \\ [N^2 - k^2 Pr^{-1} Fr^{-2} r^2 |Z|^2 - k^2 Ra (q^{-1} \sigma^{-2} J_{10}^2 + R |Z|^2 + J_0^2)] s_r = \\ = k^2 Ra (L^2 + \sigma^{-2} K^2) - M^2$$

Неустойчивому состоянию соответствует  $s_r > 0$ , устойчивому —  $s_r < 0$ .

Выражение в квадратных скобках в первом уравнении (2.8) не может обращаться в нуль в случае, если  $Ra > 0$ .

Поэтому  $s_i = 0$  ( $\omega_r = 0$ ),  $s$  является величиной вещественной и переход из устойчивого состояния в неустойчивое осуществляется при  $s = 0$  или  $\omega = 0$ .

**3. Определение критических чисел Рэлея и собственных значений.** Величина параметра  $R$  для кристаллических тел обычно очень велика. Из граничного условия (1.13) следует, что собственное значение  $\omega$  мало, в противном случае существовали бы очень большие градиенты температуры. Ввиду этого будем искать решение уравнений (1.3), (1.5) с граничными условиями (1.6) — (1.13) с помощью рядов по малому параметру

$$\Theta = \Theta_0 + \omega \Theta_1 + \dots, \quad \Theta_1 = \Theta_{10} + \omega \Theta_{11} + \dots \quad (3.1)$$

При этом в граничном условии (1.13) сохраним член с произведением  $R\omega$  ввиду большой величины параметра  $R$ . Это позволит определить собственное значение  $\omega$  уже в нулевом приближении. Критическое значение числа Рэлея соответствует  $\omega = 0$ , поэтому выбранный способ приближенного анализа позволяет определить также и критическое число Рэлея.

Для нулевого приближения имеем следующую систему уравнений:

$$(d^2 / d\xi^2 - k^2)^3 \Theta_0 + k^2 Ra \Theta_0 = 0, \quad (d^2 / d\xi^2 - k^2) \Theta_{10} = 0 \quad (3.2)$$

Величины  $\Theta_0$  и  $\Theta_{10}$  должны удовлетворять граничным условиям (нулевой индекс для простоты в дальнейшем опустим)

$$\Theta = \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d^3}{d\zeta^3} - k^2 \right) \Theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (3.3)$$

$$\Theta = Z, \quad \Theta_1 = \sigma^{-1}Z, \quad d^2\Theta/d\zeta^2 = k^2Z \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 \right) \Theta = 0, \quad \sigma \frac{d\Theta_1}{d\zeta} - \frac{d\Theta}{d\zeta} = -i\omega RZ$$

$$\Theta_1 = 0 \quad \text{при } \zeta = a \quad (3.5)$$

или

$$d\Theta_1/d\zeta = 0 \quad (3.6)$$

Из второго уравнения (3.2) и граничных условий для  $\Theta$  получим при  $\zeta = a$  для случаев а) и б) соответственно при  $\zeta = a$

$$\Theta_1 = \frac{Z}{\sigma} \frac{\text{sh } k(a-\zeta)}{\text{sh } k(a-1)} \quad (3.7)$$

или

$$\Theta_1'(1) = -kZ\sigma^{-1}\text{cth } k(a-1) \quad (3.8)$$

и

$$\Theta_1 = \frac{Z}{\sigma} \frac{\text{ch } k(a-\zeta)}{\text{ch } k(a-1)} \quad (3.9)$$

при этом

$$\Theta_1'(1) = -kZ\sigma^{-1}\text{th } k(a-1) \quad (3.10)$$

Подставляя (3.8) и (3.10) в последнее граничное условие (3.4), получим

$$\Theta'(1) = i\omega ZR - kZ\text{cth } k(a-1) \quad (3.11)$$

$$\Theta'(1) = i\omega ZR - kZ\text{th } k(a-1) \quad (3.12)$$

Общее решение первого уравнения (3.2) имеет вид

$$\Theta = a_1 e^{\lambda_1 \zeta} + a_2 e^{-\lambda_1 \zeta} + a_3 e^{\lambda_2 \zeta} + a_4 e^{-\lambda_2 \zeta} + a_5 e^{\lambda_3 \zeta} + a_6 e^{-\lambda_3 \zeta} \quad (3.13)$$

Здесь  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 - k^2)^3 + k^2 \text{Ra} = 0 \quad (3.14)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{k^2 - \alpha}, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt{k^2 + 1/2\alpha(1 \pm i\sqrt{3})}, \quad \alpha = \sqrt[3]{k^2 \text{Ra}}$$

Подставляя (3.13), (3.14) в граничные условия (3.3), (3.4) и (3.11) или (3.12), получим систему уравнений для определения шести произвольных коэффициентов и амплитуды смещения фронта кристаллизации  $Z$ . Поскольку полученная система уравнений оказывается однородной, определитель ее должен обращаться в нуль. Получаем линейные уравнения для определения частоты  $\omega$  в случаях а) и б) соответственно

$$i\omega = \frac{1}{R} \left[ k \text{cth } k(a-1) + \frac{B}{A} \right] \quad (3.15)$$

$$i\omega = \frac{1}{R} \left[ k \text{th } k(a-1) + \frac{B}{A} \right] \quad (3.16)$$

$A$  и  $B$  являются минорами определителя, причем  $A = \varphi(1)$ ,  $B = \varphi'(1)$ , где

$$\varphi(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_3^2 \\ \lambda_1 x_1^2 & -\lambda_1 x_1^2 & \lambda_2 x_2^2 & -\lambda_2 x_2^2 & \lambda_3 x_3^2 & -\lambda_3 x_3^2 \\ e^{\lambda_1 \xi} & e^{-\lambda_1 \xi} & e^{\lambda_2 \xi} & e^{-\lambda_2 \xi} & e^{\lambda_3 \xi} & e^{-\lambda_3 \xi} \\ x_1^2 e^{\lambda_1} & x_1^2 e^{-\lambda_1} & x_2^2 e^{\lambda_2} & x_2^2 e^{-\lambda_2} & x_3^2 e^{\lambda_3} & x_3^2 e^{-\lambda_3} \\ \lambda_1 x_1^2 e^{\lambda_1} & -\lambda_1 x_1^2 e^{-\lambda_1} & \lambda_2 x_2^2 e^{\lambda_2} & -\lambda_2 x_2^2 e^{-\lambda_2} & \lambda_3 x_3^2 e^{\lambda_3} & -\lambda_3 x_3^2 e^{-\lambda_3} \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

$$x_i^2 = \lambda_i^2 - k^2$$

Определитель (3.17) может быть приведен к следующему виду.

$$\varphi(\xi) = \frac{8}{\lambda_1 x_1^2} \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1^2 \Phi_2 - \lambda_2 x_2^2 \Phi_1 & \Lambda_{12} & \lambda_1 x_1^2 \Phi_3 - \lambda_3 x_3^2 \Phi_1 \\ x_1^2 x_2^2 (\lambda_1 S_2 - \lambda_2 S_1) & \Lambda_{22} & x_1^2 x_3^2 (\lambda_1 S_3 - \lambda_3 S_1) \\ \lambda_1 \lambda_2 x_1^2 x_2^2 C_{21} & \Lambda_{32} & \lambda_1 \lambda_3 x_1^2 x_3^2 C_{31} \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

где

$$\Lambda_{12} = x_1^2 \Psi_{23} + x_2^2 \Psi_{31} + x_3^2 \Psi_{12}, \quad \Lambda_{22} = x_2^2 x_3^2 C_{32} - x_1^2 x_3^2 C_{13}$$

$$\Lambda_{32} = x_2^2 x_3^2 (\lambda_3 S_3 - \lambda_2 S_2) + x_1^2 x_2^2 (\lambda_2 S_2 - \lambda_1 S_1) + x_3^2 x_1^2 (\lambda_1 S_1 - \lambda_3 S_3)$$

$$S_i = \operatorname{sh} \lambda_i, \quad C_i = \operatorname{ch} \lambda_i, \quad C_{ij} = C_i - C_j, \quad S_{ij} = S_i - S_j$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j, \quad \Psi_{ij} = \Psi_i - \Psi_j$$

$$\Phi_i = \begin{cases} \operatorname{sh} \lambda_i & \text{для минора } A, \\ \lambda_i \operatorname{ch} \lambda_i & \text{для минора } B, \end{cases} \quad \Psi_i = \begin{cases} \operatorname{ch} \lambda_i & \text{для минора } A \\ \lambda_i \operatorname{sh} \lambda_i & \text{для минора } B \end{cases}$$

Подставляя значения  $\Phi_i$  и  $\Psi_i$  и раскрывая определитель (3.18), найдем

$$A = 48\alpha^3 [\lambda_1 \lambda_2 S_3 x_3^2 (1 - C_1 C_2) + \lambda_1 \lambda_3 S_2 x_2^2 (1 - C_1 C_3) + \lambda_2 \lambda_3 S_1 x_1^2 (1 - C_2 C_3)] \quad (3.19)$$

$$B = 24\alpha^3 [2(C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + S_1 S_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) C_3 \lambda_3 x_3^2 + S_1 S_3 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) C_2 \lambda_2 x_2^2 + S_2 S_3 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) C_1 \lambda_1 x_1^2]$$

При преобразовании (3.18) в (3.19) использовались свойства корней уравнения (3.14).

Величины  $x_2^2$  и  $x_3^2$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ ,  $C_2$  и  $C_3$ ,  $S_2$  и  $S_3$  являются комплексно-сопряженными. Корень  $\lambda_1$  действительный при  $k^2 - \alpha > 0$  и чисто мнимый при  $k^2 - \alpha < 0$ . Соответственно этому  $\operatorname{sh} \lambda_1 = S_1$  может быть действительным и чисто мнимым. Легко показать, что миноры  $A$  и  $B$  являются соответственно значению  $\lambda_1$  одновременно действительными или чисто мнимыми. В самом деле, выражения  $A$  и  $B$  могут быть преобразованы следующим образом:

$$A = 48\alpha^4 [\lambda_1 \{(\gamma + \sqrt{3}\delta) \operatorname{sh} \gamma \cos \delta + (\delta - \sqrt{3}\gamma) \sin \delta \operatorname{ch} \gamma\} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \lambda_1 [(\gamma + \sqrt{3}\delta) \operatorname{sh} 2\gamma + (\delta - \sqrt{3}\gamma) \sin 2\delta]] + \operatorname{sh} \lambda_1 (\gamma^2 + \delta^2) (\operatorname{sh}^2 \gamma - \sin^2 \delta) \quad (3.20)$$

$$B = 24\alpha^4 [2\lambda_1(\gamma^2 + \delta^2)(\operatorname{ch} \gamma \cos \delta - \sqrt{3} \operatorname{sh} \gamma \sin \delta - \operatorname{ch} \lambda_1) + \quad (3.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{sh} \lambda_1 \{[(2k^2 + \alpha)\gamma + \sqrt{3} \delta(\alpha - 2k^2)] \operatorname{sh} 2\gamma - [\sqrt{3} \gamma(\alpha - 2k^2) -$$

$$- \delta(\alpha + 2k^2)] \sin 2\delta\} - \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 (2k^2 + \alpha)(\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \delta)]$$

где

$$\gamma = \operatorname{Re} \lambda_2, \quad \delta = \operatorname{Im} \lambda_2$$

Множители при выражениях  $\lambda_1$  и  $\operatorname{sh} \lambda_1$  являются действительными, поэтому при  $\lambda_1$  действительном выражения  $A$  и  $B$  являются действительными, а при  $\lambda_1$  чисто мнимом — чисто мнимыми, а их отношение всегда действительное. Таким образом, подтверждается результат, полученный в п. 2 о вещественности собственного значения  $s = -i\omega$ .

При больших значениях параметра  $\alpha$  по сравнению с  $k^2$

$$\alpha = \sqrt[3]{k^2 \operatorname{Ra}} \gg k^2, \quad \operatorname{Ra} \gg k^4$$

миноры  $A$  и  $B$  имеют следующие асимптотические выражения:

$$A = 48\alpha^5 i \left( -\sin \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{\alpha} - \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3\alpha}}{2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3\alpha}}{2} \cos \frac{\sqrt{\alpha}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \sqrt{3\alpha} \sin \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} \sqrt{3\alpha} \cos \sqrt{\alpha} \right) \quad (3.22)$$

$$B = 24\alpha^5 \sqrt{\alpha} i \left[ -2 \cos \sqrt{\alpha} + 0.5 \cos 2\sqrt{\alpha} + 0.5 (\sqrt{3} \sin \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \sqrt{3\alpha} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} \sqrt{3\alpha} \cos \sqrt{\alpha}) + 2 (\operatorname{ch} 0.5 \sqrt{3\alpha} \cos 0.5 \sqrt{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{3} \operatorname{sh} 0.5 \sqrt{3\alpha} \sin 0.5 \sqrt{\alpha}) \right]$$

Отношение  $B/A$  для  $\alpha \gg 1$  имеет вид

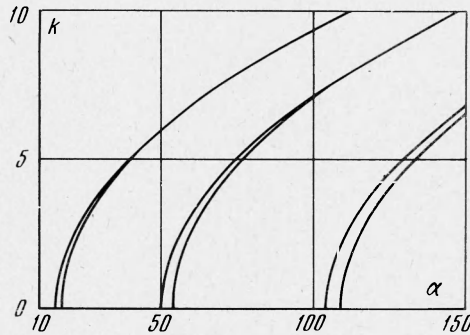
$$\frac{B}{A} = -\frac{\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha} + \varepsilon)}{2 \sin(\sqrt{\alpha} - \varepsilon)} \approx -\frac{\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha} + \pi/3)}{2 \sin(\sqrt{\alpha} - \pi/3)} \quad (3.23)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{3} \operatorname{th} \sqrt{3\alpha} \approx \sqrt{3} = \operatorname{tg} \pi/3$$

Из выражений (3.15) и (3.16) следует, что неустойчивость возникает в узких областях значений параметра  $\alpha$ , в которых  $\cos(\sqrt{\alpha} + \pi/3)$  и  $\sin(\sqrt{\alpha} - \pi/3)$  имеют одинаковые знаки

$$\pi n + \pi/6 < \sqrt{\alpha} < \pi n + \pi/3 \quad (3.24)$$

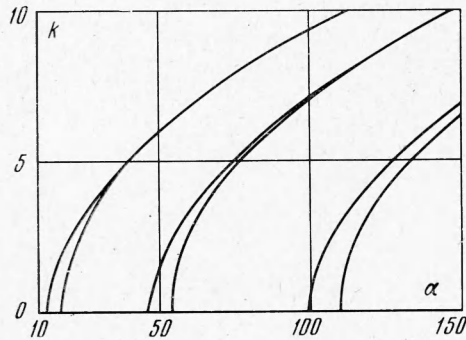
Области неустойчивости в плоскости  $(\alpha, k)$  при  $a = 1.2$ , рассчитанные на ЭЦВМ по формулам (3.15), (3.16), (3.20) и (3.21) показаны на фиг. 1, 2. Фиг. 1 соответствует тому случаю, когда на внешней поверхности твердой фазы температура не меняется. Фиг. 2 соответствует случаю задания на внешней поверхности твердой фазы потока тепла. Как видно из графиков, области неустойчивости при  $k \ll 1$  хорошо соответствуют асимптотической формуле (3.24). С увеличением  $\alpha$  области неустойчивости расширяют-



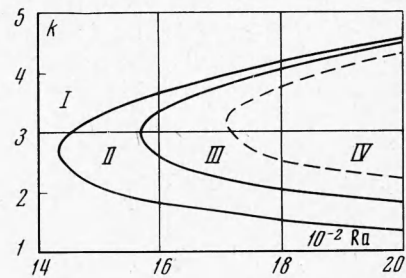
Фиг. 1

ся, а с возрастанием  $k$  суживаются, вытягиваясь в линию. При этом нужно иметь в виду, что точкам  $k = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  на фиг. 1, 2, как следует из определения  $\alpha$  (3.14), соответствуют числа Рэлея  $Ra = \alpha^3 / k^2 = \infty$ .

На фиг. 3 показаны графики кривых нейтральной устойчивости, соответствующие  $\omega = 0$ , на плоскости  $(Ra, k)$ . Критические значения числа Рэлея  $Ra$  и  $k$  равны при  $a = 1.2$  для случая а)  $Ra = 1558$ ,  $k = 2.95$ ; для случая б)  $Ra = 1424$ ,  $k = 2.65$ . Области неустойчивости на фиг. 3: случай а) — III, случай б) — II, III. При возрастании относительной толщины слоя твердой фазы влияние граничного условия на внешней поверхности сказывается меньше и области неустойчивости в обоих слу-



Фиг. 2



[Фиг. 3

чаях а) и б) сливаются. Критические значения параметров также оказываются близкими. Например, при  $a = 2$  и  $a = 6$   $Ra = 1490$ ,  $k = 2.8$ . Проведенный анализ показывает, что развивающаяся конвекция приводит к более раннему возникновению неустойчивости в плоском слое, ограниченном поверхностью кристаллизации, по сравнению со слоем, ограниченным твердыми неподвижными стенками.

Поступила 21 XII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л и н ь Ц з я - ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит. 1958.
2. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.