

ПЛОСКОЕ ОДНОМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ
ИДЕАЛЬНОГО ЗАРЯЖЕННОГО ГАЗА
В СОБСТВЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

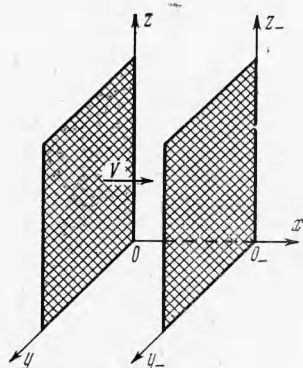
Ю. А. Нагель

(Москва)

Задача о плоском одномерном течении в собственном электрическом поле несжимаемого газа, состоящего из нейтральной и заряженной компоненты, исследовалась в работе [1]. Полученные в ней результаты справедливы, когда отношение электростатического давления к гидравлическому мало по сравнению с единицей.

Ниже рассматривается аналогичная задача для сжимаемого газа при более общем предположении, когда это отношение сравнимо с единицей. Проанализированы три случая: а) скорость относительного движения заряженных и нейтральных частиц равна нулю, б) скорость относительного движения отлична от нуля, но течение приближенно можно считать изэнтропическим, в) неизэнтропическое течение, т. е. когда нельзя пренебречь необратимыми потерями, возникающими при относительном движении заряженных и нейтральных частиц. В первых двух случаях решения получены в конечном виде.

1. Рассмотрим неограниченное по координатам y, z плоское течение сжимаемого газа вдоль оси ox (фиг. 1). Пусть одноименные заряды (которые будем считать положительными) вводятся в газовый поток в плоскости yoz , переносятся потоком против поля пространственного заряда в сечение y_0z_0 и там нейтрализуются. Назовем условно плоскость yoz эмиттером, а y_0z_0 — коллектором. При выписывании системы уравнений сделаем следующие предположения:



Фиг. 1

в) скорость относительного движения отлична от нуля, но течение приближенно можно считать изэнтропическим, в) неизэнтропическое течение, т. е. когда нельзя пренебречь необратимыми потерями, возникающими при относительном движении заряженных и нейтральных частиц. В первых двух случаях решения получены в конечном виде.

$$\frac{\mu_0 V_0 H_0}{E_0} \ll 1, \quad \frac{n_{20}}{n_{10}}, \quad \frac{\delta_{20}}{\delta_{10}} \ll \alpha_0 \ll 1 \quad \left(\alpha_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2p_0} \right) \quad (1.1)$$

$$f_{10}, f_{20} \ll \rho_0 E_0, \quad \frac{M_0^2}{R} \ll \alpha_0, \quad \frac{1}{(\gamma - 1) RP} \ll \alpha_0 \quad (1.2)$$

Здесь δ_i — плотность i -й компоненты (1 — нейтральная, 2 — заряженная), γ — отношение удельных теплоемкостей; E_0, H_0 — характерные величины напряженности электрического и магнитного полей; ϵ, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; n_i — концентрация i -й компоненты; p — гидростатическое давление смеси компонент; ρ — плотность электрического заряда; P, R — числа Прандтля и Рейнольдса; V — модуль средней скорости смеси компонент; f_1 и f_2 — модули сил $\mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{F}_2 - \rho \mathbf{E}$, \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 — объемная плотность суммы сил, действующих соответственно на нейтральную и заряженную компоненты; подстрочный индекс 0 обозначает характерные масштабы величин.

Неравенства (1.1), означающие малость действующих магнитных сил по сравнению с электрическими (тогда скорость частиц зависит только от времени t и пространственных координат), и концентрации заряженных

частиц по сравнению с концентрацией нейтральных (в этом случае мал вклад далекодействующих соударений)¹, позволяют использовать в рассматриваемой задаче уравнения движения и выражения для векторов переноса, получаемые в теории газовых смесей Энского — Чепмена для модели гладких, жестких сфер [2, 3]. Полагая в этих уравнениях согласно (1.1) концентрацию, плотность, давление, температуру, среднюю скорость смеси в целом равными соответствующим величинам нейтральной компоненты, т. е. $n \approx n_1$, $\delta \approx \delta_1$, $p \approx p_1$ и т. д., и принимая допущения (1.2), два последних из которых определяют пределы применимости модели идеального заряженного газа, уравнения сохранения массы каждой из компонент, а также сохранения импульса и энергии всей смеси при плоском, одномерном, стационарном течении запишем в виде

$$\frac{d}{dx} \delta V = 0, \quad \frac{d}{dx} j = 0 \quad (1.3)$$

$$\delta V \frac{dV}{dx} = \rho E - \frac{dp}{dx}, \quad \delta V \frac{d}{dx} \left(i + \frac{V^2}{2} \right) = jE \quad (1.4)$$

Здесь $i = c_p T$ — энтальпия, j — плотность электрического тока, E — напряженность электрического поля.

Согласно [2,3] общее выражение для вектора плотности тока можно записать

$$\mathbf{j} = \rho \langle \mathbf{w}_2 \rangle = \rho \mathbf{V} + enD (\mathbf{d}_2 - k^T T^{-1} \text{grad } T) \\ \mathbf{d}_2 = - \text{grad} \frac{n_2}{n} - \left(\frac{n_2}{n} - \frac{\delta_2}{\delta} \right) \frac{1}{p} \text{grad } p + \frac{1}{p\delta} (\delta_1 \mathbf{F}_2 - \delta_2 \mathbf{F}_1)$$

где D — коэффициент диффузии, e — электрический заряд частицы, k^T — термодиффузионное отношение, \mathbf{w}_2 — истинная скорость заряженной частицы.

Используя известное выражение для k^T [2] и оценивая порядки величин, в силу (1.1) и (1.2) получаем

$$k_0^T \approx \frac{\delta_{20}}{\delta_{10}}, \quad d_{20} \sim \frac{F_{20}}{p_0} \sim \frac{\rho_0 E_0}{p_0} \sim \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{p_0 L_0} \sim \frac{\alpha_0}{L_0} \\ j_0 \sim \rho_0 V_0 + en_0 D_0 \left(\frac{\alpha_0}{L_0} - \frac{1}{L_0} \frac{\delta_{20}}{\delta_{10}} \right) \sim \rho_0 V_0 + en_0 D_0 \frac{\alpha_0}{L_0} \sim \rho_0 V_0 + en_0 D_0 \frac{\rho_0 E_0}{p_0}$$

на основании чего, полагая $p = nkT$, выражение для плотности тока в рассматриваемом случае запишем в виде

$$j = \rho (V + bE), \quad b = eD/kT \quad \text{— подвижность.} \quad (1.5)$$

Для получения замкнутой системы к соотношениям (1.3) — (1.5) необходимо присоединить уравнение состояния Клапейрона и уравнение Максвелла для электрического поля

$$p = \delta R' T, \quad dE/dx = \rho / \varepsilon \quad (1.6)$$

Перейдем в уравнениях (1.3) — (1.6) к безразмерным переменным

$$x' = x / L_0, \quad \delta' = \delta / \delta_0, \quad V' = V / V_0$$

¹ Как следует из уравнений электродинамики Максвелла, $n_2 / n_1 \sim \varepsilon E_0 / e L_0 n_1$ (что при атмосферном давлении, $E_0 \sim 10^7$ е/м, $L_0 \sim 10^{-2}$ м дает величину $n_2 / n_1 \sim 10^{-8}$), а собственное магнитное поле, создаваемое движением зарядов, мало и удовлетворяет первому из неравенств (1.1), если характерная скорость мала по сравнению со скоростью света $V_0^2 / c^2 \ll 1$ и исключены высокочастотные процессы $t_0 V_0 / L_0 \gg V_0^2 / c^2$ (L_0 — характерная длина).

и т. д. и примем характерные масштабы величин, кроме линейного, равными соответствующим положительным значениям переменных в сечении эмиттера, т. е. $V_0 = V_+$, $p_0 = p_+$, $E_0 = E_+ = |E(0)|$ и т. д., а линейный масштаб $L_0 = \infty = l$, так что при $x' = 0$

$$V' = 1, \quad p' = 1, \quad \delta' = 1, \quad T' = 1, \quad E' = -1 \quad (1.7)$$

Положим также, что подвижность и диэлектрическая проницаемость постоянны $b' = \epsilon' = 1$. Тогда, заменяя второе из соотношений (1.4) на уравнение, получаемое вычитанием из него первого, умноженного на скорость, и исключая температуру при помощи (1.6), исходную систему уравнений запишем

$$\delta' V' = 1, \quad V' \frac{dV'}{dx'} = \frac{2\alpha_+}{\gamma M_+^2} \rho' V' E' - \frac{1}{\gamma M_+^2} V' \frac{dp'}{dx'} \quad (1.8)$$

$$\frac{dp'}{p'} = \gamma \frac{d\delta'}{\delta'} + 2(\gamma - 1) \frac{\alpha_+}{R_e} \frac{\rho' E'^2}{p'} \frac{dx'}{V'} \quad (1.9)$$

$$j' = \rho' (V' + E' / R_e) = \text{const}, \quad dE' / dx' = \rho' \quad (1.10)$$

Здесь R_e — электрическое число Рейнольдса [4]. Введем для дальнейшего следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1/2(\gamma - 1) M_+^2}{1 + 1/2(\gamma - 1) M_+^2}, \quad I = j' 2 \left(\frac{\alpha_+}{\gamma M_+^2} \right)^{1/2} a^{3/4}, \quad a_1 = \frac{a^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{1 + 1/2(\gamma - 1) M_+^2}} \\ a_2 &= \left(\frac{\gamma M_+^2}{2\alpha_+} \right)^{1/2} \frac{a^{1/4}}{R_e}, \quad a_3 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_+}{\gamma M_+^2} \frac{a}{R_e}, \quad a_4 = \frac{4\alpha_+}{\gamma M_+^2} c^{1/2} \\ a_5 &= \frac{1 + \gamma M_+^2 - \alpha_+}{1/2(\gamma + 1) M_+^2} a^{1/2}, \quad a_6 = \frac{\alpha_+ a^{1/2}}{1/2(\gamma + 1) M_+^2 a_4}, \quad U' = - \int_0^{x'} E' dx' \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя определение потенциала и исключая из второго соотношения (1.8) величины ρ' , V' и p' , систему уравнений (1.8) — (1.10) сводим к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{a_2}{I} \frac{dW}{dx'} - \sqrt{2} I^2 \left(\frac{d^2W}{dx'^2} \right)^{-1} \right]^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_5 + \frac{a_3}{I^2} \left(\frac{dW}{dx'} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[\frac{a_2}{I} \frac{dW}{dx'} - \sqrt{2} I^2 \left(\frac{d^2W}{dx'^2} \right)^{-1} \right] + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 - W) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь

$$W = \frac{jU}{\delta_+ V_+ (1/2 V_+^2 + c_p T_+)} = \frac{2\alpha_+(\gamma - 1)}{\gamma (1 + 1/2(\gamma - 1) M_+^2)} j' U' \quad (1.13)$$

Уравнение (1.12) содержит одну неизвестную функцию — $W(x')$. Величину I , которая согласно (1.10) и (1.11) является константой, можно принять за параметр.

Для изэнтропического течения, когда $(\gamma - 1)\alpha_+ / R_e \ll 1$ и согласно (1.9) выполняется равенство $p' = \delta'^\gamma$, получаем аналогичное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{a_2}{I} \frac{dW}{dx'} - \sqrt{2} I^2 \left(\frac{d^2W}{dx'^2} \right)^{-1} \right]^2 + 2^{1/2(\gamma-1)} a_1 \left[\frac{a_2}{I} \frac{dW}{dx'} - \sqrt{2} I^2 \left(\frac{d^2W}{dx'^2} \right)^{-1} \right]^{1-\gamma} + \\ + a_3 - \frac{a_2}{3\sqrt{2}} \frac{1}{I^3} \left(\frac{dW}{dx'} \right)^3 - (1 - W) = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

2. Решения уравнения (1.14) удобно начать с рассмотрения случая $R_e = \infty$ (подвижность заряженных частиц $b = 0$). Положим $a_2 = a_3 = 0$, снизим порядок уравнения (1.14) при помощи замены $f = (dW / dx')^2$ и

введем обозначение

$$y = -2I^2 \left(\frac{df}{dW} \right)^{-1} = \left(a_1 \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma+1)} \quad (2.1)$$

Тогда решение уравнения (1.14) в параметрической форме можно записать так:

$$W = 1 - y^2 - a_1 y^{1-\gamma}, \quad \varphi \equiv \frac{f}{I^2} = a_4 + 4(y - y_+) + 2a_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} (y^{-\gamma} + y_+^{-\gamma}) \quad (2.2)$$

Чтобы найти зависимость между W и x' , достаточно определить функцию $x'(y)$. Производная этой функции

$$\frac{dx'}{dy} = - \left(\frac{dW}{dx'} \right)^{-1} \frac{y}{2I^2} \frac{df}{dy} \quad (2.3)$$

Величина $dW/dx' = \pm f$, причем, как следует из (1.13), знак dW/dx' противоположен знаку E' . В приэммитерной области $E' < 0$ и, следовательно, $dW/dx' > 0$. Напряженность поля ($dE'/dx' = \rho'$) — монотонно возрастающая функция (выше принято, что $\rho' > 0$), поэтому существует сечение $x' = x_a' < 1$, в окрестности которого величина E' изменяет знак. Учитывая это, после исключения из уравнения (2.3) производной dW/dx' и интегрирования его по частям находим

$$Ix' = \begin{cases} y_+ \sqrt{a_4} - y \sqrt{\varphi} + J_1(y_+, y) & (0 \leq x' \leq x_a'), \quad J_1(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{\varphi} dy \\ y_+ \sqrt{a_4} + y \sqrt{\varphi} + J_1(y_+, y_a) - J_1(y_a, y) & (x_a' < x' \leq 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$W = 1 - y^2 - a_1 y^{1-\gamma}$$

Здесь y_a — значение y в сечении $x' = x_a'$. Согласно формулам (1.13) и (2.2) величину y_a можно найти из уравнения $\varphi(y_a) = 0$, которое при помощи (2.1) приводим к виду

$$\alpha_+ = 1 + \gamma M_+^2 - M_+^{\kappa} (\gamma M_+^{\kappa/\gamma} + M_+^{-\kappa}) \quad (\kappa = 2\gamma/(\gamma+1)) \quad (2.5)$$

Решения трансцендентного уравнения (2.5) существуют, если

$$\alpha_+ \leq 1 + \gamma M_+^2 - (\gamma+1) M_+^{\kappa} \quad (2.6)$$

При этом решения, которых будет два (M_{a1} и M_{a2}), удовлетворяют неравенствам

$$M_+ < M_{a1} < 1, \quad 1 < M_{a2} < M_+$$

В случае знака равенства в (2.6) решения совпадают. Критерий для выбора корней уравнений (2.5) получаем следующим образом. Из соотношений (1.8) находим

$$-\frac{\rho'}{\delta'} E' dx' = \frac{\gamma}{2\alpha_+} \delta'^{-1} \frac{dV'}{V'} (1 - M^2) \quad (2.7)$$

Так как в интервале $0 \leq x' < x_a'$ член $(-\rho'/\delta') E' dx' > 0$, то из этого уравнения следует, что дозвуковой поток в этом интервале ускоряется, а сверхзвуковой замедляется. Отсюда

$$M_a = M_{a1} \quad \text{при } M_+ < 1, \quad M_a = M_{a2} \quad \text{при } M_+ > 1$$

Остановимся на физическом смысле этих корней, для чего обратимся к уравнениям (2.4). Входящая в них безразмерная плотность тока I , до

сих пор считавшаяся произвольным параметром, зависит при прочих равных условиях от внешнего электрического сопротивления в цепи эмиттер — коллектор. Положим в (2.4) $x' = 1$ (сечение коллектора) и рассмотрим функцию $W_-(I)$. (Здесь и далее индексом минус обозначены величины, соответствующие $x' = 1$.) Ее производная

$$\frac{dW_-}{dI} = \pm \sqrt{\varphi(M_-)}, \quad \text{если} \quad \frac{dW_-}{dx'}(M_-) \geq 0$$

и, следовательно, функция $W_-(I)$ достигает экстремума (максимума), когда $\varphi(M_-) = 0$. При этом согласно соотношениям (1.13), (2.2) и (2.5) напряженность поля на коллекторе $E' = 0$, а $M = M_a$ и $x_a' = 1$.

Назовем случай, когда $\varphi(M_-) = 0$, оптимальным и обозначим соответствующие величины W_- и I символами W_{opt} и I_{opt} .

При $I < I_{opt}$

$$dW/dx' > 0 \quad (0 \leq x' \leq 1)$$

При $I > I_{opt}$

$$dW/dx' \geq 0 \quad (0 \leq x' \leq x_a'), \quad dW/dx' < 0 \quad (x_a' < x' \leq 1)$$

Сама функция $W_- < W_{opt}$, если $I \neq I_{opt}$, причем в соответствии с уравнениями (2.4) величина $W_- = 0$, когда $I = 0$ или $I = 2I_{opt}$. Это позволяет уравнения (2.4) при помощи (2.1) привести к следующему виду:

$$Ix' = G \left[1 - \left(\frac{M_+}{M} \right)^{\kappa'} \Phi(M) + J_2(M_+, M) \right] \quad (2.8)$$

$$W = 1 - \frac{M_+^{\kappa'}}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_+^2} \left(\frac{\gamma - 1}{2} M^{4/(\gamma+1)} + M^{-\kappa'} \right) \quad (2.9)$$

$$\gamma M_a^{\kappa/\gamma} + M_a^{-\kappa} = \frac{1 + \gamma M_+^2 - \alpha_+}{M_+^{\kappa}} \quad (2.10)$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi(M) = \left(\frac{M}{M_+} \right)^{\kappa/2} \left[\frac{1 + \gamma M^2 - (\gamma M_a^{\kappa/\gamma} + M_a^{-\kappa}) M^{\kappa}}{1 + \gamma M_+^2 - (\gamma M_a^{\kappa/\gamma} + M_a^{-\kappa}) M_+^{\kappa}} \right]^{1/2}, \quad G = \frac{2a_+^{1/2} \alpha_+^{1/2}}{\gamma^{1/2} M_+}$$

$$J_2(M_+, M) = \frac{M_+^{-\kappa'}}{\alpha_+^{1/2}} \int_{M_+^{\kappa/\gamma}}^{M^{\kappa/\gamma}} \sqrt{\gamma z + z^{-\gamma} - (\gamma + 1)} dz, \quad \kappa' = 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \kappa'' = \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1}$$

Система уравнений (2.8) — (2.10) справедлива, если $0 \leq I \leq I_{opt}$, $0 \leq x' \leq 1$ или $I_{opt} \leq I \leq 2I_{opt}$, $0 \leq x' \leq x_a'$. Если $I_{opt} \leq I \leq 2I_{opt}$, $x_a' \leq x' \leq 1$, то уравнение (2.8) необходимо заменить следующим:

$$Ix' = G \left[1 + \left(\frac{M_+}{M} \right)^{\kappa'} \Phi(M) + J_2(M_+, M_a) - J_2(M_a, M) \right] \quad (2.11)$$

Уравнения (2.8) — (2.11) позволяют найти функцию $W(x')$ и $M(x')$, если заданы M_+ , α_+ , I . После этого зависимости $U'(x')$, $E'(x')$, $p'(x')$ и т. д. определяем при помощи равенств, получаемых из (1.10) и (1.13)

$$U' = \frac{W}{a_+^{1/2} I}, \quad E' = -\frac{1}{a_+^{1/2} I} \frac{dW}{dx'}, \quad p' = -\frac{1}{a_+^{1/2} I} \frac{d^2 W}{dx'^2}, \quad \delta' = \left(\frac{M_+}{M} \right)^{\kappa'/\gamma} \quad (2.12)$$

и соотношений (1.8) и т. д.

Систему уравнений для расчета оптимального режима получаем из (2.8) — (2.11), полагая $x' = 1$, а $M = M_- = M_a$

$$I_{opt} = G [1 + J_2(M_+, M_-)]$$

$$W_{opt} = 1 - \frac{M_+^{x'}}{1 + 1/2(\gamma - 1)M_+^2} \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_-^{2/(\gamma+1)} + M_-^{x'} \right) \quad (2.13)$$

$$\gamma M_-^{x/\gamma} + M_-^{x'} - \frac{1 + \gamma M_+^2 - \alpha_+}{M^{x'}}$$

Рассмотрим частный случай $\alpha_+ \ll 1$. Согласно последнему из уравнений (2.13) при $\alpha_+ \ll 1$ число M_- можно представить в виде $M_- = M_+(1+z)$, причем $|z| \ll 1$. Разлагая выражения вида $M^{x/\gamma}$, M^{-x} и т. д. в ряд Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка малости и переходя к размерным величинам U и j , находим

$$j_{opt} = \frac{\varepsilon E_+ V_+}{l}, \quad U_{opt} = \frac{E_+ l}{2}, \quad W_{opt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\alpha_+}{1 + 1/2(\gamma - 1)M_+^2} \quad (2.14)$$

Аналогично, полагая в уравнениях (2.6) $x' = 1$, имеем

$$\frac{U}{U_{opt}} + \frac{j}{j_{opt}} = 2$$

т. е. при $\alpha_+ \ll 1$ вольт-амперная характеристика промежутка эмиттер — коллектор представляет собой прямую.

3. Для определения параметра $\alpha_+ = \varepsilon E_+^2 / 2p_+$, входящего в уравнения (2.8) — (2.11) и (2.13), необходимо знать напряженность поля в сечении эмиттера E_+ . При выборе последней могут представиться два варианта: величины плотности тока j , а следовательно, и E_+ лимитируется либо эмиссионной способностью эмиттера, либо электрической прочностью среды E_n (например, при неограниченной эмиссионной способности). В первом случае можно непосредственно задаться величиной $E_+ < E_n$.

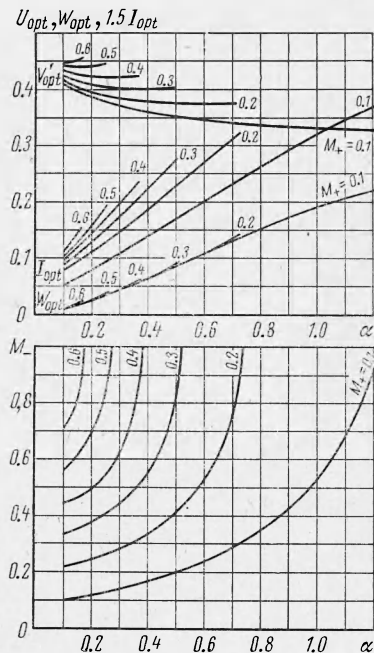
Во втором случае в любом сечении должно выполняться неравенство $|E(x')| \leq E_n(x')$. Предположим, что E_n пропорциональна давлению

$$\frac{E_n(x')}{E_{n+}} = \frac{p(x')}{p_+} \quad (3.1)$$

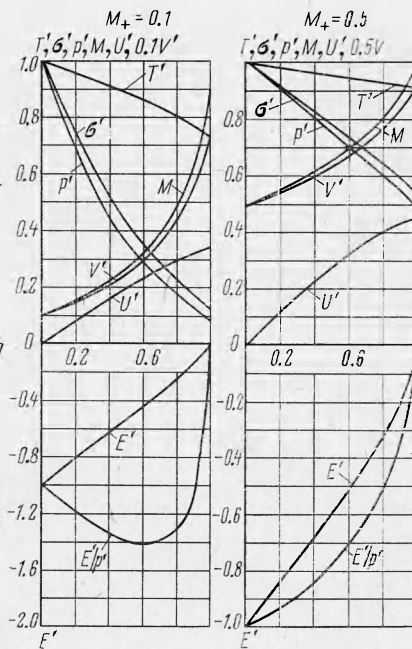
Тогда равенство $|E| = E_n$ будет иметь место в сечении, в котором функция $|E/p|$ максимальна. Выражая эту функцию при помощи (1.11), (1.13), (2.1) через число M и исследуя ее на максимум, находим, что ему соответствуют корни M_{b1} и M_{b2} уравнения

$$\alpha_+ = 1 + \gamma M_+^2 - M_+^{x'} [(\gamma + 1/2) M_b^{x/\gamma} + 1/2 M_b^{-x}] \quad (3.2)$$

Сравнение полученного уравнения с (2.5) показывает, что $M_{b1} < M_{a1} < 1$, а $M_{b2} < M_{a2} > 1$. Так как согласно (2.7) при $M = M_a$ скорость потока имеет экстремум (максимум для дозвукового, минимум для сверхзвукового), то отсюда заключаем, что физическому смыслу удовлетворяет лишь корень $M_{b1} < 1$. Очевидно, что корень M_{b1} может лежать как внутри отрезка $[M_+, M_a]$ или $[M_+, M_-]$, так и вне его, если $M_{b1} < M_+$. В первом случае максимальное значение функции $|E/p|$ в указанном интервале будет соответствовать сечению, в котором $M = M_{b1}$, во втором случае — сечению, где $M = M_+$, т. е. плоскости эмиттера. На основании



Фиг. 2



Фиг. 3

этого, выражая $|E/p|$ через число M и используя равенства (3.1) и (3.2), приходим к следующим соотношениям:

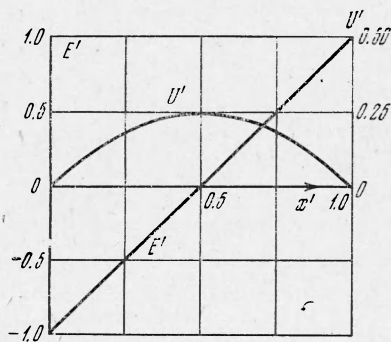
$$\alpha_+ = \begin{cases} \alpha & (M_{b1} \leq M_+) \\ \frac{2\alpha^2}{1 - M_{b1}^2} \left(\frac{M_+}{M_{b1}} \right)^\gamma & (M_{b1} > M_+) \end{cases} \quad (\alpha = \varepsilon E_{n+}^2 / 2p_+) \quad (3.3)$$

причем M_{b1} — наименьший на отрезке $[0, 1]$ корень уравнения

$$\frac{1 - M_b^2}{2} \left[(\gamma M_+^{\gamma/\gamma} + M_+^{-\gamma}) M_b^{-\gamma} - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) M_b^2 - \frac{1}{2} \right] = \alpha^2$$

Параметр α в отличие от α_+ выражается через электрическую прочность газа \bar{E}_{n+} в плоскости эмиттера, что позволяет считать его известным.

На фиг. 2 приведены зависимости величины W_{opt} , I_{opt} , U_{opt} и M_- от параметра α при $M_+ < 1$, $\alpha > 0.1$ и $\gamma = 1.15$, построенные путем решения уравнений (2.13) при помощи ЭВМ, а на фиг. 3 — зависимости U' , E' и др. величин от x' , найденные согласно уравнениям (2.8) — (2.11) и (3.3) для случая $I = I_{opt}$, $\gamma = 1.15$. Графики функций $U'(x')$ и $E'(x')$ при $W = 0$, $I = 2I_{opt}$ и $\alpha \leq 1$ представлены на фиг. 4.



Фиг. 4

4. Рассмотрим случай $R_e \neq \infty$ и $(\gamma - 1)\alpha_+ / R_e \leq 1$. Воспользуемся (2.2) и введем вместо y новую переменную

$$S = -2 \left(\frac{d\varphi}{dW} \right)^{-1} \pm \frac{a_2}{\sqrt{2}} \varphi^{1/2}$$

Тем же способом, что и при $R_e = \infty$, получаем

$$Ix' = \begin{cases} S_+ \sqrt{a_4} - S \sqrt{\varphi} + J_1(S_+, S_a) - 1/4 \sqrt{2} (a_4 - \varphi) a_2 & (0 \leq x' \leq x'_a) \\ S_+ \sqrt{a_4} + S \sqrt{\varphi} + J_1(S_+, S_a) - J_1(S_a, S) - 1/4 \sqrt{2} (a_4 - \varphi) a_2 & (x'_a < x' \leq 1) \end{cases}$$

$$W = 1 - S^2 - a_1 S^{1-\gamma} - a_3 \pm 1/6 \sqrt{2} a_2 \varphi^{3/2}, \quad \text{если } x' \leq x'_a \quad (4.1)$$

Исследование функции W_- на максимум приводит к равенствам $S_- = S_a$, $\varphi(S_-) = 0$, $E_- = 0$, на основании которых из уравнений (2.10) и (4.1) находим

$$I_{opt}^* = I_{opt} - G / (2R_e), \quad W_{opt}^* = W_{opt} - 1/3 G^2 a^{-1/2} R_e^{-1} \quad (4.2)$$

Здесь W_{opt}^* и I_{opt}^* относятся к случаю $R_e \neq \infty$, а W_{opt} и I_{opt} — по-прежнему к $R_e = \infty$. Соотношения (4.2) удобны тем, что позволяют свести задачу нахождения W_{opt}^* и I_{opt}^* к более простой, когда $R_e = \infty$. При этом, если $1 < R_e < \infty$ (т. е. когда $E_+ \leq E_{n+} < V_+ / b$), параметр α_+ находится, как и при $R_e = \infty$, а если $R_e = 1$ (т. е. когда $E_{n+} \geq E_+ = V_+ / b$), то $\alpha_+ = \varepsilon V_+^2 / 2p_+ b^2$.

В частном случае $\alpha_+ \ll 1$ и $R_e = 1$ из уравнений (4.2) и (2.14) находим

$$j_{opt}^* = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{V_+^2}{bl}, \quad U_{opt}^* = \frac{1}{3} \frac{V_+}{b} l, \quad W_{opt}^* = \frac{1}{3} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\alpha_+}{1 + 1/2(\gamma - 1) M_+^2} \quad (4.3)$$

Первые две из этих формул впервые были получены О. М. Стучером [1] при рассмотрении случая $V = \text{const}$.

5. Рассмотрим неизэнтропическое течение. Понижая порядок исходного уравнения (1.12) при помощи замены $\psi = I^{-2} (dW / dx')^2$ и разрешая его относительно выражения

$$\pm a_2 \sqrt{\psi / 2} - 2 dW / d\psi$$

после извлечения квадратного корня и выбора соответствующего знака согласно начальным условиям имеем

$$\frac{dW}{d\psi} = \pm \frac{a_2}{2 \sqrt{2}} \sqrt{\psi} - Y \quad (5.1)$$

Здесь

$$Y = \frac{a_5 + a_6 \psi}{4} - \frac{1}{4} [(a_5 + a_6 \psi)^2 - 2\kappa'(1 - W)]^{1/2}$$

ψ — лежит на отрезке $[0, a_4]$.

Решение этого уравнения не удается найти в конечном виде, как при изэнтропическом течении. Для численного интегрирования уравнение (5.1) удобно записать в такой форме (см. (1.11) и (1.13)).

Если $\psi > 0$

$$W = \int_0^{\psi} \left(Y - \frac{a_2}{2 \sqrt{2}} \sqrt{\psi} \right) d\psi \quad (5.2)$$

Если ψ обращается в нуль

$$W = \int_0^{a_1} \left(Y - \frac{a_2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\psi} \right) d\psi - \int_0^{\psi} \left(Y + \frac{a_2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\psi} \right) d\psi \quad (5.3)$$

В последнем выражении первый интеграл соответствует той части промежутка эмиттер — коллектор, где $E' \leq 0$, а второй — части, в которой $E' > 0$. Отметим, что поскольку $W \geq 0$, то во втором интеграле $\psi < a_4$. В частности, из соотношений (5.2), (5.3) следует, что величина W_- максимальна при $\psi = 0$, т. е.

$$W_{opt} = \int_0^{a_4} \left(Y - \frac{a_2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\psi} \right) d\psi \quad (5.4)$$

В качестве примера приведем результаты вычислений значений W_{opt} при некоторых значениях R_e^{-1} для $\gamma = 1.1$ и двух значений числа M_+ . При расчете величины α_+ выбирались таким образом, чтобы при $R_e^{-1} = 0$ число $M_- = 1$.

	$R_e^{-1} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$M_+ = 0.5$, $W_{opt} = 0.154$	0.149	0.141	0.132	0.122	0.112	
$M_+ = 0.1$, $W_{opt} = 0.028$	0.024	0.021	0.018	0.015	0.012	

6. Величину W , представляющую собой отношение генерируемой электрической энергии к полной энергии потока (см. (1.13)), можно трактовать как полный к.п.д. преобразования. Согласно приведенным на фиг. 2 и в таблице данным, при фиксированной величине γ к.п.д. тем больше, чем выше значение параметра α и числа R_e (практически достаточно, чтобы $R_e \geq 10$). И если последнее условие может быть удовлетворено при использовании в качестве носителей заряда частиц с низкой подвижностью [5], то пути повышения параметра α связаны со значительными трудностями. Так, например, для воздуха при атмосферном давлении $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-4}$, к.п.д. $W \approx 10^{-4}$. Для электроотрицательных веществ типа CCl_4 [6], обладающих высокой электрической прочностью, величина α при $p_+ = 10^6 \text{ н/м}^2$ составит уже ~ 0.15 , а $W \approx 2.5 \cdot 10^{-2}$. Дальнейшее повышение к.п.д. возможно при применении веществ с еще более высокой, чем у CCl_4 , электрической прочностью.

Автор благодарит И. В. Беспалова и Ю. М. Трушина за интерес к работе и полезные замечания.

Поступила 20 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuetzer O. M. Ion transport high voltage generators. Rev. Scient. Instrum., 1961, vol. 32, No. 1, pp. 16—22.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Stuetzer O. M. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5, pp. 534—544.
5. Marks A., Argeto E., Chu C. K. Charged aerosol converter. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1.
6. Мик Дж., Крэгс Дж. Электрический пробой в газах. М., Изд-во иностр. лит., 1960.