Теплофизика и аэромеханика, том 6, № 3, 1999 г.

УДК 536.24

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА

Ю.Б. ЗУДИН

Московский энергетический институт

Определены границы интервала изменения величины, связывающей два осредненных по различным законам коэффициента теплоотдачи, — истинный и экспериментальный.

1. ИСТИННЫЙ ОСРЕДНЕННЫЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛООТДАЧИ

В работе [1] рассмотрено решение задачи для уравнения теплопроводности в плоской стенке толщиной δ (рисунок):

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + q_v . \quad (1)$$

Здесь t — время, x — поперечная координата, z — продольная координата (перпендикулярная к плоскости рисунка), ϑ — температура, q_v — мощность объемных тепловых источников, c, ρ, λ — удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность стенки.

На поверхности $x = 0$ задается однородное граничное условие одного из следующих типов (см. рисунок): a — ϑ_0 = const (постоянная температура), b — q_0 = const (постоянная плотность теплового потока), c — $q_0 = 0$, q_v = const (адиабатическая внешняя поверхность, постоянная мощность тепловых источников). На поверхности $x = \delta$ задается периодическое граничное условие третьего рода

$$q_\delta = \alpha\, \vartheta_\delta . \quad (2)$$

Коэффициент теплоотдачи α определяется в виде суперпозиции двух составляющих:

$$\alpha = \langle \alpha \rangle \left(1 + \tilde{\alpha} \right), \quad (3)$$

где $\langle \alpha \rangle$ — постоянная величина, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(t,\, z)$ — величина, периодически изменяющаяся по времени t и координате z вдоль поверхности $x = \delta$, символ $\langle\ \rangle$ означает осреднение по времени t и координате z.

Решение линейного уравнения (1) ищется в виде суперпозиции осредненной и пульсационной составляющих:

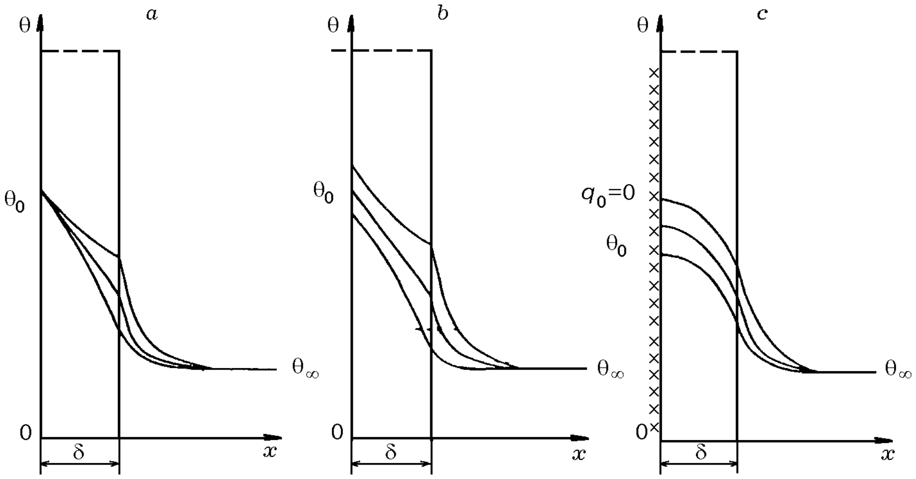

Схема задачи для уравнения теплопроводности с периодическим граничным условием третьего рода.
Поясн. см. в тексте.

$$\vartheta = \langle\vartheta\rangle(x)\left(1+\tilde{\vartheta}(t,\ z)\right).$$

Величина $\langle\vartheta\rangle(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda\, d^2\, \vartheta / dx^2 + q_v = 0$$

и соответствующему граничному условию при $x = 0$:

a) $\langle\vartheta\rangle = \vartheta_0 - A_1 x$ при $\vartheta_0 = \text{const}$,

b) $\langle\vartheta\rangle = A_2 - q_0 x / \lambda$ при $q_0 = \text{const}$,

c) $\langle\vartheta\rangle = A_3 - q_v\, x^2 / (2\lambda)$ при $q_0 = 0$, $q_v = \text{const}$.

где A_1, A_2, A_3 — соответствующие постоянные.

Пульсационная составляющая поля температур удовлетворяет уравнению

$$c\rho \frac{\partial\tilde{\vartheta}}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2\tilde{\vartheta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\vartheta}}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

и соответствующему граничному условию при $x = 0$:

a) $\tilde{\vartheta} = 0$ при $\vartheta_0 = \text{const}$,

b) $\partial\tilde{\vartheta} / \partial x = 0$ при $q_0 = \text{const}$,

c) $\partial\tilde{\vartheta} / \partial x = 0$ при $q_0 = 0$, $q_v = \text{const}$.

Так как два последних случая тождественны по отношению к полю температурных пульсаций, ниже рассматриваются лишь два возможных типа граничного условия:

$$\vartheta_0 = \text{const},\ q_0 = \text{const}. \tag{5}$$

Запишем перепад температур ϑ_δ и плотность теплового потока q_δ при $x = \delta$ в виде

$$\vartheta_\delta = \langle \vartheta_\delta \rangle \left(1 + \tilde{\vartheta}_\delta\right), \quad q_\delta = \langle q_\delta \rangle \left(1 + \tilde{q}_\delta\right). \tag{6}$$

Коэффициент теплоотдачи, по определению, равен

$$\alpha = \frac{q_\delta}{\vartheta_\delta} = \frac{\langle q_\delta \rangle \left(1 + \tilde{q}_\delta\right)}{\langle \vartheta_\delta \rangle \left(1 + \tilde{\vartheta}_\delta\right)}. \tag{7}$$

Осредненный коэффициент теплоотдачи, определяемый в традиционном теплообменном эксперименте и используемый в прикладных расчетах, записывается как частное от деления осредненных значений — плотности теплового потока и перепада температур:

$$\alpha_m = \frac{\langle q_\delta \rangle}{\langle \vartheta_\delta \rangle}. \tag{8}$$

Определяя из (7) осредненное частное от деления соответствующих мгновенных величин, получаем

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{q_\delta}{\vartheta_\delta} \right\rangle = \frac{\langle q_\delta \rangle}{\langle \vartheta_\delta \rangle} \left\langle \frac{\left(1 + \tilde{q}_\delta\right)}{\left(1 + \tilde{\vartheta}_\delta\right)} \right\rangle = \alpha_m \left\langle \frac{\left(1 + \tilde{q}_\delta\right)}{\left(1 + \tilde{\vartheta}_\delta\right)} \right\rangle. \tag{9}$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи могут быть определены два различных осредненных значения коэффициента теплоотдачи. В [1] было предложено именовать их следующим образом: α_m — экспериментальный коэффициент теплоотдачи и $\langle \alpha \rangle$ — истинный осредненный коэффициент теплоотдачи. Следует подчеркнуть, что происхождение указанных терминов никак не связано с выделением какого-либо преимущественного способа осреднения.

Взаимосвязь α_m и $\langle \alpha \rangle$ применительно к конкретным физическим приложениям исследуется в [2 – 4]. В настоящей работе проводится исследование корреляций пульсаций — коэффициента теплоотдачи $\tilde{\alpha}$, температуры $\tilde{\vartheta}_\delta$ и плотности теплового потока $\tilde{q}_\delta$ при $x = \delta$.

2. КОРРЕЛЯЦИЯ ПУЛЬСАЦИЙ $\langle \tilde{\vartheta}_\delta \tilde{q}_\delta \rangle$

Перепишем уравнение теплопроводности (4) с учетом определений (6), (8) и закона Фурье в виде

$$c\rho \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = -\alpha_m \left(\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} \right). \tag{10}$$

Умножая обе части (10) на $\tilde{\vartheta}$, получаем

$$c\rho \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta}^2 / 2 \right)}{\partial t} + \alpha_m \tilde{\vartheta} \left(\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} \right) = 0. \tag{11}$$

Запишем два следующих тождества:

$$\tilde{\vartheta} \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} \equiv \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta} \tilde{q}_x \right)}{\partial x} - \tilde{q}_x \frac{\tilde{\vartheta}}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} \equiv -\frac{\alpha_m \, \tilde{q}_x}{\lambda} . \tag{13}$$

Из (12), (13) следует

$$\tilde{\vartheta} \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} = \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_x \right)}{\partial x} + \frac{\alpha_m \, \tilde{q}_x^2}{\lambda} . \tag{14}$$

Проведя аналогичную процедуру с членом $\tilde{\vartheta} \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z}$, перепишем уравнение (11) в следующем виде:

$$c\rho \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta}^2 / 2 \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_x \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_z \right)}{\partial z} + \frac{\alpha_m \left(\tilde{q}_x^2 + \tilde{q}_z^2 \right)}{\lambda} = 0 . \tag{15}$$

Проинтегрируем обе части (15) по x в пределах от 0 до δ:

$$\frac{c\rho}{\alpha_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \left(\tilde{\vartheta}^2 / 2 \right) dx + \left(\tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_x \right) \int_0^\delta \tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_z \, dx + \frac{\alpha_m}{\lambda} \int_0^\delta \left(\tilde{q}_x^2 + \tilde{q}_z^2 \right) = 0 . \tag{16}$$

Запишем выражение для искомой величины $\left(\tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_x \right)_\delta = \tilde{\vartheta}_\delta \, \tilde{q}_\delta$:

$$\tilde{\vartheta}_\delta \, \tilde{q}_\delta = \tilde{\vartheta}_0 \, \tilde{q}_0 - \frac{c\rho}{\alpha_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \left(\tilde{\vartheta}^2 / 2 \right) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\delta \tilde{\vartheta} \, \tilde{q}_z \, dx -$$

$$- \frac{\alpha_m}{\lambda} \int_0^\delta \left(\tilde{q}_x^2 + \tilde{q}_z^2 \right) dx . \tag{17}$$

Осредняя (17) по времени t и продольной (вдоль поверхности $x = \delta$) координате z и замечая, что при этом второй и третий члены в правой части выпадают, получаем:

$$\left\langle \tilde{\vartheta}_\delta \, \tilde{q}_\delta \right\rangle = \left\langle \tilde{\vartheta}_0 \, \tilde{q}_0 \right\rangle - \frac{\alpha_m}{\lambda} \int_0^\delta \left(\tilde{q}_x^2 + \tilde{q}_z^2 \right) dx . \tag{18}$$

С учетом граничного условия (5) при $x = 0$ из (18) получаем:

$$\left\langle \tilde{\vartheta}_\delta \, \tilde{q}_\delta \right\rangle \le 0 . \tag{19}$$

Таким образом, корреляция $\left\langle \tilde{\vartheta}_\delta \, \tilde{q}_\delta \right\rangle$ — всегда неположительна.

3. КОРРЕЛЯЦИЯ ПУЛЬСАЦИЙ $\left\langle \frac{\tilde{\boldsymbol{a}} \, \boldsymbol{q}_\delta}{1 + \tilde{\boldsymbol{a}}} \right\rangle \left\langle \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_\delta \, \tilde{\boldsymbol{q}}_\delta \right\rangle$

Определим величину ε как отношение экспериментального коэффициента теплоотдачи к истинному осредненному. Из соотношений (3), (7) – (9) получим

$$\varepsilon = \frac{\alpha_m}{\langle \alpha \rangle} , \tag{20}$$

$$\varepsilon\left(1+\tilde{q}_{\delta}\right)=\left(1+\tilde{\alpha}\right)\left(1+\tilde{\vartheta}_{\delta}\right). \tag{21}$$

Осреднение (21) дает

$$\varepsilon=1+\left\langle\tilde{\alpha}\,\tilde{\vartheta}_{\delta}\right\rangle. \tag{22}$$

Согласно (22), отличие экспериментальной и истинной процедур осреднения мгновенного коэффициента теплоотдачи определяется корреляцией пульсаций коэффициента теплоотдачи $\tilde{\alpha}$ и температуры стенки $\tilde{\vartheta}_{\delta}$ при $x = \delta$.

Установим связь корреляций $\left\langle\tilde{\alpha}\,\tilde{\vartheta}_{\delta}\right\rangle$ и $\left\langle\tilde{\vartheta}\,\tilde{q}_{\delta}\right\rangle$. Умножая обе части (21) на $\left(1+\tilde{\vartheta}_{\delta}\right)$ и осредняя, получим:

$$\varepsilon\left(1+\left\langle\tilde{\vartheta}_{\delta}\,\tilde{q}_{\delta}\right\rangle\right)=1+2\left\langle\tilde{\alpha}\,\tilde{\vartheta}_{\delta}\right\rangle+\left\langle\left(1+\tilde{\alpha}\right)\tilde{\vartheta}_{\delta}^{2}\right\rangle. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует

$$\varepsilon=\frac{1-\left\langle\left(1-\tilde{\alpha}\right)\tilde{\vartheta}_{\delta}^{2}\right\rangle}{1-\left\langle\tilde{\vartheta}_{\delta}\,\tilde{q}_{\delta}\right\rangle}. \tag{24}$$

Так как $\left(1+\tilde{\alpha}\right)\geq 0,\ \tilde{\vartheta}_{\delta}^{2}\geq 0,$ то $\left\langle\left(1+\tilde{\alpha}\right)\tilde{\vartheta}_{\delta}^{2}\right\rangle\geq 0$. Тогда из доказанного в разделе 2 соотношения (19) получим

$$\varepsilon\leq 1. \tag{25}$$

Неравенство (25) означает, что экспериментальный коэффициент теплоотдачи меньше истинного осредненного (или в пределе равен ему).

4. КОРРЕЛЯЦИЯ ПУЛЬСАЦИЙ $\left\langle\dfrac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{\delta}}{1+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}\right\rangle$

Разделив обе части (21) на $\varepsilon\left(1+\tilde{\alpha}\right)$, получаем:

$$\varepsilon^{-1}\left(1+\tilde{\vartheta}_{\delta}\right)=\frac{\left(1+\tilde{q}_{\delta}\right)}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)}. \tag{26}$$

Осреднение (26) дает

$$\varepsilon^{-1}=\left\langle\frac{1}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)}\right\rangle+\left\langle\frac{\tilde{q}_{\delta}}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)}\right\rangle. \tag{27}$$

Из соотношения (27) следует, что связь экспериментального и истинного законов осреднения коэффициента теплоотдачи определяется корреляцией пульсаций коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока $\tilde{q}_{\delta}$ при $x = \delta$.

Установим связь корреляций $\left\langle\dfrac{\tilde{q}_{\delta}}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)}\right\rangle$ и $\left\langle\tilde{\vartheta}_{\delta}\,\tilde{q}_{\delta}\right\rangle$. Разделив обе части (27) на $\left\langle\dfrac{1}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)}\right\rangle$, получаем:

$$\varepsilon^{-1}\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}=1+\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle. \tag{28}$$

Умножая обе части (26) на $(1+\widetilde{q}_\delta)$ и осредняя, имеем

$$\varepsilon^{-1}\left(1+\left\langle\widetilde{\vartheta}_\delta\,\widetilde{q}_\delta\right\rangle\right)=\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle+2\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle+\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta^{\,2}}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle. \tag{29}$$

Соотношения (27), (29) дают

$$\varepsilon^{-1}=\frac{\left[\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle-\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta^{\,2}}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle\right]}{\left(1-\left\langle\widetilde{\vartheta}_\delta\,\widetilde{q}_\delta\right\rangle\right)}. \tag{30}$$

Разделив обе части (30) на $\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle$, получаем:

$$\varepsilon^{-1}\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}=\frac{\left[1-\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta^{\,2}}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle\right]}{\left(1-\left\langle\widetilde{\vartheta}_\delta\,\widetilde{q}_\delta\right\rangle\right)}. \tag{31}$$

Так как $\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle\geq 0$, $\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta^{\,2}}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle\geq 0$, то и $\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{\widetilde{q}_\delta^{\,2}}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle\geq 0$. Тогда из доказанного в разделе 2 соотношения (19) получим:

$$\varepsilon^{-1}\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}\leq 1\text{, или }\varepsilon\geq\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}. \tag{32}$$

5. ГРАНИЦЫ ИНТЕРВАЛОВ ИЗМЕНЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ

Объединяя соотношения (25) и (32), получаем двойное неравенство, определяющее границы интервала изменения ε:

$$\left\langle\frac{1}{(1+\widetilde{\alpha})}\right\rangle^{-1}\leq\varepsilon\leq 1. \tag{33}$$

Отметим, что граничное условие (2) может быть записано в следующем эквивалентном виде:

$$\vartheta_\delta=r\,q_\delta, \tag{34}$$

где r — коэффициент термического сопротивления, определяемый аналогично (3):

$$r=\langle r\rangle(1+\widetilde{r}). \tag{35}$$

Определим аналогично (8), (9) экспериментальное r_m и истинное осредненное $\langle r\rangle$ значения мгновенного коэффициента термического сопротивления:

$$r_m = \frac{\langle \vartheta_\delta \rangle}{\langle q_\delta \rangle}\,, \tag{36}$$

$$\langle r\rangle = \left\langle \frac{\vartheta_\delta}{q_\delta} \right\rangle = \frac{\langle \vartheta_\delta \rangle}{\langle q_\delta \rangle}\left\langle \frac{\left(1+\tilde{\vartheta}\right)_\delta}{\left(1+\tilde{q}_\delta\right)} \right\rangle = r_m \left\langle \frac{\left(1+\tilde{\vartheta}_\delta\right)}{\left(1+\tilde{q}_\delta\right)} \right\rangle. \tag{37}$$

Определим аналогично (20) величину æ как отношение экспериментального коэффициента термического сопротивления к истинному осредненному:

$$æ = \frac{r_m}{\langle r\rangle}\,. \tag{38}$$

Из соотношений (35) – (38) следует

$$æ\left(1+\tilde{\vartheta}_\delta\right) = \left(1+\tilde{r}\right)\left(1+\tilde{q}_\delta\right). \tag{39}$$

Осреднение (39) дает

$$æ = 1 + \langle \tilde{r}\,\tilde{q}_\delta \rangle\,. \tag{40}$$

Разделив обе части (39) на величину $æ\left(1+\tilde{r}\right)$, получаем

$$æ^{-1}\left(1+\tilde{q}_\delta\right) = \frac{\left(1+\tilde{\vartheta}_\delta\right)}{\left(1+\tilde{r}\right)}\,. \tag{41}$$

Осреднение (41) дает

$$æ^{-1} = \left\langle \frac{1}{1+\tilde{r}} \right\rangle + \left\langle \frac{\tilde{\vartheta}_\delta}{\left(1+\tilde{r}\right)} \right\rangle. \tag{42}$$

Соотношения (40) и (42) аналогичны (22), (27). Чтобы определить границы интервала изменения величины æ, можно, в принципе, и далее продолжать рассуждения, аналогичные приведенным в разделах 3, 4. Однако та же задача решается гораздо проще при использовании выражения (36):

$$r \equiv \alpha^{-1},\ \ r_m \equiv \alpha_m^{-1}\,. \tag{43}$$

Из (43) с учетом (3), (35) получим связь величин ε и æ:

$$æ\,\varepsilon = \left\langle \frac{1}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)} \right\rangle^{-1}. \tag{44}$$

Из (33), (44) имеем:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\min} = \left\langle \frac{1}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)} \right\rangle^{-1},\ \ æ = æ_{\max} = 1\,,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = 1,\ \ æ = æ_{\min} = \left\langle \frac{1}{\left(1+\tilde{\alpha}\right)} \right\rangle^{-1}.$$

Отсюда следует двойное неравенство для æ:

$$\left\langle \frac{1}{\left(1+\widetilde{\alpha}\right)} \right\rangle^{-1} \leq æ \leq 1\,. \tag{45}$$

Таким образом, мы получили, что интервалы изменения величин ε и æ совпадают.

Подытожим исследование краткими выводами.

1. Проведено исследование свойств решения уравнения теплопроводности с периодическим граничным условием третьего рода.

2. Определены границы интервала изменения величины, связывающей два осредненных по различным законам коэффициента теплоотдачи — истинный и экспериментальный.

3. Показано, что в этом же интервале изменяется величина, связывающая истинное осредненное и экспериментальное значения коэффициента термического сопротивления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лабунцов Д.А., Зудин Ю.Б.** Процессы теплообмена с периодической интенсивностью. — М.: Энергоатомиздат, 1094.
2. **Зудин Ю.Б.** Расчет теплового влияния стенки на осредненную теплоотдачу в процессах теплообмена с периодической интенсивностью // Изв. РАН. Энергетика. — 1995. — № 2. — С. 89 – 95.
3. **Зудин Ю.Б.** Расчет осредненной теплоотдачи при периодических пульсациях интенсивности ячеистой структуры // Там же. — 1995. — № 3. — С. 196 – 205.
4. **Зудин Ю.Б.** Импульсный закон пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи // Там же. — 1996. — № 5. — С. 154 – 159.

Статья поступила в редакцию 15 мая 1997 г.,
в доработанном виде — 2 ноября 1998 г.