14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
15. *Michiyoshi L., Mizuno K., Hoshiai Y.* Studies on the flow of slurry through a pipe. I. Entrance region of laminar flow.—«Internat. chem. engng», 1966, vol. 6, N 2.
16. *Браиловская И. Ю., Чудов Л. А.* Решение уравнений пограничного слоя разностным методом.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ, 1962.
17. *Первушин В. Е.* О неизотермическом структурном течении вязкопластичной жидкости в круглой трубе.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 1.

УДК 539.374.1

ПОВЕДЕНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

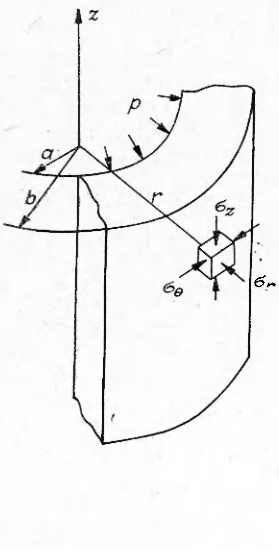
В. А. Одинцов, В. В. Селиванов

(*Москва*)

При решении системы уравнений, описывающих одномерное движение идеально пластической несжимаемой оболочки под действием равновесно расширяющегося политропного газа, используется закон сохранения энергии. Получены аналитические выражения для определения поля напряжений и скоростей в оболочке в зависимости от перемещения внутренней границы оболочки.

Поведение идеально пластической несжимаемой оболочки под действием давления, в несколько раз превышающего предел текучести материала, рассматривалось в [1—8]. Задача о движении идеально пластической оболочки под действием равновесно расширяющихся продуктов детонации не имеет аналитического решения в виде конечных зависимостей от координаты и времени. Однако она может быть решена, если за аргумент принять величину внешнего (b) или внутреннего (a) радиуса оболочки.

Рассмотрим на фигуре плоскую деформацию цилиндрической оболочки под действием продуктов детонации (ПД), подчиняющихся закону расширения



$$pV^k = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где p и V — соответственно давление и удельный объем ПД. Напряжения σ_r, σ_θ, σ_z являются главными. Внутренний и внешний начальные радиусы оболочки обозначим соответственно a_0 и b_0, текущие— a и b.

Запишем закон сохранения энергии системы в виде

$$E + W + E_ф = E_0$$

или на единицу длины

$$\tilde{E} + \tilde{W} + \tilde{E}_ф = 1, \tag{2}$$

где E_0 и E—соответственно начальная и текущая внутренняя энергия ПД; W — кинетическая энергия оболочки; $E_ф$ — работа пластической деформации на единицу длины. Кинетической энергией ПД пренебрегаем. Подробно рассмотрим каждое слагаемое в выражении (2).

1. Из (1) следует

(3) $$p=p_0(a_0/a)^{2k},$$

где $p_0=\rho_0 D^2/8$ — давление мгновенной детонации; ρ_0 — плотность взрывчатого вещества; D — скорость детонации.

Для идеального газа внутренняя энергия

$$E=pV/(\kappa-1),$$

где V — объем ПД на единицу длины, или, используя (3) и учитывая

$$V=\pi a^2,$$

получим

$$E=\frac{\pi p_0 a_0^{2k}}{(k-1)\,a^{2(k-1)}}.$$

Так как

$$E_0=\pi p_0 a_0^2/(k-1),$$

то

(4) $$\tilde{E}=E/E_0=(a_0/a)^{2(k-1)}.$$

2. Выражение для кинетической энергии оболочки запишем в виде

$$W=\int\limits_m (v^2/2)\,dm,$$

где $dm=2\pi\gamma_0 r dr$; v — радиальная скорость частиц оболочки; γ_0 — плотность материала оболочки.

Полагая материал оболочки несжимаемым, определим интеграл уравнения неразрывности

(5) $$v=\dot{a}a/r,$$

где r — эйлерова координата; $\dot{a}=da/dt$ — скорость движения внутренней поверхности оболочки.

Учитывая (5), имеем

$$W=\pi\gamma_0 a^2\dot{a}^2\ln(b/a);$$

(6) $$\tilde{W}=W/E_0=(k-1)\gamma_0\dot{a}^2(a/a_0)^2\ln(b/a)/p_0.$$

Обозначим через $\langle v\rangle$ среднюю скорость оболочки, определяемую из закона сохранения количества движения

$$\langle v\rangle M=\int\limits_m v\,dm,$$

где M — масса оболочки на единицу длины.

Тогда выражение для относительной кинетической энергии примет вид

(7) $$\widetilde{W}=(k-1)\gamma_0[(b_0/a_0)^2-1]\langle v\rangle^2/2p_0.$$

3. Запишем выражение для работы пластических деформаций

$$E_ф=\int\limits_U A_p dU;\quad A_p=\int\limits_0^{\varepsilon_i}\sigma_i d\varepsilon_i,$$

где σ_i и ε_i — соответственно интенсивность напряжений и интенсивность деформаций; U — объем оболочки на единицу длины.

Приняв условие пластичности в виде

(8) $$\sigma_i=\sqrt{3}\varkappa Y/2,$$

где Y — динамический предел текучести ($\varkappa=2/\sqrt{3}$ для условия пластичности Мизеса — Генки, $\varkappa=1$ для условия пластичности Сен-Венана — Треска), и пренебрегая упругими деформациями, имеем

(9) $$E_ф=\sqrt{3}\varkappa Y\pi\int\limits_a^b\varepsilon_i r dr.$$

Найдем тангенциальную логарифмическую деформацию

$$\varepsilon_\theta=-\ln(1-u/r)=-\ln\left[1-\left(a^2-a_0^2\right)/r^2\right]^{1/2},$$

где u — радиальное перемещение.
В случае $\varepsilon_\theta=-\varepsilon_r$ следует

$$\varepsilon_i=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(1-\frac{a^2-a_0^2}{r^2}\right).$$

Подставляя ε_i в (9) и интегрируя, получим

(10) $$E_ф=\pi\varkappa Y\left[a^2\ln(b/a)+b_0^2\ln(b/b_0)-a_0^2\ln(b/a_0)\right];$$

$$\widetilde{E}_ф=(k-1)\varkappa YA/p_0,$$

где $A=(a/a_0)^2\ln(b/a)+(b_0/a_0)^2\ln(b/b_0)-\ln(b/a_0)$.
Подставляя (4), (6), (10) в уравнение (2), получим

(11) $$\dot{a}=\left[p_0\frac{1-(a_0/a)^{2(k-1)}-(k-1)\varkappa YA/p_0}{(k-1)\gamma_0(a/a_0)^2\ln(b/a)}\right]^{1/2}.$$

Начальными условиями являются $a(0)=a_0$, $\dot{a}(0)=0$.
Уравнение (11) совместно с выражением (5) и условием несжимаемости $b^2-a^2=b_0^2-a_0^2$ позволяет определить массовую скорость в любом ра-

диальном сечении оболочки в зависимости от положения ее внутренней границы a.

Для определения напряженного состояния воспользуемся уравнением Эйлера

$$\gamma_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{r}. \tag{12}$$

Подставляя (5) и производные $\partial v/\partial t$ и $\partial v/\partial r$ в (12), а также используя условие пластичности (8), получим

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\frac{\varkappa Y}{r}+\gamma_0\left(\frac{a\ddot{a}+\dot{a}^2}{r}-\frac{a^2\dot{a}^2}{r^3}\right), \tag{13}$$

где $\ddot{a}=d^2a/dt^2$ —ускорение внутренней поверхности оболочки. Интегрируя (13) по r от a до текущего значения r и учитывая граничное условие на внутренней поверхности $\sigma_r=-p$ при $r=a$, получим выражение

$$\sigma_r=-p+\varkappa Y\ln\frac{r}{a}+\gamma_0\left(a\ddot{a}+\dot{a}^2\right)\ln\frac{r}{a}+\gamma_0\left(\frac{a^2\dot{a}^2}{2r^2}-\frac{\dot{a}^2}{2}\right), \tag{14}$$

которое при использовании условия на внешней границе $\sigma_r=0$ при $r=b$ принимает вид

$$-p+\varkappa Y\ln\frac{b}{a}+\gamma_0\left(a\ddot{a}+\dot{a}^2\right)\ln\frac{b}{a}+\gamma_0\left(\frac{a^2\dot{a}^2}{2b^2}-\frac{\dot{a}^2}{2}\right)=0. \tag{15}$$

Используя уравнения (11), (15), найдем выражение для ускорения внутренней поверхности

$$\ddot{a}=\frac{p_0\,(a_0/a)^{2k}}{a\gamma_0\ln(b/a)}-\frac{2\varkappa Y}{\sqrt{3}a\gamma_0}-p_0\frac{1-(a_0/a)^{2(k-1)}-(k-1)\,\varkappa YA/p_0}{(k-1)\,\gamma_0\,(a/a_0)^2\ln(b/a)}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{a}+\frac{a}{2b^2\ln(b/a)}-\frac{1}{2a\ln(b/a)}\right]. \tag{16}$$

Подставляя (11) и (16) в уравнение (14), получим

$$\sigma_r=p_0\frac{(a_0/a)^{2k}\ln(r/b)}{\ln(b/a)}+p_0\frac{1-(a_0/a)^{2(k-1)}-(k-1)\,\varkappa YA/p_0}{2\,(k-1)\,(a/a_0)^2\ln(b/a)}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2-1-\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\right]. \tag{17}$$

Таким образом, зная распределение радиальной компоненты напряжения по толщине оболочки, можно определить две другие составляющие тензора напряжений σ_θ и σ_z, если использовать условие пластичности (8) и условие плоской деформации $\varepsilon_z=0$ (ε_z — осевая компонента деформации).

Для определения средней скорости оболочки $\langle v\rangle$ воспользуемся уравнениями (2), (4), (7) и (10). Проводя преобразования, получим

$$\langle v\rangle^2=2p_0\frac{1-(a_0/a)^{2(k-1)}-(k-1)\,\varkappa YA/p_0}{(k-1)\,\gamma_0\,[(b_0/a_0)^2-1]}. \tag{18}$$

Учитывая, что $p_0=\rho_0 D^2/8$, и полагая $k=3$, имеем

$$\frac{\langle v\rangle^2}{D^2}=\frac{\beta}{8}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]-2\varkappa\frac{YA}{(b_0/a_0)^2-1},$$

где $\beta=\rho_0 a_0^2/\left[\gamma_0\left(b_0^2-a_0^2\right)\right]$ — отношение массы ВВ к массе оболочки.

Второе слагаемое представляет собой величину, учитывающую энергетические потери на пластическое деформирование. Запишем эту величину в виде

$$v_{\text{п}}=\frac{2\varkappa Y\left[a^2\ln(b/a)+b_0^2\ln(b/b_0)-a_0^2\ln(b/a_0)\right]}{\gamma_0 D^2\left(b_0^2-a_0^2\right)}. \tag{19}$$

Предположим, что распределение напряжений неизменно по толщине оболочки в процессе ее расширения. Это формально означает, что в уравнении (19) нужно положить $a=b$ и $a_0=b_0$. Тогда (19) обращается в равенство

$$v_{\text{п}}^2=\frac{2\varkappa Y}{\gamma_0 D^2}\ln\frac{a}{a_0}$$

и уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\langle v\rangle^2}{D^2}=\frac{\beta}{8}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]-\frac{2\varkappa Y}{\gamma_0 D^2}\ln\frac{a}{a_0}. \tag{20}$$

Если в качестве условия пластичности принять условие Треска, то (20) обратится в уравнение

$$\frac{\langle v\rangle^2}{D^2}=\frac{\beta}{8}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]-\frac{2Y}{\gamma_0 D^2}\ln\frac{a}{a_0},$$

приведенное в [6].

Расчеты, проведенные по формулам (11), (16), (17) и численным методом [8], показали, что результаты совпадают с точностью численной аппроксимации.

Поступила 11 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G. I.* Sci. Papers of G. I. Taylor. Vol. 8. Cambridge, Cambr. Univ. Press, 1963.
2. *Mott N. F.* Fragmentation of shell cases.— «Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1947, vol. 189, N 1018.
3. *Hoggatt G. R., Recht R. F.* Fracture behavior of tubular bombs.— «J. Appl. Phys.», 1968, vol. 39, N 3.
4. *Al-Hassani S. T. S., Hopkins H., Johnson W.* A note on the fragmentation of tubular bombs.— «Intern. J. Mech. Sci.», 1969, vol. 11, N 6.
5. *Пирсон Дж., Райнхарт Дж.* Деформация и разрушение толстостенных стальных цилиндров при взрыве. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1953, № 3.
6. *Физика* взрыва. М., «Наука», 1974.
7. *Гопкинс Г.* Динамические неупругие деформации металлов. М., «Мир», 1964.
8. *Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А.* Расширение идеально пластической цилиндрической оболочки под действием продуктов детонации.— ПМТФ, 1974, № 2.