УДК 539.37

ВОЗМОЖНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИ-ПОЛЗУЧЕГО МАТЕРИАЛА

В. А. Шляпин

(Свердловск)

Предлагается при составлении дифференциального уравнения связи между напряжениями, деформациями и их скоростями принять при мгновенном и очень медленном нагружениях нелинейные зависимости напряжений-деформаций в виде квадратной параболы. Получены кривые релаксации, ползучести и скорости ползучести упруго-пластического материала с нелинейной ползучестью.

Дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями для материалов, обладающих ползучестью, при мгновенном и весьма медленном нагружении обычно принимаются линейными. Так, для тела Кельвина

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = H\varepsilon + \tau E\dot{\varepsilon} \tag{1}$$

Полагая зависимости σ-ε при мгновенном и очень длительном нагружении нелинейными, можно выразить изменение модулей упругости

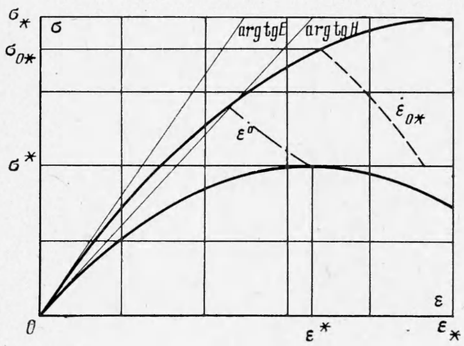
$$E' = E\,(1 - a\varepsilon), \qquad H' = H\,(1 - b\varepsilon)$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = H\varepsilon\,(1 - b\varepsilon) + \tau E\dot{\varepsilon}\,(1 - a\varepsilon) \tag{2}$$

При весьма быстром нагружении можно пренебречь напряжениями и деформациями σ и ε по сравнению с их скоростями $\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}$ и уравнение (2) обратится в

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}\,(1 - a\varepsilon)$$



Фиг. 1

Величиной ε в скобках нельзя пренебречь по сравнению с единицей. При постоянной скорости нагружения $\dot{\sigma} = v$

$$v = E\dot{\varepsilon}\,(1 - a\varepsilon)$$

Интегрируя, имеем

$$vt = E\varepsilon\,(1 - {}^1/_2\, a\varepsilon), \quad \text{или} \quad \sigma = E\varepsilon\,(1 - {}^1/_2\, a\varepsilon)$$

Это уравнение параболы. Обозначая координаты вершины σ_* (наибольшее возможное напряжение или «предел прочности») и $\varepsilon_* = 1 / a$ (деформация в момент достижения предела прочности или деформация, при которой происходит разрушение) получаем зависимость напряжений и деформаций при мгновенном нагружении в виде

$$\sigma = E\varepsilon\,(1 - {}^1/_2\varepsilon / \varepsilon_*) \tag{3}$$

При очень медленном нагружении в уравнении (2) можно пренебречь скоростями $\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}$ по сравнению с σ, ε. Обозначая координаты вершины параболы для этого случая σ^*, $\varepsilon^* = 1 / 2\,b$, имеем

$$\sigma = H\varepsilon\,(1 - {}^1/_2\,\varepsilon / \varepsilon^*) \tag{4}$$

Зависимости (3), (4) представлены на фиг. 1 для случая $\varepsilon^* < \varepsilon_*$. В общем случае возможно также $\varepsilon^* \geqslant \varepsilon_*$ и даже $\sigma^* > \sigma_*$, но во всех случаях должно соблюдаться $E \geqslant H$, что следует из сущности понятий мгновенного и длительного модулей.

Дифференциальное уравнение (2) окончательно запишется так:

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = H\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon^*}\right) + \tau E\dot{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \tag{5}$$

Приложим мгновенно напряжение σ_0. При этом деформация из (3) будет

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_*\,(1 - \sqrt{1 - \sigma_0 / \sigma_*}) = 2\sigma_* E^{-1}(1 - \sqrt{1 - \sigma_0 / \sigma_*})$$

Эта деформация состоит из упругой $\varepsilon^e = \sigma_0 / E$ и пластической $\varepsilon^p = \varepsilon_0 - \varepsilon^e$.

Если теперь поддерживать неизменной деформацию ε_0, то $\dot{\varepsilon} = 0$ и из (5) имеем уравнение

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = H\varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0 / 2\varepsilon^*)$$

Решая его, получаем уравнение релаксации

$$\sigma = H\varepsilon_0\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^*}\right) + \left[E\varepsilon_0\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_*}\right) - H\varepsilon_0\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^*}\right)\right] e^{-t/\tau}$$

Это обычное уравнение релаксации тела Кельвина [1, 2].

Если поддерживать постоянным напряжение σ_0, то $\dot{\sigma} = 0$ и из (5) имеем

$$\sigma_0 = H\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon^*}\right) + \tau E\dot{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \tag{6}$$

Решения этого уравнения имеют следующий вид:

При $\sigma_0 > \sigma^*$

$$t = \frac{\tau E\varepsilon^*}{H\varepsilon_*}\left[\ln\frac{\theta(\varepsilon_0)}{\theta(\varepsilon)} + \frac{2\eta(\varepsilon_*)}{\vartheta}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta(\varepsilon)}{\vartheta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta(\varepsilon_0)}{\vartheta}\right)\right]$$

при $\sigma_0 < \sigma^*$

$$t = \frac{\tau E\varepsilon^*}{H\varepsilon_*}\left[\ln\frac{\theta(\varepsilon_0)}{\theta(\varepsilon)} - \frac{2\eta(\varepsilon_*)}{i\vartheta}\left(\operatorname{Arth}\frac{\eta(\varepsilon)}{i\vartheta} - \operatorname{Arth}\frac{\eta(\varepsilon_0)}{i\vartheta}\right)\right]$$

$$\theta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}\right)^2 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^*} + \frac{\sigma_0}{\sigma^*}, \quad \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} - 1, \quad \vartheta = \sqrt{\sigma_0/\sigma^* - 1}$$

при $\sigma_0 = \sigma^*$

$$t = \frac{2\tau E\varepsilon^*}{H\varepsilon_*}\left(\frac{\varepsilon_* - \varepsilon^*}{\varepsilon^* - \varepsilon} - \frac{\varepsilon_* - \varepsilon^*}{\varepsilon^* - \varepsilon_0} + \ln\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_0}{\varepsilon^* - \varepsilon}\right)$$

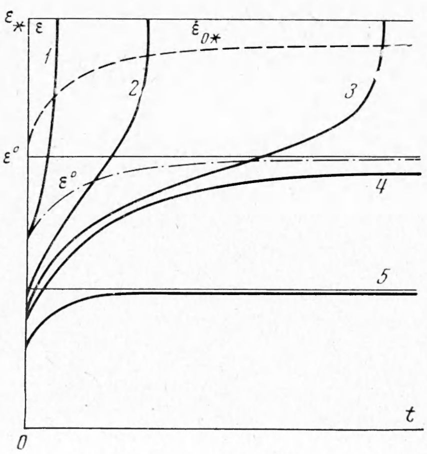
Графики ползучести представлены на фиг. 2 (при соотношении параметров ε_*, ε^*, σ_*, σ^*, принятом для фиг. 1).

Кривые *1, 2, 3, 4, 5* соответствуют значениям $\sigma_0 = 1.4\ \sigma^*,\ 1.1\ \sigma^*,\ 1.02\ \sigma^*,\ \sigma^*,\ 0.75\ \sigma^*$.

При $\sigma_0 \leqslant \sigma^*$ деформации при $t \to \infty$ асимптотически стремятся к величине, определяемой из (4)

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon^*\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma^*}}\right) = \frac{2\sigma^*}{H}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma^*}}\right)$$

Разрушения не происходит. При $\sigma_0 > \sigma^*$ деформации в течение большего или меньшего промежутка времени достигают величины деформации разрушения ε_*, материал разрушается. В соответствии с этим можно отождествить параметр σ^* с понятием предела долговременного (длительного) сопротивления.



Фиг. 2

Во всех случаях $\sigma_0 > \sigma^*$ момент разрушения есть достижение деформациями значения ε_*. Однако, как будет показано далее, момент разрушения можно трактовать и иначе.

Скорость деформаций ползучести определяется из (6)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{H\varepsilon_*\varepsilon^*}{2\tau E}\,\frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon_* - \varepsilon} \tag{7}$$

Графики изменения скоростей деформации в зависимости от величины деформаций представлены на фиг. 3. Кривые *1, 2, 3, 4, 5* соответствуют значениям $\sigma_0 = 0.75\,\sigma^*$, σ^*, $1.02\ \sigma^*$, $1{,}1\sigma^*$, $1.4\ \sigma^*$. При $\sigma_0 \leqslant \sigma^*$ скорости деформаций уменьшаются от начального значения $\dot{\varepsilon}_0$ до нуля при $\varepsilon = \varepsilon_\infty$.

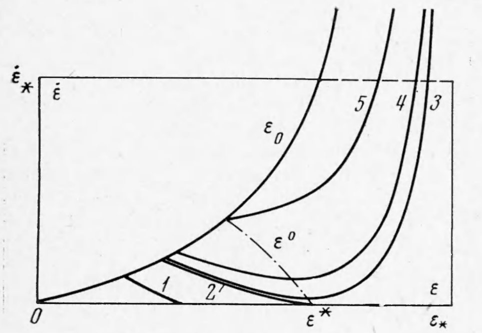
При $\sigma_0 > \sigma^*$ скорости деформаций сначала уменьшаются, а потом при достижении некоторой критической деформации ε° начинают расти. Критические деформации можно определить, найдя минимум функции (7)

$$\frac{\varepsilon^\circ}{\varepsilon_*} = 1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{\sigma^*}\left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_*}\right)^2 - \frac{2\varepsilon^*}{\varepsilon_*}}$$

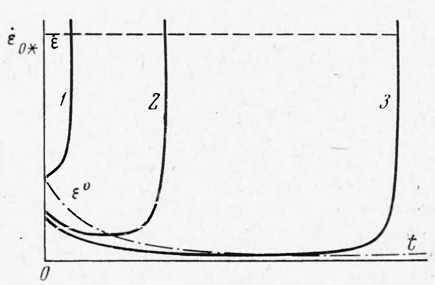
Кривая, соединяющая точки критических значений ε°, изображена на фиг. 1,2,3 штрих-пунктирной линией.

При напряжениях от σ_0, соответствующего точке совпадения ε° с ε_0, и больших скорость деформаций непрерывно возрастает с начала ползучести до момента разрушения. В момент разрушения при достижении предельной деформации ε_* скорость деформации стремится к бесконечности.

Поскольку при испытаниях материалов скорость деформирования в момент разрушения не бесконечна, а имеет хотя весьма большую, но конечную величину, то за момент разрушения может быть принято достижение скоростями деформаций некоторой определенной большой величины $\dot{\varepsilon}_*$. При этом «пределом прочности» окажется не σ^*, а соответствующее $\dot{\varepsilon}_*$ напряжение $\sigma_{0*} < \sigma_*$ (см. фиг. 1). Предельной деформацией,



Фиг. 3



Фиг. 4

деформацией разрушения, при этом будет считаться величина ε_{0*}, соответствующая принятой предельной скорости и различная в зависимости от начального напряжения σ_0. Кривая σ_{0*}, ε_{0*} для некоторой большой скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{0*}$ представлена на фиг. 1,2,3 пунктирной линией.

Можно также считать предельной точкой точку начала увеличения скорости деформаций ε° [2].

На полученных выше кривых ползучести и скоростей деформаций (фиг. 2, 3) отсутствуют участки установившейся ползучести, постоянной скорости. Однако кривизна линий ползучести при σ_0, незначительно превышающем σ^*, на участке вблизи точки перегиба ε° весьма мала, отличие от линейной зависимости невелико. График зависимости скоростей деформаций от времени (на фиг. 4) показывает (кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\sigma_0 = 1.4\,\sigma^*$, $1.1\,\sigma^*$, $1.02\,\sigma^*$), что при σ_0, незначительно превышающем σ^*, скорость деформаций в течение длительного времени мало отличается от постоянной.

Поступила 14 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.

УДК 539.87

ПАРАМЕТРЫ НЕОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В АЛЮМИНИИ

Г. В. Злыгостев, А. К. Музыря, В. П. Ратников

(Москва)

Описан метод регистрации профиля давления и массовой скорости за фронтом двумерной ударной волны, возбуждаемой в плоской пластине движущейся по ее поверхности нагрузкой. Представлены результаты, полученные для случая детонации слоя взрывчатого вещества на поверхности пластины из алюминия.