

Рис. 4. Зависимость τ_* от $\ln(\Theta^2)$.
1 — $\sigma=1$; 2 — $\sigma=5$; 3 — $\sigma=10$; 4 — $\sigma=25$; 5 —
расчет по результатам работы [1] для зажигания
твердого тела.

Оказалось, что протекающая в газе химическая реакция приводит к увеличению времени развития естественной конвекции. Это связано с уменьшением перепада температур между нагретой цилиндрической поверхностью и окружающей средой, температура которой растет

вследствие химического тепловыделения.

Время развития конвекции в этом случае можно представить следующей формулой:

$$\tau_K = 1,77Gr^{-0,5} + 0,54\sigma\Theta_N^{-1,8}Gr^{-0,5},$$

где в качестве масштаба времени использована величина r^2/ν . Первое слагаемое характеризует время развития конвекции в инертном газе, второе — увеличение этого времени, обусловленное протекающей химической реакцией.

Поступила в редакцию 14/VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Merzhanov, A. E. Averson. Comb. and Flame, 1971, 16, 83.
2. А. Г. Мержанов, Э. А. Штессель. Докл. АН СССР, 1970, 194, 1, 136.
3. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1939, 9, 12.
4. Е. П. Костогоров, Э. А. Штессель, А. Г. Мержанов. — В сб.: Теплообмен-6. Т. 1, вып. 3. Минск, 1980.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЗАЖИГАНИЯ

И. Г. Дик, А. Б. Зурер

(Томск)

Формированию теплового слоя у поверхности конденсированного вещества под воздействием внешнего источника отводится большая роль в современной теории зажигания [1]. Математическое описание процесса, предшествующего собственно воспламенению, включает в себя уравнение теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями. В настоящей работе показана возможность использования метода интегральных соотношений [2] для решения тепловой задачи применительно к расчету характеристик зажигания. Как показано ниже, этот метод, обеспечивая достаточную точность, позволяет получить простые конечные формулы. Отличительной особенностью применения метода интегральных соотношений в задачах теории зажигания является полубесконечность пространства, где строится решение уравнения теплопроводности. Иллюстрация и апробация метода проведены на ряде задач, уже решенных различными способами.

Характеристики теплового пограничного слоя в простейшем случае находятся из решения уравнения $c\rho\partial T/\partial t = \lambda\partial^2 T/\partial x^2$ с условиями $T(0, x) = T(t, \infty) = T_0$. Граничное условие на поверхности ($x=0$) может принимать различную форму, отражающую способ нагрева.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = E(T - T_*)/(RT_*^2), \quad \xi = x/x_*, \quad \tau = t/t_*,$$

$$t_* = (RT_*^2 c/EQ) z \exp(E/RT_*), \quad x_* = \sqrt{\lambda t_*/c\rho}.$$

Здесь Q — тепловой эффект реакции; z — предэкспонент; E — энергия активации; T — температура; R — универсальная газовая постоянная; x — координата; t — время; c — теплоемкость; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности. Значение масштабной температуры T_* выгодно выбирать в соответствии с граничными условиями. Интегрируя уравнение теплопроводности в безразмерной форме по ξ от 0 до ∞ , получим интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \Theta d\xi = -(\partial\Theta/\partial\xi)|_{\xi=0}. \quad (1)$$

Пробную функцию, удовлетворяющую (1), будем искать в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = \varphi(\tau) \exp[-\beta(\tau)\xi] + \Theta_0, \quad (2)$$

выбирая связь между $\varphi(\tau)$ и $\beta(\tau)$ так, чтобы (2) удовлетворяло начальному и граничному (при $\xi = 0$) условиям. Подставляя (2) в (1) и используя граничные условия, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $\beta(\tau)$. Нахождение $\beta(\tau)$ завершает построение приближенного решения уравнения теплопроводности.

Для нахождения характеристик зажигания полученное решение будем «сшивать» либо с условием зажигания [3], определенное как достижение градиентом температуры на поверхности критического значения

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} = -\sqrt{2(\exp\Theta_s - \exp\Theta_0)},$$

либо с условием [4], согласно которому в момент зажигания темп нагрева поверхности внешним источником $\partial\Theta_s/\partial\tau$ сравнивается с адиабатическим ростом температуры

$$\partial\Theta_s/\partial\tau = \exp(\Theta_s).$$

Здесь $\Theta_s = \Theta(\tau, 0)$ — температура поверхности вещества; $\Theta_0 = \Theta(0, \xi)$ — начальная температура.

В таблице приведены граничные условия, вид пробного профиля, примененный критерий и полученные характеристики зажигания (τ_i — время зажигания, Q_i — температура поверхности при $\tau = \tau_i$) для трех типичных тепловых источников.

Сравнение полученных результатов с литературными данными вполне удовлетворительно. Например, в [5] на основании численных расчетов задачи о зажигании конденсированного вещества накаливаемым телом рекомендована зависимость $\tau_i = 0,21\Theta_0^2$. Аналогичная ситуация и в задаче с граничными условиями второго рода [4]. Зажигание при граничных условиях третьего рода допускает применение обоих критериев. Сравнение с численными результатами [4] дает, естественно, что критерий [3] предпочтительней при $Nu \gg 1$, а [4] — при $Nu \ll 1$. Смена области применимости этих формул происходит при $Nu \approx 0,1$. В отличие от результатов [4], полученных на основе точного решения уравнения теплопроводности, метод интегральных соотношений дает конечные формулы в простом и удобном виде. Погрешность определения τ_i (в области их применимости) по сравнению с численным счетом не превышает 20%.

Отметим, что метод интегральных соотношений в задаче зажигания бесконечным телом с граничным условием на поверхности четвертого рода дает точное значение температуры плоскости соприкосновения

Анализируемые величины и граничные условия	Источник тепла		
	накаленное тело	тепловой поток	горячий газ
Граничное условие	$T(0, t) = T_s = \text{const}$	$\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = -\frac{q}{\lambda}$	$\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} (T(0, t) - T_\Gamma)$
Масштаб температуры	$T^* = T_s$	$q = \frac{\lambda R T_s^2}{E x_*}$	$T_* = T_\Gamma$
Безразмерное граничное условие	$\Theta(0, \tau) = 0$	$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big _{\xi=0} = -1$	$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big _{\xi=0} = -\text{Nu} \Theta(0, \tau)$
Пробный профиль	$\Theta = \Theta_0 [1 - e^{-\beta \xi}]$	$\Theta = \beta e^{-\xi/\beta} + \Theta_0$	$\Theta = \Theta_0 [1 - \beta \exp(-\text{Nu} \xi (1 - \beta)/\beta)]$
$\beta(\tau)$	$1/\sqrt{2\tau}$	$\sqrt{\tau}$	$\tau = \text{Nu}^{-2} \{ \ln [1 - \beta] + [(1 - \beta)^2 - 1]/2 \}$
Критерий зажигания	$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big _{\xi=0} = -\sqrt{2}$	$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \Big _{\xi=0} = e^{\Theta_s}$	$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big _{\xi=0} = -\sqrt{2e^{\Theta_s}}$ $\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \Big _{\xi=0} = e^{\Theta_s}$
Характеристики зажигания	$\tau_i = \Theta_0^2/4$	$\Theta_i = -\ln(2\sqrt{\tau_i}),$	$\text{Nu}^2 \Theta_i^2 = 2e^{\Theta_i}$ $e^{\Theta_i} = \text{Nu}^2 \Theta_i^3 / (\Theta_0^2 - \Theta_i^2)$
		$\Theta_0 + \sqrt{\tau_i} = \Theta_i$	$\tau_i = \text{Nu}^{-2} \left\{ \ln \frac{\Theta_i}{\Theta_0} + \frac{\Theta_0^2 - \Theta_i^2}{2\Theta_i^2} \right\}$

[6]; нахождение характеристик зажигания сводится к расчетам по формуле для граничных условий первого рода.

Обратимся к задачам зажигания, в которых имеются критические условия. Вначале рассмотрим зажигание тонкого стержня с торца лучистой энергией с учетом боковых теплопотерь [7]. В безразмерных переменных уравнения нагрева стержня и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\partial\Theta/\partial\tau &= \partial^2\Theta/\partial\xi^2 - \omega(\Theta - \Theta_0), \\ \partial\Theta/\partial\xi|_{\xi=0} &= -q_0, \quad \Theta(\infty, \tau) = \Theta_0.\end{aligned}$$

Кроме использованных ранее в задаче появляются два новых безразмерных параметра: интенсивность теплоотдачи

$$\omega = (RT_*^2/E) [\lambda\delta(\text{Bi})/QZr_1^2] \exp(E/RT_*)$$

и безразмерный поток тепла

$$q_0 = (q/\sqrt{\lambda\rho QZ}) \sqrt{l/RT_*} \exp(E/2RT_*).$$

Здесь r_1 — радиус порохового стержня; $\delta(\text{Bi})$ — коэффициент, характеризующий теплоотдачу в окружающую среду. Следуя рекомендациям [7], выберем в качестве T_* пока неизвестную температуру подключения химических реакций.

Применяя изложенную выше методику (пробный профиль выберем подобно (2)), получим для динамики роста температуры поверхности соотношение

$$\Theta_s = q_0 \sqrt{1 - \exp(-\omega\tau)}/\omega + \Theta_0. \quad (3)$$

Согласно методу [4], приравниваем $d\Theta_s/d\tau$, найденную из (3), суммарной интенсивности источников $\exp(\Theta_s) - \omega(\Theta_s - \Theta_0)$, учитывая при этом, что выбор масштаба температуры дает в момент зажигания значение $\Theta_s = 0$. В результате этих действий получим

$$q_0 \sqrt{1 - \exp(-\omega\tau_i)} + \Theta_0 \sqrt{\omega} = 0, \quad (4)$$

$$q_0 \omega \exp(-\omega\tau_i) = 2(1 + \omega\Theta_0) \sqrt{1 - \exp(-\omega\tau_i)}. \quad (5)$$

Исключая в (4), (5) q_0 , определим время зажигания

$$\tau_i = \omega^{-1} [\ln(1 + \omega\Theta_0/2)/(1 + \omega\Theta_0)]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим выражение для масштабной температуры (температуры зажигания) $q_0^2 = -(2\Theta_0 + \omega\Theta_0^2)$. Если в (4) $\omega \rightarrow 0$, то время зажигания световым потоком без теплопотерь $\tau_i = -\tau_{i0} = -\Theta_0/2$. Теперь (6) можно переписать в следующей форме:

$$\tau_i = \omega^{-1} \ln[(1 - \omega\tau_{i0})/(1 - 2\omega\tau_{i0})]$$

или в размерном виде

$$t_i = a \ln [(1 - t_{i0}/a)/(1 - 2t_{i0}/a)], \quad (7)$$

где $a = c\rho r_1^2/[(\lambda\delta(\text{Bi}))]$. Таким образом, метод интегральных соотношений позволил довести расчет периода зажигания до конечных формул.

В [7] на основании обработки ряда вариантов расчетов на ЭВМ предложена формула

$$t_i = t_{i0}(1 - 1,78t_{i0}/a)^{-1},$$

дающая, как видно из рис. 1, значения, близкие к (7). Полагая в (4), (5) $\tau_i = \infty$, получим критические условия зажигания $\omega\Theta_0 = -1$, $q_0 + \Theta_0\sqrt{\omega} = 0$, совпадающие с полученными в [7].

Другой пример появления критических условий — задача о поджигании ВВ нагретым телом ограниченных размеров. Пусть пластина с температурой T_{s0} и толщиной h приводится в соприкосновение с под-

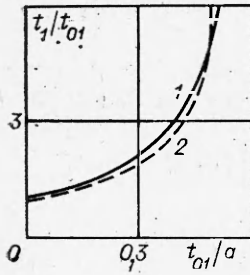


Рис. 1. Обработка вариантов расчета.
1 — данные [7]; 2 — зависимость (7).

жигаемым, веществом, имеющим температуру T_0 . Часть тепла остывающей пластины идет на прогрев ВВ, остальное теряется в окружающей среде, с которой пластина обменивается теплом по ньютоновскому закону. При очевидных предположениях математическое описание процесса нагрева вещества имеет вид

$$c\rho\partial T/\partial t = \lambda\partial^2 T/\partial x^2,$$

$$c_1\rho_1 h dT_s/dt = \lambda(\partial T/\partial x)|_{x=0} = -\alpha(T_s - T_0),$$

$$T(x, 0) = T(\infty, \tau) = T_0,$$

где $T_s = T(0, \tau)$; $T_s(0) = T_{s0}$; α — коэффициент теплоотдачи пластины в окружающую среду температуры T_0 . Индексом 1 обозначены параметры, относящиеся к поджигающей среде.

Используя введенные выше безразмерные переменные, получим

$$\partial\Theta/\partial\tau = \partial^2\Theta/\partial\xi^2, \quad (8)$$

$$k\sigma d\Theta_s/d\tau = (\partial\Theta/\partial\xi)|_{\xi=0} - \omega_1(\Theta_s - \Theta_0), \quad (9)$$

$$\Theta(\xi, 0) = \Theta(\infty, \tau) = \Theta_0, \quad \Theta(0, \tau) = \Theta_s(\tau), \quad \Theta_s(0),$$

где $k_1 = c_1\rho_1/c\rho$; $\sigma = h/x_*$; $\omega_1 = \alpha x_*/\lambda$. В качестве T_* выбрана начальная температура поджигающей среды. Пробный профиль

$$\Theta(\xi, \tau) = (\Theta_s - \Theta_0)\exp(-\xi/f(\tau)) + \Theta_0$$

подставим в проинтегрированное от 0 до ∞ уравнение (8), а также в (9). Получим

$$d[(\Theta_s - \Theta_0)f]/d\tau = (\Theta_s - \Theta_0)/f, \quad (10)$$

$$k\sigma d\Theta_s/d\tau = -(\Theta_s - \Theta_0)(1 + \omega_1 f)/f. \quad (11)$$

После деления (10) на (11) и преобразований полученное уравнение

$$f + (\Theta_s - \Theta_0)df/d\Theta_s = -k\sigma/(1 + \omega_1 f) \quad (12)$$

дает следующее решение (применено разложение в ряд по малому ω_1 , т. е. $(1 + \omega_1 f)^{-1} \approx 1 - \omega_1 f$):

$$f = k\sigma [(1 - \Theta_s/\Theta_0)^{k\sigma\omega_1 - 1} - 1]/(1 - k\sigma\omega_1),$$

удовлетворяющее условию $\Theta_s = 0, f = 0$.

Для нахождения Θ_i , пользуясь критерием [3], получим

$$(\Theta_i - \Theta_0)(1 - k\sigma\omega_1)/[(1 - \Theta_i/\Theta_0)^{k\sigma\omega_1 - 1} - 1] = \sqrt{2}k\sigma \exp(\Theta_i/2). \quad (13)$$

Из анализа (13) видно, что при $|\Theta_i| \ll \Theta_0$ (необходимое условие зажигания) решение имеется не всегда, т. е. существуют критические условия зажигания. Найдем их, используя разложение в ряд по малому параметру Θ_i/Θ_0 до членов второй степени

$$\Theta_{i*} = \Theta_{i*}^0/(1 + k\sigma\Theta_{i*}^0/2\Theta_0), \quad (14)$$

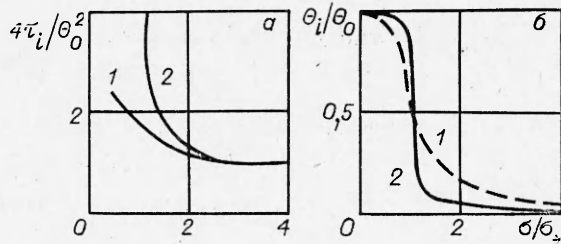
$$\sigma_* = \sigma_*^0(1 + b\omega_1|\Theta_0|). \quad (15)$$

Здесь $b = e/2\sqrt{2} = 0,96$. При $\omega_1 = 0$ имеем

$$\Theta_{i*} = \Theta_{i*}^0 = -2(1 + 4/\Theta_0)^{-1}, \quad (16)$$

$$k\sigma_* = k\sigma_*^0 = 0,96\Theta_0^2/(1 - 4/\Theta_0).$$

Рис. 2. Время зажигания (а) и температура зажигания (б) как функции удаления от предела.
1 — $\Theta_0=5$; 2 — $\Theta_0=30$.



Результат (16) согласуется с решением, найденным в [8], где асимптотическим методом исходная задача сведена к обыкновенному

дифференциальному уравнению $\sigma_* = 0,395\Theta_0^2/k$, анализ которого проведен на ЭВМ. С ростом теплоотдачи ω_1 необходимый для зажигания запас тепла, естественно, возрастает. Из (14) видно, что с увеличением ω_1 уменьшается падение температуры поверхности в момент зажигания.

Справедливость примененного в (12) разложения по $\omega_1 f$ можно оценить, используя апостериорные оценки (14), (16) (при $\tau = 0$, $f = 0$; наибольшая погрешность будет при $\Theta_s = \Theta_{si}$). Ниже приведены верхние значения $w_1 f = w_1 f(\Theta_{si}^*)$ при различных Θ_0 и $\omega_1 \Theta_0$.

	$\omega_1 \Theta_0 = 0,1$	$\omega_1 \Theta_0 = -0,2$	$\omega_1 \Theta_0 = -0,4$	$\omega_1 \Theta_0 = -0,5$
$\Theta_0 = -10$	0,21	0,36	0,37	0
$\Theta_0 = -20$	0,2	0,33	0,34	0

При $\omega_1 = 0$ можно получить все характеристики зажигания. В этом случае уравнения (10), (11) легко интегрируются, и после применения критерия зажигания [3] имеем уравнения для расчета времени зажигания τ_i и температуры поверхности при $\tau = \tau_i$

$$-(\Theta_i - \Theta_0)^2 / k \sigma \Theta_i = \sqrt{2} \exp(\Theta_i/2), \quad (17)$$

$$\tau_i = k^2 \sigma^2 [\ln(1 - \Theta_i/\Theta_0) + (\Theta_i/\Theta_0)/(1 - \Theta_i/\Theta_0)]. \quad (18)$$

(Уравнение (17) можно получить из (13), положив $\omega_1 = 0$.) Результаты расчетов по формулам (17), (18) представлены на рис. 2. На графике хорошо видно, что при малых $|\Theta_0|$ зажигание вырождается. Аналогичный вывод делается в [9], где численно исследована задача о необходимом для зажигания запасе тепла.

Возможной вариацией рассмотренной задачи является поиск критических условий зажигания среды, состоящей из инертного газа со взвешенными в нем химически активными частицами, очагом с конечным запасом тепла. При малой объемной концентрации мелких частиц такую среду можно рассматривать как сплошную двухтемпературную [10], перенос тепла в которой определяется теплопроводностью газа. Будем считать также малым и прирост теплоемкости на единицу объема

$$B = 4\pi r^3 n c_k \rho_k / c_p \ll 1$$

(r — радиус частиц, n — количество их в единице объема, величины с индексом k относятся к частицам).

Время прогрева частиц от газа много меньше характерного времени прогрева газа от нагретого тела. В этом случае для стадии прогрева остаются справедливыми полученные выше уравнения, в частности (18).

Критерий зажигания для рассматриваемой среды (при значении параметра Семенова $\kappa = c_k \rho_k r^2 / 3\lambda t_* < 1$) найден в [11]

$$\partial \Theta / \partial \xi |_{\xi=0} = -\sqrt{2} B [\exp(\Theta_i) (1 - \kappa \exp(\Theta_i)) / 2].$$

Здесь в качестве масштабного времени выбрано адиабатическое время воспламенения одиночной частицы при температуре T_{s0}

$$t_* = c_k \rho_k r RT_{s0}^2 \exp(E/RT_{s0}) / (3QzE).$$

Теперь легко получить уравнение для температуры зажигания

$$-(\Theta_i - \Theta_0)^2 = k\sigma\Theta_i\sqrt{2B} \exp(\Theta_i)(1 - \kappa \exp(\Theta_i)/2),$$

анализ которого дает критические условия

$$\Theta_i \approx 2(1 + 0,07\kappa),$$

$$\sigma_* \approx 0,96(1 + \kappa/4e^2)\Theta_0^2/(k\sqrt{B}).$$

Для определения влияния отдельных параметров на критическую толщину поджигающей среды запишем критическое условие в размерном виде

$$h_* \approx 0,96\sqrt{\lambda\gamma c_p \rho_k/c_p} [1 + r/(12e^2\lambda\gamma)] \Theta_0^2 \sqrt{r/B}, \quad (19)$$

где $\gamma = RT_{s0}^2 \exp(E/RT_{s0})/3QzE$.

Из (19) видно, что с ростом r при постоянной массовой концентрации B критическая толщина поджигающей среды возрастает (по мере увеличения радиуса частиц уменьшается общая реакционная поверхность). С увеличением счетной концентрации частиц h_* уменьшается (растет общая реакционная поверхность).

Таким образом, метод интегральных соотношений может оказаться эффективным способом отыскания различных характеристик зажигания независимо от вида внешнего воздействия. Ограниченность метода в значительной мере связана с предварительным выбором вида распределения температуры, влияющим с основным на точность решения и на возможность получения результата в простом виде.

Поступила в редакцию 2/VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мерзханов, А. Е. Авerson. Comb. Flame, 1971, 16, 1.
2. Т. Гудмен. Проблемы теплообмена. М.: Атомиздат, 1967.
3. Я. Б. Зельдович. Докл. АН СССР, 1963, 150, 2.
4. В. Н. Вилюнов. ФГВ, 1966, 2, 2.
5. В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский. Докл. АН СССР, 1963, 152, 1.
6. А. В. Лыков. Теплообмен (справочник). М.: Энергия, 1978.
7. В. Н. Вилюнов, С. С. Хлевной. ФГВ, 1974, 10, 4.
8. В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев. ПММ, 1976, 40, 6.
9. В. Н. Вилюнов, А. К. Колчин. ФГВ, 1966, 2, 3.
10. Э. Н. Руманов, Б. И. Хайкин. ФГВ, 1969, 5, 5.
11. В. И. Лисицын, В. Н. Вилюнов. ВИНТИ № 3007—71 Деп.

САМОВОСПЛАМЕНЕНИЕ ЖИДКИХ ВЕЩЕСТВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА

В. К. Баев, Ю. А. Пронин, В. В. Шумский

(Новосибирск)

В настоящей статье представлены результаты экспериментального исследования самовоспламенения жидких веществ, впрыскиваемых в сверхзвуковой высокоэнтальпийный поток воздуха. Эксперименты проводились в гиперзвуковой импульсной трубе ИТ-301 [1] на модели, представлявшей собой пластину (190 × 90 мм), поверхность которой предполагалась под углом $\alpha = 20 \div 30^\circ$ к оси сопла, создававшего поток воздуха с числом Маха $M_n = 7,3$ (рис. 1). Описание модели и методических вопросов экспериментов приведено в работах [2, 3], в которых изложены выполненные на этой же модели результаты исследований геометрии факела распыла жидкости и условий самовоспламенения газообразного