

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел.— М.: Наука, 1982.
2. Баничук И. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация.— М.: Наука, 1989.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.
4. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций.— М.: Наука, 1982.
5. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред.— М.: Мир, 1975.
6. Иванов Г. В. Уравнения идеального упругопластического деформирования оболочек в задачах о контакте и сопряжении их с другими телами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1980.— Вып. 45.
7. Хлуднев А. М. Существование решений в задачах динамики одномерных пластических конструкций // ПМТФ.— 1983.— № 2.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.

г. Новосибирск

*Поступила 15/IX 1987 г.,
в окончательном варианте — 2/III 1990 г.*

УДК 539.374

А. В. Кривко, А. Ю. Смыслов

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

При создании дисперсно-упрочненных материалов требуемые технологические свойства достигаются путем соединения разнородных металлов пластическим деформированием порошковой смеси. Свойства образующегося таким образом композита качественно отличаются от свойств составляющих, что в значительной степени обусловлено наличием пор. Теоретические модели пластического деформирования пористых сред могут использоваться при выборе способов и режимов прессования для получения качественных изделий.

В настоящей работе исследуются особенности пластического деформирования пористой среды, содержащей дисперсные включения. Применяется метод, заключающийся в отыскании приближенного выражения для диссипативной функции композита [1—8]. Получены условия, для которых включения ведут себя как жесткие частицы или деформируются вместе с матрицей.

1. Рассмотрим жесткопластический материал, состоящий из связанной матрицы с однородно распределенными в ней включениями и порами. Матрица и включения удовлетворяют условию Мизеса с пределами пластичности k_0 и k_1 соответственно. Задача состоит в построении приближенного выражения для диссипативной функции композита $D^*(\langle \varepsilon_{ij} \rangle)$, которая в сочетании с ассоциированным законом нагружения $\langle \sigma_{ij} \rangle = \partial D^* / \partial \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяет условие пластичности [1—8]. Здесь σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, угловые скобки — осреднение полей по объему материала.

Диссипативную функцию макросреды $D^*(\langle \varepsilon_{ij} \rangle)$ получим как минимальное значение скорости диссипации в единице макрообъема V пористого тела:

$$(1.1) \quad D = \frac{1}{V} \int_{V_0} k_0 \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} dV + \frac{1}{V} \int_{V_1} k_1 \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} dV$$

($V = V_T + V_2$, $V_T = V_0 + V_1$ — объем твердой фазы, V_0 , V_1 и V_2 — объемы матрицы, включений и пор).

Представляя интеграл по области V_0 в виде разности интегралов по областям V_T и V_1 , имеем функционал

$$(1.2) \quad D = k_0 \langle \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_T - (k_0 - k_1) \langle \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_1,$$

который при $k_1 = k_0$ сводится к выражению для диссипативной функции пористого тела с однородной твердой фазой [2]. Индексами после угловых скобок в (1.2) отмечается осреднение по соответствующей фазе.

Следуя [2—7], воспользуемся приближенными соотношениями

$$(1.3) \quad \langle \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \rangle_T \approx \sqrt{\langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle_T}, \quad \langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle_n \approx \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n,$$

где $n = 1, 2$; с учетом $2\varepsilon_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}$ значения $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_2$ определяются скоростями перемещений v_i на поверхности пор по формуле Гаусса — Остроградского. В [3, 4] приводится качественная оценка первого приближения (1.3), второе приближение наиболее близко отвечает сферической форме включений или пор [4, 5].

Отмечая штрихом флуктуации полей относительно их средних величин, запишем

$$(1.4) \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon'_{ij}, \quad \langle \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \langle \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} \rangle.$$

Введем обозначения инвариантов

$$(1.5) \quad I_0 = \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle}, \quad I_n = \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij} \rangle_n} \quad (n = 1, 2), \\ I = (I_0^2 + \langle \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} \rangle - c_2 I_2^2)^{1/2}.$$

Выражение (1.1) с учетом (1.2)—(1.5) преобразуется к виду

$$(1.6) \quad D = k_0 \sqrt{1 - c_2} I - \widehat{k} c_1 I_1$$

($c_n = V_n/V$ — объемная концентрация фазы V_n , $\widehat{k} = k_0 - k_1$).

Осреднение по области V_n сводится к осреднению по всему объему V , если подынтегральную функцию умножить на функцию κ_n , принимающую значение 1 в области V_n и равную 0 в других точках материала. Для таких функций

$$(1.7) \quad \langle \kappa_n \rangle = c_n, \quad \langle \kappa'_1 \kappa'_2 \rangle = -c_1 c_2, \quad \langle \kappa'_n \varepsilon'_{ij} \rangle = c_n (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n - \langle \varepsilon_{ij} \rangle).$$

Из предположения об однородности деформированного состояния пор (1.3) и условия несжимаемости твердой фазы пористого тела следует соотношение $\varepsilon_{kk} = \langle \varepsilon_{ii} \rangle_2 \kappa_2$, осреднение его по макрообъему V дает

$$(1.8) \quad \langle \varepsilon_{kk} \rangle_2 = \varepsilon_0 / c_2, \quad \varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{kk} \rangle.$$

Условие минимальности функционала (1.6) на флуктуациях v'_i приводит к уравнениям

$$(1.9) \quad \frac{k_0 \sqrt{1 - c_2}}{I} (\varepsilon'_{ij,j} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 \kappa'_{2,j}) - \frac{\widehat{k}}{I_1} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \kappa'_{1,j} + p'_{,i} = 0,$$

к которым добавляются условие несжимаемости твердой фазы материала и соотношения Коши, записанные для флуктуаций:

$$(1.10) \quad v'_{k,k} = \langle \varepsilon_{ii} \rangle_2 \kappa'_2, \quad 2\varepsilon'_{ij} = v'_{i,j} + v'_{j,i}$$

(p' — множитель Лагранжа при условии несжимаемости (1.10)).

Решение системы уравнений (1.9), (1.10) в пространстве спектральных плотностей с параметрами преобразования ξ_i имеет вид

$$(1.11) \quad \varepsilon_{ij}(\xi) = \left[\mu \langle \varepsilon_{kl} \rangle_1 \kappa'_1(\xi) + \langle \varepsilon_{kl} \rangle_2 \kappa'_2(\xi) \right] \left(\frac{\xi_k \xi_j}{\xi^2} \delta_{li} + \right. \\ \left. + \frac{\xi_l \xi_i}{\xi^2} \delta_{kj} - 2 \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}{\xi^4} \right) + \varepsilon'_{kk}(\xi) \frac{\xi_i \xi_j}{\xi^2}.$$

Здесь

$$(1.12) \quad \mu = \frac{\widehat{k}}{k_0 \sqrt{1 - c_2}} \frac{I}{I_1};$$

$\xi^2 = \xi_i \xi_i$; функции от их образов отличаются указанием на аргумент; знаком \sim отмечаются девиаторные части тензоров.

Решение (1.11) позволяет выразить $\langle \kappa'_n \varepsilon'_{ij} \rangle$ через $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_n$ ($n = 1, 2$) [1—5].

Подстановка соответствующих выражений в (1.7) приводит к соотношениям

$$(1.13) \quad 3 \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_2 / 5 = (1 - 2\mu/5) \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1;$$

$$(1.14) \quad [(1 + 2c_2/3) - \mu\gamma] \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 = \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle, \quad \gamma = 2(3 + 2c_2 - 3c_1)/15.$$

С помощью (1.7) и (1.9) можно получить выражение [4]

$$\langle \tilde{\varepsilon}'_{ij} \tilde{\varepsilon}'_{ij} \rangle = c_2 \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_2 (\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_2 - \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle) + \mu c_1 \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 (\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 - \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle) + \frac{2}{3} \langle \varepsilon_{kk} \rangle_2 c_2 (1 - c_2),$$

использование которого в формуле (1.5) после преобразования с учетом (1.13) и (1.14) дает

$$(1.15) \quad I^2 = \frac{3(1 - c_2)}{3 + 2c_2} I_0^2 + \frac{2(1 - c_2)}{3c_2} \varepsilon_0^2 + \frac{3c_1\gamma}{3 + 2c_2} I_\varepsilon^2,$$

$$(\gamma I_\varepsilon)^2 = \left(\frac{3 + 2c_2}{3} \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 - \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle \right) \left(\frac{3 + 2c_2}{3} \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 - \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle \right).$$

Одна из особенностей пластического деформирования пористых материалов — их упрочнение при уплотнении и разупрочнение в случае разрыхления. Увеличение интенсивности напряжений в пористом связующем может привести к деформированию включений, первоначально находившихся в жестком состоянии. Возможен и обратный процесс, когда происходит разрыхление материала и пластические включения начинают вести себя как жесткие частицы. Указанные особенности деформирования композита при фиксированных нагрузках $\langle \sigma_{ij} \rangle$ реализуются в зависимости от свойств и концентраций составляющих.

Объемная концентрация включений $c_1 = V_1/V$ является функцией пористости c_2 , поэтому в дальнейшем перейдем к концентрации включений в твердой фазе материала $c_1^* = V_1/V_T = \text{const}$. Нетрудно показать, что $c_1 = c_1^*(1 - c_2)$. Если включения ведут себя как жесткие частицы ($\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = 0, I_\varepsilon^2 = (I_0/\gamma)^2$), тогда I находится из (1.15) как функция переменных I_0, ε_0 и по формуле (1.6) определяет диссипативную функцию пористого тела с жесткими включениями

$$(1.16) \quad D_1^* = k_0 \sqrt{\beta(1 + c_1^*/\gamma) I_0^2 + \beta \varepsilon_0^2 / 9\alpha} \\ (\alpha = c_2/(6 + 4c_2), \quad \beta = 3(1 - c_2)^2/(3 + 2c_2)).$$

В процессе деформирования включений $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \neq 0$. Свертка уравнений (1.14) с учетом (1.12) приводит к соотношениям

$$(1.17) \quad I_1 = \frac{3}{3 + 2c_2} \left(I_0 + \frac{\widehat{k}\gamma I}{k_0 \sqrt{1 - c_2}} \right), \quad I_\varepsilon^2 = (\widehat{k}I/k_0 \sqrt{1 - c_2}),$$

подстановка которых в (1.15) и (1.16) дает

$$(1.18) \quad k^* \sqrt{1 - c_2} I = k_0 \sqrt{\beta I_0^2 + \beta \varepsilon_0^2 / 9\alpha};$$

$$(1.19) \quad D_2^* = k^* \sqrt{\beta I_0^2 + \beta \varepsilon_0^2 / 9\alpha} - \widehat{k}\beta^* I_0;$$

$$(1.20) \quad k^* = \sqrt{k_0^2 - 3c_1^*\gamma\widehat{k}^2/(3 + 2c_2)}; \quad \beta^* = \frac{3c_1^*(1 - c_2)}{3 + 2c_2}$$

(D_2^* — диссипативная функция композита с деформирующимися включениями).

Диссипативная функция (1.16) и ассоциированный закон нагружения $\langle \sigma_{ij} \rangle = \partial D_1^* / \partial \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяют условие пластического деформирования пористого тела с жесткими включениями

$$(1.21) \quad J_0^2 + \alpha(1 + c_1^*/\gamma) \sigma_0^2 = k_0^2 \beta (1 + c_1^*/\gamma) \\ (J_0^2 = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle, \quad \sigma_0 = \langle \sigma_{kk} \rangle).$$

Ассоциированный закон течения при условии пластичности (1.21) записывается в виде

$$(1.22) \quad \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \lambda_1 \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle, \quad \varepsilon_0 = \lambda_1 3\alpha (1 + c_1^*/\gamma) \sigma_0.$$

Аналогично использование диссипативной функции (1.19) позволяет получить условие пластичности

$$(1.23) \quad (|J_0| + \widehat{k}\beta^*)^2 + \alpha\sigma_0^2 = k^{*2}\beta$$

и ассоциированный закон течения пористого тела с деформируемыми включениями

$$(1.24) \quad \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \lambda_2 (|J_0| + \widehat{k}\beta^*) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle / |J_0|, \quad \varepsilon_0 = \lambda_2 3\alpha \sigma_0 \\ (|J_0| = \sqrt{J_0^2}).$$

Укажем условия одновременного деформирования матрицы и включений, а также те, при которых включения находятся в жестком состоянии. В первом случае деформирование композита описывается соотношениями (1.23), (1.24), во втором — (1.21), (1.22).

2. Пусть предел пластичности включений k_1 больше предела пластичности матрицы k_0 , тогда $\widehat{k} < 0$. Условие деформирования включений $I_1 > 0$ и уравнение (1.17) требуют выполнения неравенства $k_0 \sqrt{1 - c_2} \times I_0 + \widehat{k}\gamma I > 0$, решение которого с использованием (1.18) приводит к соотношению

$$(2.1) \quad \gamma\varepsilon_0 < \sqrt{3c_2\gamma^*/2} I_0, \quad \gamma^* = \frac{k_0^2}{k^2} - \frac{(2 + 3c_1^*)\gamma}{5}.$$

Если $\gamma^* > 0$, включения деформируются вместе с матрицей или остаются в жестком состоянии в зависимости от того, выполняется или нет условие (2.1). Можно показать, что $\gamma^* > 0$ обеспечивает также положительность подкоренного выражения в (1.20).

Подставляя значения I_0 и ε_0 , полученные сверткой уравнений (1.24), в неравенство (2.1), после преобразований, использующих (1.23) и выражения для функций α , β , γ и γ^* , получаем

$$(2.2) \quad |J_0| > a, \quad |\sigma_0| < b, \quad a = -\widehat{k}(1 - c_2)(2 + 3c_1^*)/15, \quad b = -\widehat{k}\sqrt{\gamma^*\beta/\alpha}.$$

Условия (2.2) на плоскости σ_0 , J_0 определяют область, где деформирование композита описывается соотношениями (1.23), (1.24). В области, для которой $|J_0| < a$, $|\sigma_0| > b$, применяются (1.21), (1.22).

Совместное решение уравнений (1.21) и (1.23) дает $|J_0| = a$, $|\sigma_0| = b$, при этом подстановка значения $|J_0| = a$ в первое соотношение (1.24) преобразует его к виду $\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \lambda_2 (1 + c_1^*/\gamma) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle$. Отсюда с учетом условий градиентальности (1.22) и (1.24) следует, что поверхности (1.21) и (1.23) плавно смыкаются в точках с координатами $|J_0| = a$, $|\sigma_0| = b$.

На плоскости σ_0 , J_0 уравнение (1.21) описывает эллипс с центром в начале координат, а (1.23) — часть эллипса

$$(2.3) \quad (J_0 + \widehat{k}\beta^*)^2 + \alpha\sigma_0^2 = k^{*2}\beta,$$

лежащую в полуплоскости $J_0 > 0$, и ее симметричное отображение в полуплоскости $J_0 < 0$.

На рис. 1 сплошные линии AB и $A'B'$ соответствуют уравнению (1.23) и необходимым условиям деформирования включений (2.2), а линии AA' и BB' отвечают условию пластичности композита с жесткими включениями (1.21). Штриховые линии AB и $A'B'$ — часть эллипса (1.21) в области, где поведение пористого тела описывается уравнениями (1.23), (1.24). Аналогичную ситуацию имеем для штриховых линий APB и $A'P'B'$, соответствующих (1.23). Следовательно, при $k_1 > k_0$ и $\gamma^* > 0$ условие пластичности композита изображается сплошной линией $ABB'A'$,

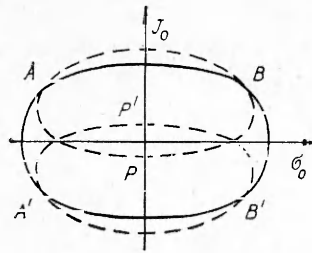


Рис. 1

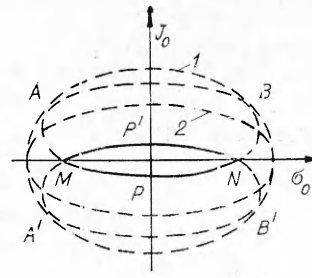


Рис. 2

состоящей из частей эллипсов (1.21) и (1.23). Функция γ^* убывает с увеличением пористости. Поэтому в процессе разрыхления может быть достигнуто некоторое значение $c_2 = c_2^*$, при котором $\gamma^* = 0$. В этом случае сплошные линии AB и $A'B'$ вырождаются в точки соприкосновения эллипсов (1.21) и (1.23).

Если $\gamma^* < 0$, на поверхности (1.23) не может выполняться условие (2.2). Включения ведут себя как жесткие частицы, и деформирование композита описывается уравнениями (1.21), (1.22) для всех путей нагружения. На рис. 1 внутренний эллипс «отрывается» от внешнего и при дальнейшем увеличении пористости вырождается в точку, когда $k^* = 0$.

Пусть теперь $k_1 < k_0$, $\tilde{k} > 0$. Из (1.17) и условия $I_1 = 0$ следует, что $I = I_0 = 0$, т. е. включения начинают деформироваться одновременно с матрицей. На плоскости σ_0, J_0 эллипс (2.3) сдвинут по оси J_0 вниз от начала координат (линия $A'P'B'$ на рис. 2). Уравнение (1.23) описывает его часть $MP'N$ в области $J_0 > 0$ и ее симметричное отображение MPN в области $J_0 < 0$, т. е. замкнутую линию $MP'NP$, имеющую две угловые точки M и N с координатами $J_0 = 0$, $|\sigma_0| = \sqrt{(k^{*2}\beta - \tilde{k}\beta^*)/\alpha}$. При $J_0 = 0$ в (1.24) возникает неопределенность значений ε_{ij} , соответствующая точкам M и N на поверхности (1.23).

На рис. 2 штриховая линия 1 — условие пластичности (1.21) пористого материала с жесткими включениями. При $k_1 = k_0$ или $c_1^* = 0$ уравнения (1.23), (1.24) преобразуются к соотношениям пластического деформирования пористой среды с однородной твердой фазой [2, 7]:

$$(2.4) \quad J_0^2 + \alpha \sigma_0^2 = \beta k_0^2, \quad \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \lambda \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle, \quad \varepsilon_0 = \lambda 3\alpha \sigma_0.$$

Поверхность пластичности (2.4) изображена штриховой линией 2.

Рассмотрим процесс одностороннего сжатия материала в пресс-форме, когда перемещения в поперечном направлении поддерживаются равными нулю, трение не учитывается. В указанных условиях нагружения уравнения (2.4) используются для расчета давления в зависимости от пористости, при этом показано, что теоретические кривые прессования удовлетворительно согласуются с экспериментом [7, 8].

Для пористого материала с жесткими включениями из (1.21), (1.22) получим напряжение в направлении деформирования

$$(2.5) \quad \sigma_1 = Y_0(1 - c_2) \sqrt{\frac{2}{3c_2} + \frac{2 + 3c_1^*}{3 + 2c_2 - 3c_1^*(1 - c_2)}}$$

(Y_0 — предел пластичности матрицы при простом растяжении (сжатии)).

На рис. 3 сплошная линия — кривая прессования пористого титана с 15 % жестких включений Cr_3C_2 [9]. Штриховая линия построена по формуле (2.5) при $c_1^* = 0,15$, $Y_0 = 240$ МПа [10].

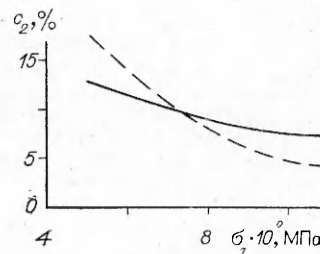


Рис. 3

Из сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей видно, что значение пористости при данном давлении, рассчитанное по (2.5), отличается от соответствующего экспериментального не более чем на 5%. Экспериментальных данных, отражающих особенности перехода включений из жесткого состояния в пластическое, для пористых материалов не имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудукаленко В. В., Минаев В. А. К расчету предела пластичности композитных материалов // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 5.
2. Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю. К расчету предела пластичности пористых материалов // Прикл. механика.— 1980.— Т. 16, № 5.
3. Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю. К теории деформирования грунта с пористой структурой // ПМТФ.— 1980.— № 6.
4. Дудукаленко В. В., Лысач Н. И. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1980.— № 1.
5. Дудукаленко В. В., Мешков С. И. О пластическом деформировании композита, содержащего сферические включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1983.— № 5.
6. Дудукаленко В. В., Шаповалов С. П. Об установившейся ползучести огнеупорных композитов // ПМТФ.— 1984.— № 4.
7. Смыслов А. Ю. К теории пластичности пористых сред // Изв. вузов. Машиностроение.— 1980.— № 4.
8. Сараев Л. А. К теории идеальной пластичности композиционных материалов // ПМТФ.— 1981.— № 3.
9. Радомысльский И. Д., Титаренко С. В., Щербань Н. И. Влияние второго компонента на прессуемость металлических смесей // Теория и практика прессования порошков.— Киев: ОНТИ ИПМ АН УССР, 1975.
10. Третьяков А. В., Радченко К. М. Изменение механических свойств металлов и сплавов при холодной прокатке.— Свердловск: Металлургиздат, 1960.

г. Куйбышев

Поступила 30/V 1990 г.

УДК 539.378

И. С. Макарова, Л. А. Сараев

К ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Методами механики случайно-неоднородных сред исследуются упругопластические свойства композиционного материала, содержащего разориентированные эллипсоидальные включения. Для композитов со сферическими включениями и матричных смесей аналогичная задача решена в [1].

1. Пусть композиционный материал, занимающий объем V , ограниченный поверхностью S , образован упругопластическими матрицей и разориентированными эллипсоидальными включениями одинаковой формы. Определяющие уравнения материалов обоих компонентов, соединенных с идеальной адгезией, задаются соотношениями

$$(1.1) \quad s_{ij} = 2\mu_m(e)e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_m \varepsilon_{pp}, \quad s_{ij} = 2\mu_f(e)e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_f \varepsilon_{pp}.$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{pp}$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{pp}$; σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\mu_{m,f}(e)$ — модули пластичности сдвига; $K_{m,f}$ — объемные модули материалов компонентов ($K_{m,f} = \text{const}$); $e = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$; индекс m относится к материалу матрицы, а f — к материалу включений.

Структуру композита будем описывать индикаторной функцией $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в объеме матрицы V_m и единице в объеме включений V_f . Кроме того, положение эллипсоидов в пространстве зададим набором индикаторных функций $\kappa_1(\mathbf{r})$, $\kappa_2(\mathbf{r})$, ..., $\kappa_n(\mathbf{r})$. Каждая функция $\kappa_s(\mathbf{r})$ равна единице в объеме V_s всех эллипсоидов s -го направления и нулю вне этого объема. Очевидно, что имеет место соотношение $\kappa(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \kappa_s(\mathbf{r})$.