ПМТФ. № 4, 1970

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

Б. В. Новожилов

(*Москва*)

Получено интегральное уравнение для нестационарной скорости горения пороха. Показано, что влияние переменного тангенциального потока газов на скорость горения (нестационарная эрозия) может быть учтено аналогично тому, как проводится учет изменения давления. Рассмотрено решение уравнения в линейном приближении (скорость горения мало отличается от стационарной).

Большинство работ по теории нестационарного горения пороха основано на идее, впервые высказанной Я. Б. Зельдовичем [1], о главной роли инерционности прогретого слоя конденсированной фазы (инерционностью всех процессов, за исключением теплопроводности в твердом порохе, можно с хорошей точностью пренебречь). В этом приближении показано [2], что нестационарные процессы при горении порохов могут быть рассчитаны путем решения уравнения теплопроводности в конденсированной фазе при заданном начальном распределении температур и известных связях между скоростью горения и температурой поверхности с одной стороны, и давлением и градиентом температуры на поверхности — с другой. Эти связи получаются из пересчета стационарных зависимостей скорости горения и температуры поверхности от давления и начальной температуры пороха. Кроме того, должны быть заданы либо явная зависимость давления от времени, либо уравнение для давления.

Почти все работы по теории нестационарного горения посвящены исследованию влияния изменяющегося давления на скорость горения пороха. Однако аналогично могут быть учтены и другие факторы, воздействующие на скорость горения через газовую фазу. Наиболее важным из них является скорость потока газов, касательного к поверхности горения. Известно (см., например, [3]), что поток газов, протекающих над поверхностью пороха, может изменить скорость его горения. Это явление известно в литературе под названием раздувания или эрозионного горения. Очевидно, что в случае переменного во времени потока тепловая инерционность твердой фазы обусловит определенное запаздывание скорости горения по отношению к значению величины потока в рассматриваемый момент.

1. Основные соотношения теории нестационарного горения. Будем считать известными стационарные законы эрозии, т. е. зависимости скорости горения топлива u° и температуры его поверхности T_1° от начальной температуры T_0 и скорости эрозионного потока G°

$$u^\circ = u^\circ (T_0,\ G^\circ), \qquad T_1^\circ = T_1^\circ (T_0,\ G^\circ) \tag{1.1}$$

При помощи выражения для градиента температуры у поверхности пороха в стационарном режиме

$$f^\circ = \frac{u^\circ}{\varkappa}(T_1^\circ - T_0) \tag{1.2}$$

где $\varkappa$ — температуропроводность твердой фазы, стационарные связи (1.1) могут быть переведены в зависимости скорости горения и температуры поверхности от градиента и скорости эрозионного потока

$$u^\circ = u^\circ (f^\circ,\ G^\circ), \qquad T_1^\circ = T_1^\circ (f^\circ,\ G^\circ) \tag{1.3}$$

В нестационарном случае, когда скорость потока переменна, последние выражения остаются справедливыми, поскольку (1.3) представляют собой связи между величинами, относящимися к безынерционной области (поверхность пороха и газовая фаза безынерционны). Поэтому индекс (градус), характеризующий стационарность, можно опустить.

Аналогично могут быть учтены и другие факторы, влияющие на скорость горения посредством безынерционных зон горения (примером может служить поток излучения, поглощающийся целиком в газовой фазе или на поверхности топлива).

Прежде чем формулировать систему уравнений теории нестационарного горения, введем безразмерные переменные. Если u° — некоторое значение скорости горения (например, начальное или среднее), соответствующее в стационарном режиме давлению p° и скорости потока G°, то безразмерные скорость горения, координата и время записываются в виде

$$v = \frac{u}{u^\circ}, \qquad \xi = \frac{u^\circ}{\varkappa} x, \qquad \tau = \frac{(u^\circ)^2}{\varkappa} t \tag{1.4}$$

где x и t — обычные координата и время. Температуру внутри пороха, а также градиент и температуру на поверхности удобно представить в виде

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1^\circ - T_0}, \qquad \varphi = \frac{f}{f^\circ}, \qquad \vartheta = \frac{T_1 - T_0}{T_1^\circ - T_0} \tag{1.5}$$

где T_1° — температура поверхности, соответствующая скорости u°, давлению p° и скорости потока G°. Наконец, безразмерные давление и скорость тангенциального потока введем как

$$\eta = p / p^\circ, \qquad g = G / G^\circ \tag{1.6}$$

В этих переменных задача теории нестационарного горения пороха формулируется следующим образом. Найти скорость горения $v(\tau)$ из уравнения теплопроводности, учитывающего тепловую инерционность конденсированной фазы

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} - v\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \qquad (\xi < 0) \tag{1.7}$$

с начальным и граничными условиями

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi), \qquad \theta(-\infty, \tau) = 0, \quad \theta(0, \tau) = \vartheta \tag{1.8}$$

при условии, что заданы связи

$$v = v(\varphi, \eta, g), \qquad \vartheta = \vartheta(\varphi, \eta, g) \tag{1.9}$$

а также зависимость давления и эрозионного потока от времени

$$\eta = \eta(\tau), \qquad g = g(\tau) \tag{1.10}$$

Если процесс нестационарного горения протекает в камере, то вместо последних зависимостей должны быть выписаны дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\eta(\tau)$ и $g(\tau)$, а также соответствующие начальные условия. В случае переменности этих функций по объему камеры в задачу войдут еще и координаты точки поверхности горения.

При решении задачи в такой постановке наряду со скоростью горения находится и нестационарное распределение температур в толще пороха $\theta(\xi, \tau)$. Эта функция является побочным продуктом теории, поскольку для решения задач внутренней баллистики она не нужна (исключая некоторые специальные вопросы). Основная задача теории нестационарного горения состоит в предсказании поведения скорости горения $v(\tau)$ при заданных зависимостях $\eta(\tau)$ и $g(\tau)$ (или одной из них). Переформулируем теорию в таком виде, где отсутствует лишняя (с точки зрения внутренней баллистики) функция двух переменных.

2. Интегральное уравнение для нестационарной скорости горения. Считая, что $\theta = 0$ справа от поверхности пороха ($\xi > 0$), применим к уравнению теплопроводности (1.7) преобразование Фурье

$$F(k, \tau) = \int_{-\infty}^{0} \theta(\xi, \tau) e^{-ik\xi} d\xi \tag{2.1}$$

При учете граничных условий уравнение для преобразованной функции будет иметь вид

$$\frac{dF}{d\tau} + (k^2 + ikv) F = \varphi - v\vartheta + ik\vartheta \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$F(k, 0) = \int_{-\infty}^{0} \theta_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \tag{2.3}$$

Линейное уравнение (2.2) имеет решение

$$F(k, \tau) = \int_0^\tau [\varphi(\tau') - v(\tau')\vartheta(\tau') + ik\vartheta(\tau')] \exp[-k^2(\tau - \tau') - ikI]\, d\tau' + $$
$$+ F(k, 0) \exp(-k^2\tau - ikJ) \tag{2.4}$$

где

$$I = \int_{\tau'}^{\tau} v(\tau'')\, d\tau'', \qquad J = \int_0^\tau v(\tau'')\, d\tau'' \tag{2.5}$$

применяя к (2.4) обратное преобразование

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, \tau) e^{ik\xi} dk \tag{2.6}$$

получаем

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\tau \left(\varphi - v\vartheta + \frac{\vartheta(I - \xi)}{2(\tau - \tau')} \right) \exp \frac{-(I - \xi)^2}{2(\tau - \tau')} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{0} \theta_0(u) \exp \frac{-(u + J - \xi)^2}{4\tau} du \right\} \tag{2.7}$$

В это выражение входят три неизвестные функции времени — скорость, градиент и температура на поверхности. Двух связей (1.9) между ними недостаточно для их определения и нахождения $\theta(\xi, \tau)$. Однако можно получить третью зависимость между v, ϑ и φ, если использовать (2.7) в точке $\xi = 0$, т. е. на поверхности пороха. При этом нужно помнить, что при $\xi = 0$ температура терпит разрыв (слева она равна ϑ, а справа — нулю); положив в (2.7) $\xi = 0$, необходимо одновременно умножить правую часть на два. Тогда получим

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\tau \left(\varphi - v\vartheta + \frac{\vartheta I}{2(\tau - \tau')} \right) \exp \frac{-I^2}{4(\tau - \tau')} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{0} \theta_0(u) \exp \frac{-(u + J)^2}{4\tau} du \right\} \tag{2.8}$$

Учитывая также мгновенные связи

$$v = v(\varphi, \eta, g), \qquad \vartheta = \vartheta(\varphi, \eta, g) \tag{2.9}$$

имеем замкнутую систему для определения любой из функций — v, ϑ или φ по заданным зависимостям $\eta(\tau)$ и $g(\tau)$.

При необходимости теперь из (2.7) можно найти и распределение температур в порохе в любой момент времени.

Наиболее интересной величиной является скорость горения. Если известен явный вид функций (2.9), то всегда можно представить систему (2.8), (2.9), в виде одного интегрального уравнения для $v(\tau)$, значение которой в данный момент времени будет зависеть от всей истории изменения внешних параметров $\eta(\tau)$ и $g(\tau)$. Уравнение нелинейно, так как, во-первых, в исходном уравнении теплопроводности есть нелинейный член, соответствующий конвективному потоку тепла, и, во-вторых, связи (2.9) в общем случае нелинейны.

При решении задач внутренней баллистики уравнение (2.8) более предпочтительно, чем исходная система (1.7) — (1.10), по следующим причинам. Прежде всего отпадает надобность в нахождении нигде не применяемой функции двух переменных $\theta(\xi, \tau)$. Это, видимо, приведет к значительному упрощению численного решения тех задач, которые не имеют аналитического решения. Далее, ряд задач теории нестационарного горения может быть решен путем разложения в ряд по малому параметру, скажем по амплитуде гармонически меняющегося давления. В этом случае использование интегрального уравнения приведет к существенному упрощению выкладок — в вычисления не будут входить различного рода поправки к стационарному распределению температур. Наконец, смысл полученного уравнения заключается еще и в том, что оно замыкает систему уравнений внутренней баллистики, в которые в числе других величин входят давление и скорость горения. В случае, когда они постоянны или меняются медленно (квазистационарный режим), система уравнений внутренней баллистики замыкается стационарной связью $u^\circ = u^\circ(p^\circ, T_0)$. В нестационарном случае эта связь должна быть заменена интегральным соотношением (2.8) с дополнительными условиями (2.9). Конечно, форма теории в виде (1.7) — (1.10) тоже может быть применена для той же цели, однако в этом случае система уравнений внутренней баллистики существенно усложняется, так как в нее входит дополнительная функция двух переменных — температура в толще пороха.

3. Линейное приближение, установившийся режим колебаний скорости горения. Предположим, что давление меняется по гармоническому закону

$$\eta = 1 + \eta_1 \cos \omega\tau, \qquad \eta_1 \ll 1$$

Исследуем в линейном приближении установившийся режим скорости горения. Такому режиму соответствует $\tau \to \infty$, когда влияние начальных условий исчезает. Тот член интегрального уравнения, который содержит начальное распределение температур, обращается в нуль из-за множителя $1/\sqrt{\tau}$. В линейном приближении можно применить метод комплексных амплитуд, т. е. считать, что

$$\eta = 1 + \eta_1 e^{i\omega\tau}, \qquad v = 1 + v_1 e^{i\omega\tau}$$

$$\varphi = 1 + \varphi_1 e^{i\omega\tau}, \qquad \vartheta = 1 + \vartheta_1 e^{i\omega\tau}$$

Из (1.9) при $g = \mathrm{const}$ получаются следующие связи между малыми поправками:

$$v_1 = \frac{k}{k + r - 1}\varphi_1 + \frac{\delta - \nu}{k + r - 1}\eta_1, \qquad \vartheta_1 = \frac{r}{k + r - 1}\varphi_1 - \frac{\delta + \mu}{k + r - 1}\eta_1 \tag{3.1}$$

$$k = (T_1^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial T_0}\right)_p, \qquad r = \left(\frac{\partial T_1^\circ}{\partial T_0}\right)_p, \qquad \nu = \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0} \tag{3.2}$$

$$\mu = \frac{1}{(T_1^\circ - T_0)}\left(\frac{\partial T_1^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0}, \qquad \delta = \frac{\partial(u^\circ, T_1^\circ)}{\partial(p, T_0)} = \nu r - \mu k$$

Интеграл I, входящий в уравнение, имеет вид

$$I = \tau - \tau' + I_1, \quad I_1 = \frac{v_1}{i\omega}\left(e^{i\omega\tau} - e^{i\omega\tau'}\right)$$

Если подставить это выражение в (2.8) и удержать только члены нулевого и первого порядков, то получим

$$1 + \vartheta_1 e^{i\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} + \left(\varphi_1 - v_1 - \frac{\vartheta_1}{2} + \frac{v_1}{4i\omega}\right) e^{i\omega\tau'} - \right.$$

$$\left. - \frac{v_1}{4i\omega} e^{i\omega\tau} + \frac{v_1\left(e^{i\omega\tau} - e^{i\omega\tau'}\right)}{2i\omega(\tau - \tau')}\right] \exp\frac{\tau' - \tau}{4} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}$$

Интегралы, входящие в это выражение, нужно брать при условии $\tau \to \infty$. После интегрирования имеем

$$\vartheta_1 = \left(\varphi_1 - v_1 - \frac{v_1}{2} + \frac{v_1}{4i\omega}\right) \frac{2}{2z+1} - \frac{v_1}{2i\omega} + z\frac{v_1}{i\omega} \tag{3.3}$$

$$z = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{i\omega + \tfrac{1}{4}}$$

Из (3.1) и (3.3) получаем окончательную связь между амплитудами скорости горения и давления [4]

$$v_1 = \frac{\nu + \delta z}{1 - k + z(r + k / i\omega)} \eta_1 \tag{3.4}$$

Совершенно аналогично можно получить амплитуду скорости горения и при гармонически меняющемся тангенциальном потоке газа. Обычно влияние скорости потока на скорость горения начинает сказываться после некоторого порогового значения потока G_k. Предположим, что поток G меняется гармонически, но так, что минимальное его значение превышает пороговую величину. Тогда

$$g = 1 + g_1 e^{i\omega\tau}$$

а выражения для v, φ и ϑ будут иметь прежний вид, причем их единичные значения будут соответствовать стационарному режиму при значении потока G°.

Очевидно, что выкладки, аналогичные приведенным выше, дадут соотношение между v_1 и g_1, подобное (3.4)

$$v_1 = \frac{\nu' + \delta' z}{1 - k + z(r' + k' / i\omega)} g_1 \tag{3.5}$$

где штрихованные величины связаны с производными скорости горения и температуры поверхности по начальной температуре и тангенциальному потоку в точке, отвечающей стационарному режиму

$$k' = (T_1^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial T_0}\right)_G, \quad r' = \left(\frac{\partial T_1^\circ}{\partial T_0}\right)_G, \quad \nu' = \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial \ln G}\right)_{T_0}$$

$$\mu' = \frac{1}{T_1^\circ - T_0}\left(\frac{\partial T_1^\circ}{\partial \ln G}\right)_{T_0}, \quad \delta' = \frac{\partial(u^\circ, T_1^\circ)}{\partial(G, T_0)} = \nu' r' - \mu' k' \tag{3.6}$$

Величины k' и ν' измеряются обычно в опытах по исследованию эрозионного горения в стационарном режиме. Для решения задачи о нестационарном раздувании необходимы также сведения о зависимости температуры поверхности от начальной температуры и тангенциального потока.

4. Линейное приближение, переходный процесс. В установившемся режиме по существу не приходится решать интегральное уравнение, поскольку характер зависимости скорости горения от времени известен. Перейдем теперь к случаю решения интегрального уравнения. Рассмотрим в линейном приближении процесс горения при изменяющемся давлении

$$\eta = 1 + \eta_1(\tau), \qquad \eta_1 \ll 1$$

начальное распределение температур возьмем в виде

$$\theta_0(\xi) = e^{\xi}$$

соответствующем стационарному решению при $p = 1$. Скорость горения, градиент и температуру на границе мало отличаются от единицы, т. е.

$$v = 1 + v_1, \quad \varphi = 1 + \varphi_1, \quad \vartheta = 1 + \vartheta_1, \quad v_1 \sim \varphi_1 \sim \vartheta_1 \sim \eta_1 \ll 1$$

Интегральное уравнение (2.8) в линейном приближении принимает вид τ

$$1 + \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} + \varphi_1 - v_1 - \frac{\vartheta_1}{2} + \frac{I_1}{2}\left(\frac{1}{\tau - \tau'} - \frac{1}{2}\right)\right] \exp\frac{\tau' - \tau}{4} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \left[1 - \frac{J_1(\tau - u)}{2\tau}\right] \exp\frac{-(u+\tau)^2}{4\tau} du \qquad (4.1)$$

$$I_1 = \int_{\tau'}^{\tau} v_1(\tau'')\, d\tau'', \qquad J_1 = \int_0^\tau v_1(\tau'')\, d\tau''$$

После интегрирования (в члене, содержащем I_1, меняем порядок интегрирования) получим

$$\vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left(\varphi_1 - \frac{\vartheta_1}{2}\right) \exp\frac{\tau' - \tau}{4} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \int_0^\tau \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau - \tau'}}{2}\right)\right] v_1 d\tau' \qquad (4.2)$$

Если подставить сюда выражения ϑ_1 и φ_1 через v_1 и η_1 из (3.1), то получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$v_1(\tau) = \frac{\delta}{r}\eta_1(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-u/4}}{\sqrt{u}} \left[\frac{2k + r - 2}{2r} v_1(\tau - u) - \right. \qquad (4.3)$$

$$\left. - \frac{\delta - 2\nu}{2r} \eta_1(\tau - u)\right] du + \frac{k}{r} \int_0^\tau \left(1 - \operatorname{erf}\frac{\sqrt{u}}{2}\right) v_1(\tau - u)\, du$$

Решая это уравнение обычным путем — при помощи преобразования Лапласа, получим соотношения между изображениями скорости $v_1(p)$ и давления $\eta_1(p)$ (здесь p — переменная Лапласа)

$$v_1(p) = \frac{\nu + \delta z(p)}{1 - k + (r + k/p)\, z(p)} \eta_1(p), \quad z(p) = -{}^1/_2 + \sqrt{p + {}^1/_4} \qquad (4.4)$$

Этот результат был получен ранее [5] путем решения системы (1.7) — (1.10).

Поступила 9 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 11, 12.
2. Новожилов Б. В. Теория нестационарного горения гомогенных порохов. Физика горения и взрыва, 1968, № 4.
3. Уимпресс Р. Н. Внутренняя баллистика пороховых ракет. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
4. Новожилов Б. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1965, № 6.
5. Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.