

$c(t)$ и $-c(t)$ выходные. Условие (2.2) примет вид

$$(6.5) \quad \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + h \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dt} hf \left(-\frac{\sigma}{\mu dc/dt}, 0 \right).$$

Решение (6.1), (6.5), (1.7) при $\sigma = \infty$ ($f = 0$) снова дает закон сохранения объема $h_0 c + c^3/6R = V/2$, давление определяется из (6.4) с заменой a на c . Если $\sigma < \infty$, на стенках, как показано на фиг. 5, б, будет оставаться некоторый слой жидкости — объем жидкости в контакте $x \in (-c, c)$ будет уменьшаться. Применение кавитационного условия $\sigma = 0$ ($f = 1$) в данном случае приводит к мгновенному разрыву смазочной пленки, т. е. пренебрегать поверхностным натяжением в задаче о раздвигании не следует.

Поступила 10 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Castle P., Dowson D. A theoretical analysis of the starved elastohydrodynamic lubrication problem for cylinders in line contact.— In: Proc. Elastohydrodynamic Lubrication Symp. London: Instn Mech. Engrs, 1972.
2. Wolveridge P. E., Baglin K. P., Archard J. F. The starved lubrication of cylinders in line contact.— Proc. Instn Mech. Engrs, 1970—1971, vol. 185, p. 1159—1169.
3. Галахов М. А., Ковалев В. П. Ограниченная смазка жестких цилиндров.— Машиноведение, 1980, № 1.
4. Ганица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении.— ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 4.
5. Chiu I. P. An analysis and prediction of lubricant film starvation in rolling contact systems.— ASLE Trans., vol. 17, N 1.
6. Койн, Элрод мл. Условия разрыва смазочной пленки. Ч. 1. Теоретическая модель.— Проблемы трения и смазки, 1970, № 3.
7. Pemberton J., Cameron A. A mechanism of fluid replenishment in elastohydrodynamic contacts.— Wear, 1976, vol. 37, p. 185.
8. Gentle C. R., Cameron A. Prediction of pour-points in elastohydrodynamic lubrication.— Wear, 1974, vol. 29, p. 141.

УДК 532.522

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ СТРУЙ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Л. Ярин

(Москва)

В работах [1, 2] выведена система квазиодномерных уравнений тонких струй капельных жидкостей, позволяющая, в частности, исследовать процесс роста изгибных возмущений высокоскоростных струй вследствие действия окружающего воздуха. Эти уравнения решены в пределе малых возмущений, что позволило в линейном приближении определить соответствующий инкремент [3]. В данной работе приводятся некоторые результаты численного решения квазиодномерных уравнений динамики струй [1, 2] для случая конечных плоских изгибных возмущений струй ньютоновских вязких жидкостей кругового сечения.

1. Основные уравнения. Остановимся прежде всего на варианте задачи без учета силы лобового сопротивления воздуха. При этом случаю бесконечной, первоначально прямолинейной струи отвечают возмущения в виде стоячих волн с растущей во времени амплитудой. Для достаточно вязкой жидкости можно пренебречь инерционными членами по сравнению с вязкими во всех уравнениях задачи, кроме проекции уравнения количества движения на нормаль к оси струи (вязкие члены в последнем уравнении малы: имеют порядок перерезывающей силы). После преобразований, подробности которых приведены в [1], представим квазиодномерные уравнения неразрывности, количества движения (проекция на нормаль и касательную к оси струи), момента количества движения, а также

кинематические и геометрические соотношения в следующем безразмерном виде:

$$(1.1) \quad \partial \lambda a^2 / \partial t + \partial a^2 W / \partial s = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda a^2 V_n}{\partial t} + V_\tau a^2 \lambda^{-1} \frac{\partial V_n \lambda}{\partial s} + \frac{\partial a^2 V_n W}{\partial s} + a^2 W V_\tau \lambda k = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial Q_n}{\partial s} + \lambda P k \right) - J \frac{k a^2}{\lambda},$$

$$V_\tau = C \int_0^s \frac{\lambda}{a^2} ds + \int_0^s k V_n \lambda ds, \quad C = - \frac{\int_0^{1/4} k V_n \lambda ds}{\int_0^{1/4} \lambda / a^2 ds},$$

$$P = 3a^2 (\lambda^{-1} V_{\tau, s} - k V_n),$$

$$Q_n = - \frac{a_0^2}{4\lambda l^2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ a^2 \left[\frac{3}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial V_n}{\partial s} + k V_\tau \right) - \frac{9}{2} \frac{k}{\lambda} \frac{\partial V_\tau}{\partial s} + \frac{9}{2} k^2 V_n \right] \right\},$$

$$W = V_\tau - V_n H_{,s}, \quad k = (\partial^2 H / \partial s^2) [1 + (\partial H / \partial s)^2]^{-3/2},$$

$$\partial H / \partial t = V_n \lambda, \quad \lambda = [1 + (\partial H / \partial s)^2]^{1/2},$$

где a — радиус струи, отнесенный к начальному значению a_0 ; t — время; s — параметр, отсчитываемый вдоль оси невозмущенной струи; V_n и V_τ — проекции скорости на оси струи на нормаль и касательную к оси; H — отклонение оси струи от прямой; P и Q_n — величины продольной и перерезывающей сил в сечении струи; k — кривизна оси струи. Кроме того, в качестве линейного и временного масштабов взяты длина волны наиболее быстро растущего малого изгибного возмущения и характерное время его роста:

$$l = 2\pi \left(\frac{9}{8} \frac{\mu^2 a_0^4}{\rho \rho_1 U_0^2} \right)^{1/6}, \quad T = \left(\frac{\rho \mu a_0^2}{\rho_1^2 U_0^4} \right)^{1/3},$$

а в качестве масштаба для напряжений — μ/T . Здесь μ — коэффициент вязкости жидкости; ρ и ρ_1 — плотности жидкости и воздуха; U_0 — скорость движения невозмущенной струи. Для критериев подобия введены обозначения: $\text{Re} = \rho l^2 / \mu T$, $J = \rho_1 U_0^2 T^2 / \rho l^2$.

Начальное возмущение задавалось в виде

$$(1.2) \quad V_n = V_\tau = 0, \quad a = 1, \quad H = H_0 \sin 2\pi s, \quad H_0 = (5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2})$$

при граничных условиях

$$(1.3) \quad a(s) = a(-s), \quad V_n = V_\tau = H = 0, \quad s = 0,$$

$$a(1/4 + s) = a(1/4 - s), \quad V_n(1/4 + s) = V_n(1/4 - s),$$

$$H(1/4 + s) = H(1/4 - s), \quad V_\tau = 0, \quad s = 1/4.$$

В данном случае достаточно рассматривать лишь четверть длины волны возмущения.

При наличии силы лобового сопротивления воздуха (учитываемой с помощью коэффициента сопротивления цилиндра при поперечном обтекании, см. [1]) и достаточно большой вязкости жидкости движение струи может быть отчетливо разделено на две составляющие разной природы. Одна из них — это снос возмущения струи как целого в направлении, противоположном движению струи, вторая — деформация струи на фоне такого сноса под действием «подъемной» составляющей аэродинамической силы [1, 3]. Если струя имеет некоторое начальное искривление, так что сила лобового сопротивления отлична от нуля, то, как легко убедиться, сносящее инерционное движение остается даже в пределе бесконечно большой вязкости, когда изгибные деформации становятся бесконечно медленными и инерционными эффектами при их развитии можно пренебречь. Ось струи вследствие сноса может приобретать достаточно сложную форму, возникают «перехлесты», поэтому приходится отказываться

от указанной выше параметризации оси струи в пользу лагранжевой параметризации.

Пусть начальное возмущение оси струи задается синусоидой $H = H_0 \sin 2\pi\xi$, где ξ — декартова координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи (изгиб происходит в плоскости $\xi\eta$). Тогда значение координаты ξ для данной жидкой частицы в начальный момент времени будем считать ее лагранжевым параметром s . Для такой параметризации в кинематических соотношениях работ [1, 2] надо полагать $ds/dt = 0$. Сохраняя введенные ранее масштабы и по-прежнему оставляя инерционные члены только в проекции уравнения количества движения на нормаль к оси струи, получаем после ряда преобразований (см. в [1]) квазиодномерные уравнения струи в виде

$$(1.4) \quad a^2 = \lambda_0/\lambda, \quad \lambda = (\xi_{,s}^2 + H_{,s}^2)^{1/2}, \quad \lambda_0 = [1 + (2\pi H_0 \cos 2\pi s)^2]^{1/2},$$

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial t} + V_\tau \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial V_n}{\partial s} + kV_\tau \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\lambda a^2} \frac{\partial Q_n}{\partial s} + k\Sigma_{\tau\tau} \right) - JF(s),$$

$$\Sigma_{\tau\tau} = 3(\lambda^{-1}V_{\tau,s} - kV_n),$$

$$Q_n = -\frac{a_0^2}{4\lambda l^2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ a^2 \left[\frac{3}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial V_n}{\partial s} + kV_\tau \right) - \frac{9}{2} \frac{k}{\lambda} \frac{\partial V_\tau}{\partial s} + \frac{9}{2} k^2 V_\tau \right] \right\},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = V_\tau n_\eta - V_n \tau_\eta, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = V_n \tau_\xi - V_\tau n_\xi,$$

$$\tau_\xi = [1 + (H_{,s}/\xi_{,s})^2]^{-1/2}, \quad n_\xi = -(H_{,s}/\xi_{,s})[1 + (H_{,s}/\xi_{,s})^2]^{-1/2},$$

$$\tau_\eta = -n_\xi, \quad n_\eta = \tau_\xi, \quad V_\tau = V_{\tau 0} + C \int_0^s \frac{\lambda}{a^2} ds + \int_0^s kV_n \lambda ds,$$

$$C = - \int_0^{1/2} kV_n \lambda ds \Big/ \int_0^{1/2} \lambda/a^2 ds,$$

$$V_{\tau 0} = \left\{ \Phi - C \int_0^{1/2} \lambda_0 \tau_\xi \left[\int_0^s \lambda/a^2 ds \right] ds - \int_0^{1/2} \lambda_0 \tau_\xi \left[\int_0^s kV_n \lambda ds \right] ds - \int_0^{1/2} \lambda_0 V_n n_\xi ds \right\} \Big/ \int_0^{1/2} \lambda_0 \tau_\xi ds,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -J \int_0^{1/2} \lambda_0 n_\xi F(s) ds, \quad t=0, \quad \Phi=0,$$

$$F(s) = \frac{\xi_{,s}^2 (H_{,ss} \xi_{,s} - \xi_{,ss} H_{,s})}{(\xi_{,s}^2 + H_{,s}^2)^{5/2}} + \frac{l}{\pi a_0} \frac{1}{a} \frac{(H_{,s}/\xi_{,s})^2 \text{sgn}(H_{,s}/\xi_{,s})}{1 + (H_{,s}/\xi_{,s})^2},$$

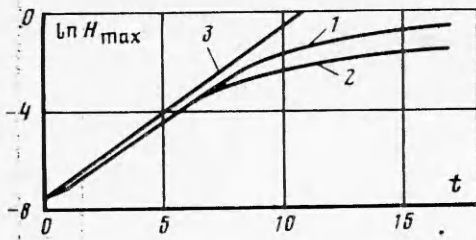
где n_η , n_ξ и τ_η , τ_ξ — проекции нормали и касательной к оси струи на оси декартовой системы координат $O_1\xi\eta$. Считается, что в начальный момент функции $a = a(s)$ и $V_\tau = V_\tau(s)$ имеют период $1/2$, а функции $V_n = V_n(s)$ и $H = H(s)$ удовлетворяют условиям

$$(1.5) \quad \begin{cases} V_n(s) = -V_n(s + 1/2), \\ H(s) = -H(s + 1/2) \end{cases}$$

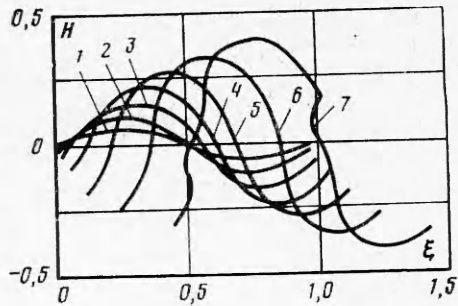
(последнее условие, в частности, выполняется вследствие выбора начального возмущения оси струи в виде синусоиды). Эти условия будут также выполняться и для любого момента времени. В расчетах считалось, что $V_n = V_\tau = 0$, $a = 1$ при $t = 0$, следствием чего было начальное условие

$$\text{для } \Phi = \int_0^{1/2} \lambda_0 (V_\tau \tau_\xi + V_n n_\xi) ds \text{ в (1.4).}$$

Использовавшиеся в расчетах граничные условия (1.3), (1.5) обеспечивали периодическое продолжение решения, отвечающего одной дли-



Фиг. 1



Фиг. 2

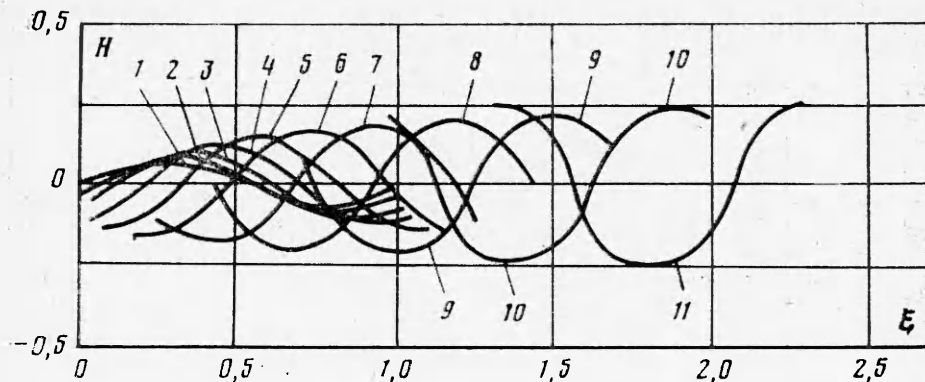
не волны возмущения на всю струю. В результате исследовалась так называемая временная неустойчивость струи в системе отсчета, связанной с невозмущенной струей.

Отметим, что при изгибе струй высоковязких жидкостей поверхностное натяжение несущественно, поэтому им всюду пренебрегали.

2. Результаты расчетов. Численная реализация систем уравнений (1.1), (1.4) осуществлялась с помощью неявной конечно-разностной схемы, спектр которой для малых возмущений хорошо воспроизводил спектр линеаризованной дифференциальной задачи. Отметим, что при формальном исследовании конечно-разностной схемы оказывается, что она имеет растущие со временем решения, что вовсе не указывает на ее непригодность, а лишь отображает естественную неустойчивость исследуемого физического явления. Детали, относящиеся к конечно-разностному методу, приведены в [1, 4].

В расчетах исследовалось развитие изгибных возмущений струй весьма вязких ньютоновских жидкостей ($\mu = 10-10^3$ П, $\rho = 1$ г/см³, $a_0 = 10^{-1}$ см), движущихся в «воздухе» ($\rho_1 = 10^{-3}$ г/см³) со скоростью $U_0 = 10^3$ см/с. Данные, полученные без учета силы лобового сопротивления воздуха, показывают, что малое начальное возмущение струи вида (1.2) с $H_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ быстро становится самосогласованным и нарастает со скоростью, предсказываемой линейной теорией [3]. Об этом свидетельствует сравнение на фиг. 1 наклонов линейных участков кривых 1 ($\mu = 10$ П) и 2 ($\mu = 100$ П) с прямой 3, отвечающей линейной теории [3]. При дальнейшем росте амплитуды возмущения его гармоническая форма искажается, а скорость роста замедляется. Последнее происходит под действием вязких напряжений, обусловленных нелинейным эффектом — удлинением оси струи при изгибе. Здесь и далее данные на фигурах представлены в безразмерных величинах; в случае $\mu = 10$ П масштабы равны: $T = 0,0047$ с, $l = 0,943$ см, а в случае $\mu = 100$ П — $T = 0,01$ с, $l = 2,02$ см. Подчеркнем, что здесь приводятся данные, полученные для возмущения с длиной волны, которой отвечает наибольший инкремент на линейной стадии роста.

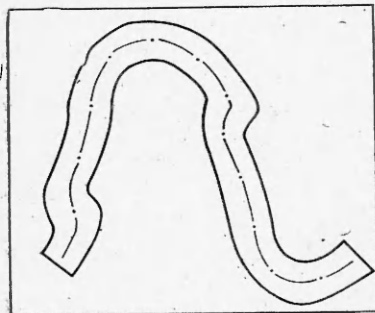
Если в расчетах без учета силы лобового сопротивления воздуха изгибные возмущения представляют собой систему стоячих по отношению к струе волн с растущей со временем амплитудой, то наличие сопротивления приводит к сносу возмущений набегающим потоком вдоль струи вплоть до их опрокидывания. На фиг. 2 ($\mu = 10$ П) и 3 ($\mu = 100$ П) представлен вид отрезка струи, соответствующего одной длине волны возмущения, в различные моменты времени, которые указаны цифрой у каждой из кривых. Данные, представленные на фиг. 2, показывают, что скорость сноса возмущения вдоль струи составляет приблизительно 1,5% скорости движения невозмущенной струи U_0 . Фактически в этом случае возмущения также представляют собой стоячие волны, несмотря на наличие силы лобового сопротивления воздуха. Весьма быстро ($t = 7$) ось струи приобретает форму уступа, в результате чего возникает «перехлест». За это время возмущение сносится потоком воздуха приблизительно на 0,47 см,



Ф и г. 3

а струя пролетает 33 см. Увеличение вязкости жидкости при сохранении неизменными остальных параметров приводит к росту расстояния, на которое волна возмущения распространяется вдоль струи до опрокидывания (см. фиг. 3). Форма возмущения большую часть времени до опрокидывания слабо зависит от лобового сопротивления и определяется в основном «подъемной» составляющей аэродинамической силы. Это естественно, так как сила лобового сопротивления квадратична по амплитуде возмущения и, следовательно, существенна только для достаточно больших возмущений.

Даже на поздних стадиях деформирования, когда величина амплитуды возмущения приближается к длине его волны, не происходит разрыва струи. Это иллюстрируется фиг. 4, показывающей вид отрезка струи жидкости с $\mu = 10 \Pi$ на протяжении одной длины волны возмущения в момент опрокидывания (соответствует $t = 7$, фиг. 2). Изгиб сопровождается практически синхронным утоньшением струи по всей ее длине. Поэтому вопрос о нарушении сплошности струи в результате роста изгибных возмущений остается открытым. Немногочисленные экспериментальные данные [5—7] показывают, что разрушение струи происходит после развития изгибных возмущений достаточно большой амплитуды и рассматриваемый механизм выходит за рамки квазиодномерных процессов. Разрушение струй происходит, по видимому, до того, как начинает сказываться стабилизирующее влияние вязких напряжений, связанных с удлинением оси при изгибе. Поэтому для вычисления скорости роста изгибных возмущений, ведущих к распаду струи, можно с достаточной хорошей точностью пользоваться результатами линейной теории [3], о чем свидетельствует сравнение их с данными численных расчетов.



Ф и г. 4

Поступила 27 V 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Ярин А. Л. Динамика струй капельной жидкости. Препринт № 127. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1979.
2. Ентов В. М., Ярин А. Л. Уравнения динамики струй капельной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
3. Ентов В. М., Ярин А. Л. Поперечная устойчивость струи капельной жидкости во встречном потоке воздуха. — ИФЖ, 1980, т. 38, № 5.
4. Ярин А. Л. Теоретическое исследование динамики и распада свободных струй жидкостей. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1980.

5. Генлейн А. Распад струи жидкости.— В кн.: Двигатели внутреннего сгорания. Т. 1. М.—Л.: ОНТИ, 1936.
 6. Иванов В. А. О дроблении жидкой струи.— ПМТФ, 1966, № 4.
 7. Grant R. P., Middleman S. Newtonian jet stability.— AIChE J., 1966, vol. 12, N 4.

УДК 532.526, 530.182

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ И НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

В. П. Реутов
(Горький)

Одно из перспективных направлений в нелинейной теории неустойчивости сдвиговых течений связано с исследованием критического слоя (КС) [1—6]. Наиболее детально в настоящее время изучены стационарные волны с вязким нелинейным КС [2, 3]. Анализ нестационарных процессов, представляющих основной практический интерес, проводился при значительных упрощающих ограничениях [4—6]. Так, нелинейное развитие волны в канале и в пограничном слое рассматривалось лишь в предельном случае сильнонелинейного КС, близкого к стационарному [5]. Однако для решения проблемы возникновения турбулентности в этих течениях необходимо иметь представление об эволюции первоначально линейной волны.

Ниже для исследования нелинейной стадии неустойчивости в плоском течении Пуазейля используется подход, аналогичный предложенному в [6] для ветровой неустойчивости. Рассматривается развитие длинных волн, которые на плоскости (R, α) (α — волновое число, R — число Рейнольдса) изображаются точками в окрестности верхней ветви нейтральной кривой линейной теории. Для таких волн оказывается возможным независимое рассмотрение КС и вязких областей вблизи стенок канала. На основе анализа нестационарного КС получены уравнения, описывающие развитие волны во времени. Прослеживается переход от линейного вязкого КС к сильнонелинейному по мере нарастания амплитуды волны.

Как известно, проблемы устойчивости систем с гидродинамическими потоками во многом аналогичны тем, что возникают при анализе взаимодействия волна — частица в плазме [7—9]. В данной работе на основе плазменно-гидродинамической аналогии дается определение энергии волны в течении Пуазейля, позволяющее интерпретировать полученные результаты с позиций общей теории волн.

1. Исходные соотношения. Запишем уравнения для вязкой несжимаемой жидкости в виде [10]

$$(1.1) \quad \partial \zeta / \partial t + u \partial \zeta / \partial x + v \partial \zeta / \partial y = \nu \Delta \zeta;$$

$$(1.2) \quad \Delta \Psi = -\zeta,$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; ζ — завихренность течения; Ψ — функция тока, введенная соотношениями $u = \partial \Psi / \partial y$, $v = -\partial \Psi / \partial x$; $\nu = 1/R \ll 1$ — обратное число Рейнольдса (все переменные предполагаются приведенными к безразмерной форме). Полагая

$$\Psi = \int U(y) dy + \psi,$$

где $U(y) > 0$ — профиль скорости в стационарном течении Пуазейля между стенками $y = 0$ и $y = 2$, получим следующее уравнение для ψ :

$$(1.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi$$

(штрихи означают производные по y). Рассматривая периодические по x волны, будем обозначать переменной с индексом n ($n = 1, 2, \dots$) комплексные амплитуды фурье-гармоник: $\psi_n(y, t) = \langle \psi \exp(-in\alpha \xi) \rangle$ и т. п., где $\xi = x - ct$, c — фазовая скорость волны, $\langle \dots \rangle$ — среднее по периоду. В линейном приближении профиль $\psi_1(y)$ нейтральной синусоидальной волны в идеальной жидкости удовлетворяет уравнению Рэлея [10]. Профиль завихренности в такой волне можно представить в виде

$$(1.4) \quad \zeta_1 = -[U'' / (U - c)] \psi_1.$$