

УДК 532.592

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ СЛАБОСТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru

Рассмотрена задача о стационарных волнах на поверхности раздела однородной и экспоненциально стратифицированной жидкостей. В предположении, что перепад плотности на границе раздела слоев и градиент плотности жидкости внутри стратифицированного слоя имеют одинаковый порядок малости, выведено уравнение второго приближения теории мелкой воды, описывающее распространение уединенных волн конечной амплитуды.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, слабая стратификация, уединенные волны.

Введение. Л. В. Овсянниковым предложен метод получения уравнений второго приближения теории мелкой воды с использованием частичного разложения искомых величин по степеням малого параметра [1, 2]. В [2] с помощью этого метода выведено дифференциальное уравнение, описывающее стационарные длинные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости с постоянными плотностями в слоях. Обобщения этого приближения для описания уединенных волн в жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией рассматривались в [3, 4]. Вследствие наличия внутри области течения слабой непрерывной стратификации появляется дополнительный малый параметр σ , который характеризует градиент плотности жидкости вне пикноклина, моделируемого поверхностью скачка плотности. Установлено, что порядок σ по отношению к другому малому параметру — безразмерному скачку плотности μ на границе раздела слоев — оказывает существенное влияние на вид уравнения для главного члена длинноволновой асимптотики. В работе [3] рассмотрен случай, когда величины σ и μ одного порядка малости, что соответствует слабовыраженному пикноклину. При этом в исходной гидродинамической постановке точное нелинейное уравнение для функции тока аппроксимировалось линеаризованным уравнением. В [4] в полной нелинейной постановке проведен асимптотический анализ уравнений Эйлера для неоднородной жидкости в случае пикноклина, для которого отношение σ/μ мало. В частности, показано, что уравнение Овсянникова получается в результате предельного перехода $\sigma \rightarrow 0$ при фиксированном ненулевом значении параметра μ .

В данной работе рассматривается особый случай $\sigma/\mu \sim 1$ без каких-либо упрощающих предположений относительно вида исходного уравнения для функции тока в стратифицированном слое. Возникающее модельное уравнение для нелинейных длинных волн с дисперсией в двухслойной слабостратифицированной жидкости не сводится к известным приближениям и обладает рядом интересных свойств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00309), а также в рамках гранта Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/4918) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17 (проект № 4).

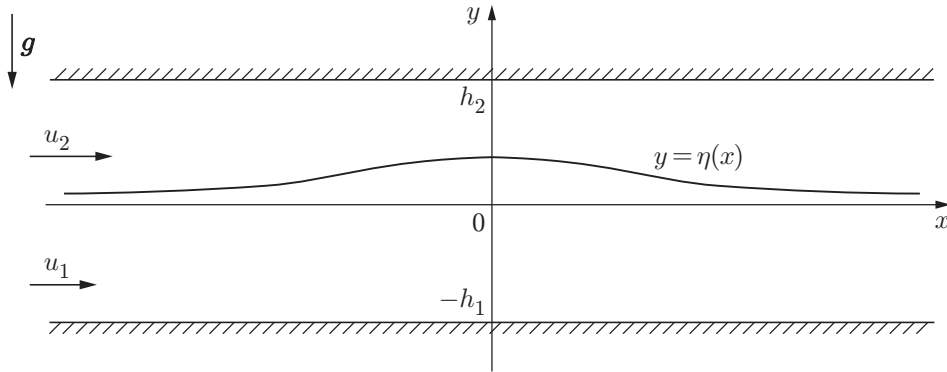


Рис. 1. Схема движения жидкости

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерное стационарное течение двухслойной жидкости в области, ограниченной ровным горизонтальным дном $y = -h_1$ и непроницаемой крышкой $y = h_2$ (рис. 1). Предполагается, что в отсутствие волнового движения неизвестная граница раздела слоев $y = \eta(x)$ находится в состоянии равновесия при $y = 0$. Для течений с уединенными волнами вектор скорости жидкости (u, v) в j -м слое ($j = 1, 2$) при $x \rightarrow \pm\infty$ должен стремиться к постоянному вектору $(u_j, 0)$ (u_j — фазовая скорость волны относительно соответствующего слоя). Выражение для плотности жидкости в невозмущенном течении задается в виде

$$\rho_\infty(y) = \begin{cases} \rho_1, & -h_1 < y < 0, \\ \rho_2 \exp(-N^2 y/g), & 0 < y < h_2, \end{cases}$$

где $N = \text{const}$ — частота Брента — Вайсяля, а постоянные $\rho_2 < \rho_1$ являются предельными значениями плотности сверху и снизу на поверхности раздела. Указанная выше стратификация определяется безразмерными параметрами Буссинеска

$$\sigma = N^2 h_2/g, \quad \mu = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2,$$

а фазовые скорости волны характеризуются плотностными числами Фруда F_j :

$$F_j^2 = \frac{\rho_j u_j^2}{g(\rho_1 - \rho_2)h_j} \quad (j = 1, 2).$$

Кроме того, в задаче имеется безразмерный геометрический параметр $r = h_1/h_2$ — отношение невозмущенных глубин слоев.

Движение жидкости определено, если в j -м слое известна функция тока ψ_j для поля скоростей $u = \psi_{jy}$, $v = -\psi_{jx}$. Выбирая в качестве линейного масштаба невозмущенную глубину h_2 верхнего слоя, а в качестве масштаба для функции тока $\psi = \psi_j$ — расход жидкости в соответствующем слое, введем безразмерные переменные

$$(x, y, \eta) = h_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}), \quad \psi_j = u_j h_j \bar{\psi}_j \quad (j = 1, 2).$$

Тогда в нижнем слое функция тока должна быть гармонической функцией:

$$\begin{aligned} \psi_{1xx} + \psi_{1yy} &= 0 & (-r < y < \eta(x)), \\ \psi_1(x, -r) &= -1, & \psi_1(x, \eta(x)) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(здесь и далее черта в обозначениях безразмерных величин \bar{x} , \bar{y} , $\bar{\eta}$, $\bar{\psi}_j$ опущена). Функция тока в верхнем слое из-за наличия в нем экспоненциальной стратификации должна

являться решением краевой задачи для нелинейного уравнения Дюбрей — Жакотэн — Лонга (см. [4])

$$\begin{aligned} \psi_{2xx} + \psi_{2yy} + \lambda^2(\psi_2 - y) &= \sigma(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - 1)/2 \quad (\eta(x) < y < 1), \\ \psi_2(x, \eta(x)) &= 0, \quad \psi_2(x, 1) = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda = Nh_2/u_2$. Безразмерный параметр λ не является независимым и связан с σ , μ , F_2 соотношением

$$\lambda^2 = \sigma/(\mu F_2^2). \quad (3)$$

Требование непрерывности давления всюду в области двухслойного течения дает условие, связывающее значения производных ψ_1 и ψ_2 на границе раздела:

$$rF_1^2(r^2\psi_{1x}^2 + r^2\psi_{1y}^2 - 1) + 2\eta = F_2^2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - 1) \quad (y = \eta(x)). \quad (4)$$

В силу уравнений (1), (2) граничное условие (4) равносильно интегральному соотношению

$$\begin{aligned} \mu r^3 F_1^2 \int_{-r}^{\eta} (\psi_{1y}^2 - \psi_{1x}^2) dy - (1 + \mu)\eta^2 + \mu r F_1^2(\eta - r) + \\ + \int_{\eta}^1 e^{-\sigma\psi_2} [\mu F_2^2(1 + \psi_{2y}^2 - \psi_{2x}^2) - 2\sigma^{-1}(e^{\sigma\psi_2} - 1) + 2(\psi_2 - y)] dy = \\ = 2\mu F_2^2 + 2(\lambda^{-2} + \sigma^{-2})(1 - \sigma - e^{-\sigma}). \end{aligned} \quad (5)$$

Данное соотношение представляет собой интегральный закон сохранения потока горизонтального импульса жидкости, записанный в терминах функции тока. Граничное условие (4) целесообразно использовать при анализе дисперсионных свойств рассматриваемых уравнений, а интеграл уравнений движения (5) — при построении длинноволновой асимптотики решения.

2. Длинноволновое приближение. Предполагая параметры Буссинеска σ и μ малыми величинами одного порядка, для упрощения вычислений примем $\mu = \sigma$ и будем использовать σ в качестве моделирующего параметра. В этом случае согласно формуле (3) параметр λ в уравнениях (2) и (5) нужно положить равным величине $\lambda = 1/F_2$. При выводе модели длинноволнового приближения используется асимптотическое представление функций тока в виде

$$\psi_j(x, y) = \psi_j^{(0)}(\xi, y) + \sigma\psi_j^{(1)}(\xi, y) + O(\sigma^2) \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где $\xi = \sqrt{\sigma}x$ — медленная переменная. Коэффициенты разложения (6) находятся в результате интегрирования получающейся из (1), (2) рекуррентной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной y , в которые ξ входит в качестве параметра. В частности, коэффициенты низшего порядка выражаются через функцию η по формулам

$$\psi_1^{(0)} = \frac{y - \eta}{r + \eta}, \quad \psi_2^{(0)} = y - \eta \frac{\sin \alpha(y)}{\sin \alpha(\eta)},$$

где

$$\alpha(y) = (1 - y)/F_2, \quad \alpha(\eta) = (1 - \eta)/F_2. \quad (7)$$

Подставляя ряды (6) в интегральное соотношение (5) и оставляя в нем слагаемые с точностью до величин порядка $O(\sigma^2)$, получаем уравнение второго приближения теории мелкой воды для функции η , описывающей искомую форму границы раздела. В результате после возвращения к безразмерной независимой переменной x в главном порядке по σ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \eta^2 \cos^2\left(\frac{\alpha(\eta)}{2}\right) \frac{P(\eta; F_1, F_2)}{Q(\eta; F_1, F_2)}, \quad (8)$$

где

$$P(\eta; F_1, F_2) = 3r(F_1^2 - 1) + 3F_2(r + \eta) \operatorname{ctg} \alpha(\eta) - 3\eta - \eta^2,$$

$$Q(\eta; F_1, F_2) = q_0 + q_1\eta + q_2\eta^2 + q_3\eta^3 + q_4\eta^4,$$

q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 — коэффициенты:

$$q_0 = (r^2 F_1^2/3) \sin^2 \alpha + (r F_2^2/4)(2 - F_2 \sin 2\alpha),$$

$$q_1 = F_2 r \operatorname{ctg} \alpha - (F_2^2/4)(2r \cos 2\alpha - 2 + 4r + F_2 \sin 2\alpha),$$

$$q_2 = -F_2^2(1 + (1/2) \cos 2\alpha) + F_2[((2 - 3r)/2) \operatorname{ctg} \alpha + (1/4)r \sin 2\alpha] + (r/2) \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

$$q_3 = (1/4) \operatorname{ctg} \alpha [F_2(4 - \cos 2\alpha) - 2(r - 1) \operatorname{ctg} \alpha], \quad q_4 = -(1/2) \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

$\alpha = \alpha(\eta)$ определяется второй формулой в (7).

Решения уравнения (8) типа уединенных волн описываются квадратурами

$$x = \pm \int_{\eta}^a \sqrt{\frac{Q(s; F_1, F_2)}{P(s; F_1, F_2)}} \frac{ds}{s \cos(\alpha(s)/2)}, \quad (9)$$

где амплитуда волны определяется корнем $s = a$ функции $P(s; F_1, F_2)$, ближайшим к точке $s = 0$ (при условии, что этот корень простой). В окрестности значения $s = 0$ функция Q положительна, что следует из соотношений

$$Q(0; F_1, F_2) = q_0|_{\eta=0} = (r^2 F_1^2/3) \sin^2(1/F_2) + (r F_2^2/4)(2 - F_2 \sin(2/F_2)) > 0.$$

Поэтому для существования вещественных решений вида (9) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$P(0; F_1, F_2) = 3r(F_1^2 + F_2 \operatorname{ctg}(1/F_2) - 1) > 0,$$

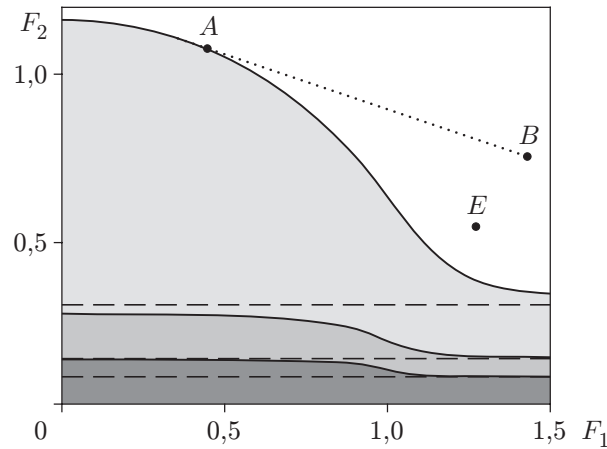
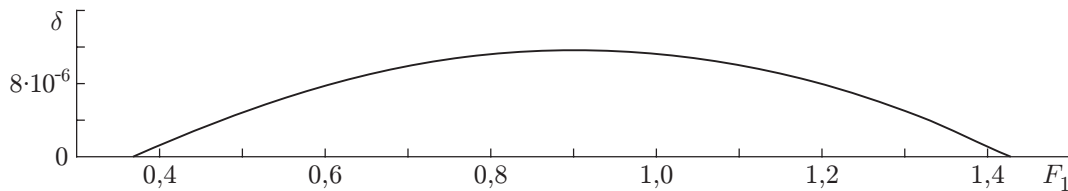
которое можно интерпретировать в терминах дисперсионных свойств исходной задачи. Уравнения (1), (2), (4), линеаризованные относительно малых возмущений кусочно-постоянного одномерного течения (волновых пакетов с функцией $\eta(x) = a \exp(ikx)$), приводят к дисперсионному соотношению для чисел Фруда F_j и волнового числа k

$$\Delta(k; F_1, F_2) = 0. \quad (10)$$

При $F_2^{-2} \geq k^2 + \sigma^2/4$ дисперсионная функция Δ имеет вид

$$\Delta = F_1^2 r k \operatorname{cth}(rk) + F_2^2 (\sqrt{1/F_2^2 - k^2 - \sigma^2/4} \operatorname{ctg} \sqrt{1/F_2^2 - k^2 - \sigma^2/4} - \sigma/2) - 1,$$

а при $F_2^{-2} < k^2 + \sigma^2/4$ задается аналитическим продолжением указанного выше выражения. Спектр фазовых скоростей линейных гармонических волн состоит из точек в плоскости (F_1, F_2) , для которых дисперсионное соотношение (10) имеет вещественные корни k .

Рис. 2. Спектр главной моды ($\sigma = \mu = 0,09$)Рис. 3. Отклонение диаграммы бора от прямой AB

В зависимости от количества действительных волновых чисел, соответствующих заданной паре чисел Фруда (F_1, F_2) , спектр разбивается на модальные области, границы которых задаются ветвями кривой

$$\Delta(0; F_1, F_2) \equiv F_1^2 + F_2^2 \left(\sqrt{1/F_2^2 - \sigma^2/4} \operatorname{ctg} \sqrt{1/F_2^2 - \sigma^2/4} - \sigma/2 \right) - 1 = 0.$$

На рис. 2 заштрихованные области соответствуют спектрам первых трех мод. Для точек (F_1, F_2) , находящихся вне спектра, дисперсионное соотношение (10) не порождает осциллирующие по x волновые пакеты. Поэтому по аналогии с поверхностными волнами в однородной жидкости дополнение к спектру интерпретируется как область сверхкритических течений. С учетом этого замечания и соотношения

$$P(0; F_1, F_2) = 3r \Delta(0; F_1, F_2) + O(\sigma^2)$$

можно заключить, что требование положительности функции P является условием сверхкритичности уединенных волн главной моды по отношению к спектру линейных волн.

Уравнение (8) имеет также решения типа плавного бора, которые получаются для чисел Фруда (F_1, F_2) , порождающих двукратный ненулевой корень $s = a$ функции $P(s; F_1, F_2)$. На рис. 2 пунктирной линией показан вычисленный при отношении толщин слоев $r = 0,2$ участок AB диаграммы бора (множества точек в плоскости (F_1, F_2) , которым соответствует бор) с точками A ($F_1 = 0,4872, F_2 = 1,0572$) и B ($F_1 = 1,20702, F_2 = 0,7323$). Построенная диаграмма почти прямолинейна — на рис. 3 показано ее отклонение $\delta = \delta(F_1)$ от отрезка прямой, проходящей через те же точки A и B . Отметим, что для модели [2] с постоянными плотностями в слоях диаграмма бора является прямой линией в плоскости (F_1, F_2) .

3. Пример уединенной волны в стратифицированной атмосфере. Ниже приводятся результаты моделирования внутренних уединенных волн в атмосфере, наблюдавшихся летом 2004 г. над поверхностью озера Байкал (рис. 4), на основе уравнения (8). На



Рис. 4. Уединенная волна в атмосфере

фотографии виден слой туманного холодного воздуха, расположенного непосредственно над поверхностью воды (температура воды на поверхности озера даже в летнее время не превышает $7\text{ }^{\circ}\text{C}$). По оценкам участников экспедиции, неоднократно наблюдавших это атмосферное явление, толщина охлажденного слоя воздуха h_1 составляла порядка $15 \div 20$ м. Бегущие уединенные волны конечной амплитуды распространялись вдоль четко выраженной границы между холодным тяжелым воздухом ($T = 10 \div 12\text{ }^{\circ}\text{C}$) и более легким прогретым воздухом ($T = 18 \div 20\text{ }^{\circ}\text{C}$). По-видимому, источником волн являлись отдельные возмущения, возникавшие в результате схода масс прохладного воздуха с вершин прибрежных хребтов на западном берегу озера.

Для оценки параметров теплого воздуха, участвующего в волновом движении, используем известные данные о свойствах нижних слоев атмосферы [5, 6]. Толщина слоя атмосферы, на который оказывает влияние земная поверхность, составляет $1,0 \div 1,5$ км (слой трения). В частности, в этом слое хорошо выражены суточные изменения основных метеорологических величин. В свою очередь, в рассматриваемом слое атмосферы выделяется приземный слой толщиной $50 \div 100$ м, в котором вертикальные градиенты основных физических величин на один-два порядка выше, чем в других слоях. Поэтому в используемой модели двухслойной среды в качестве оценочной толщины верхнего слоя примем величину $h_2 \approx 70$ м. Движением воздуха в атмосфере выше этого слоя будем пренебрегать, используя граничное условие твердой крышки при $y = h_2$. Для определения параметров стратификации в рассматриваемом слое используем барометрическую формулу [6]

$$\rho(y) = \rho_2 e^{-gy/(R_c T_*)},$$

где $R_c = 287\text{ м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$ — удельная газовая постоянная для сухого воздуха (влажность воздуха оказывает слабое влияние на показатель экспоненты в барометрической формуле); $T_* = 293\text{ К}$ — средняя температура в рассматриваемом слое; ρ_2 — плотность воздуха на нижней границе данного слоя. С учетом сказанного выше получаем значение параметра Буссинеска $\sigma \approx 0,081$. Согласно [7] в качестве ρ_1 примем плотность воздуха при температуре $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ и влажности 100% , равную $1,181\text{ кг/м}^3$, а в качестве ρ_2 — плотность воздуха при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и влажности 80% , равную $1,170\text{ кг/м}^3$. Отсюда получаем значение второго параметра Буссинеска $\mu = 0,094$, приемлемое при использовании модели (8). На рис. 5 сплошной линией показан контур уединенной волны, представленной на рис. 4, штриховой линией — расчетный профиль для точки E ($F_1 = 1,2685$, $F_2 = 0,5479$) на рис. 2.

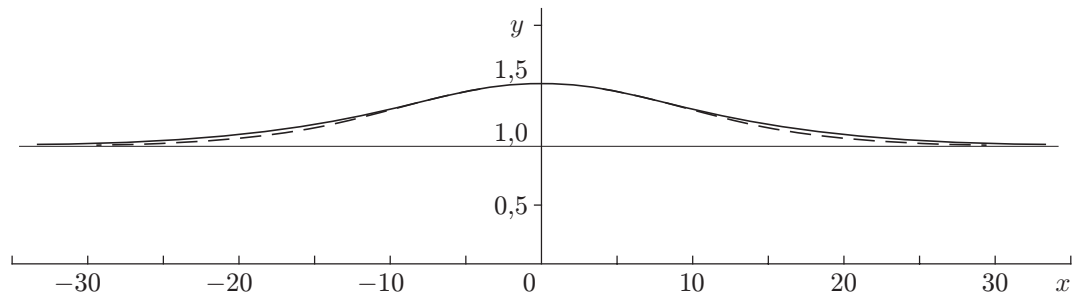


Рис. 5. Расчетный и наблюдаемый на рис. 4 профили уединенной волны: штриховая линия — решение уравнения (8); сплошная — контур волны, приведенной на рис. 4

Заключение. В работе выведено уравнение второго приближения теории мелкой воды для слабостратифицированной двухслойной жидкости, описывающее уединенные волны в пикноклине с малым перепадом плотности. Расчеты по этой модели показывают, что указанное приближение может быть использовано для описания волновых явлений в приземном слое стратифицированной атмосферы.

Авторы выражают благодарность Е. В. Ерманюку за обсуждение постановки задачи, полученных результатов и предоставленную фотографию, а также А. А. Черевко за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Второе приближение в теории мелкой воды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 2. С. 175.
2. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. **Voronovich A. G.** Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // J. Fluid Mech. 2003. V. 474. P. 85–94.
4. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Асимптотические модели внутренних стационарных волн // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 151–161.
5. **Хргиан А. Х.** Физика атмосферы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
6. **Матвеев Л. Т.** Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
7. **Вукалович М. П.** Техническая термодинамика / М. П. Вукалович, И. И. Новиков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1955.

Поступила в редакцию 8/XII 2008 г.