

УДК 532.58

## ПЛОСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ПОГРУЖЕНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

А. А. Коробкин, Т. И. Хабахпашева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается плоская нестационарная линейная задача о погружении упругой пластины конечной длины в идеальную несжимаемую и невесомую жидкость. В начальный момент известны прогиб пластины и скорости ее точек. Жидкость занимает нижнюю полуплоскость, граница жидкости вне пластины свободна. Пластина, которая является днищем конструкции, погружающейся в жидкость с постоянной скоростью, моделируется балкой Эйлера. На начальном этапе погружения, когда перемещение конструкции намного меньше длины пластины, определены прогиб пластины и распределение в ней изгибающих напряжений. Используемая модель позволяет оценить максимальные напряжения, возникающие в упругой пластине при ее ударе о воду, а также предсказать момент и место их возникновения. Расчеты проведены для условий эксперимента, выполненного в MARINTEK (Норвегия). Отмечено качественное совпадение численных и экспериментальных результатов.

**Введение.** Рассматривается плоская нестационарная задача о погружении упругой пластины конечной длины в идеальную несжимаемую и невесомую жидкость. В начальный момент времени ( $t' = 0$ ) жидкость занимает нижнюю полуплоскость ( $y' \leq 0$ ), отрезок ее границы  $-L < x' < L$ ,  $y' = 0$  соответствует упругой пластине, участки  $x' > L$ ,  $x' < -L$ ,  $y' = 0$  — свободной границе жидкости (рис. 1). Штрихом отмечены размерные переменные. Пластина шарнирно прикреплена к конструкции, которая погружается в жидкость с постоянной скоростью  $V$ . Ударные явления, связанные с началом движения, определяют начальный прогиб пластины  $w'(x', 0)$  и скорость ее точек  $(\partial w'/\partial t)(x', 0)$ , которые считаются известными и обозначаются через  $w'_0(x')$  и  $w'_1(x')$ . На начальном этапе погружения, когда перемещение конструкции намного меньше длины пластины, требуется определить прогиб пластины и распределение изгибающих напряжений в ней.

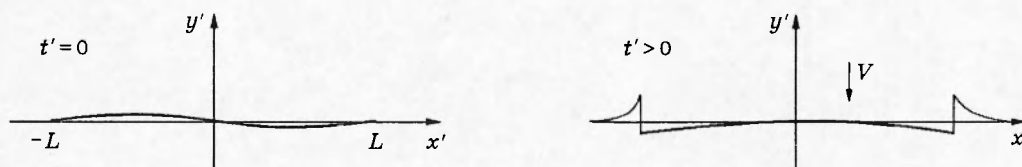


Рис. 1

Задача рассматривается в рамках линейного приближения. Течение жидкости предполагается плоским и потенциальным. Пластина моделируется балкой Эйлера, срезающие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-15-96882, 96-01-01767).

напряжения и напряжения в поперечном направлении предполагаются пренебрежимо малыми.

Весь процесс удара длинной волной по пластине конечного размера разбивается на две стадии [1]. На первой (ударной) стадии пластина смочена только частично, гидродинамические нагрузки на пластину велики и зависят от скорости расширения области контакта между пластиной и жидкостью. Для длинных волн продолжительность этого этапа обычно мала, а напряжения в пластине еще не достигают своих максимальных значений. На второй стадии (погружения) пластина смочена полностью и продолжает погружаться в жидкость. При этом гидродинамические нагрузки на пластину уже невелики и не могут быть классифицированы как ударные. Колебания пластины происходят в основном за счет потенциальной энергии упругих деформаций и кинетической энергии, накопленных в пластине за время ударной стадии. На обеих стадиях границу жидкости можно приближенно заменить плоской, если волна достаточно длинная, а глубина погружения пластины мала по сравнению с ее размером. Последнее замечание объясняет постановку задачи для второго этапа, рассматриваемого в настоящей работе, как задачи о погружении в идеальную невесомую жидкость плавающей пластины, для которой заданы начальные прогиб и распределение скоростей.

Обзор работ по проблеме взаимодействия упругих конструкций и жидкости дан в [2]. Впервые задача об ударе упругой пластины о поверхность жидкости решена Лотовым [3] в рамках теории удара Седова. Теория Седова не учитывает особенностей течения жидкости на ударной стадии и предполагает, что все точки пластины вступают в контакт с жидкостью одновременно. Это предположение справедливо для бесконечно длинных волн. Получено, что непосредственно после момента удара прогибом пластины можно пренебречь, а вертикальные скорости точек пластины не зависят от ее жесткости и условий закрепления концов.

В настоящей работе используется иной подход, применимый в случае волн умеренной длины. Сначала в рамках теории Вагнера [4] без дополнительных упрощающих предположений определяются прогиб пластины и вертикальная скорость ее точек на ударной стадии. Скорость точек пластины и ее прогиб в конце ударной стадии используются как начальные данные для численного расчета упругого поведения пластины на стадии погружения.

В линейном приближении деформация границы жидкости не учитывается, граничные условия сносятся на линию  $y' = 0$  и линеаризуются [5]. Течение жидкости однозначно описывается потенциалом скоростей  $\varphi'(x', y', t')$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа в нижней полуплоскости ( $y' < 0$ ) и равен нулю на участках свободной границы  $|x'| > L, y' = 0$ . Кроме того, вертикальная скорость жидких частиц на упругой пластине  $(\partial\varphi'/\partial y')(x', 0, t')$  совпадает с абсолютной скоростью точек пластины  $-V + (\partial w'/\partial t')(x', t')$ ,  $|x'| < L, t' > 0$ , а давление в жидкости  $p'(x', y', t')$  связано с потенциалом скоростей соотношением  $p' = -\rho(\partial\varphi'/\partial t')$  ( $\rho$  — плотность жидкости).

Предполагается, что упругие деформации пластины описываются уравнением Эйлера

$$M_B \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} + EJ \frac{\partial^4 w'}{\partial x'^4} = p'(x', 0, t') \quad (1)$$

и определяются начальными данными

$$w'(x', 0) = w'_0(x'), \quad \frac{\partial w'}{\partial t'}(x', 0) = w'_1(x') \quad (2)$$

и граничными условиями

$$w'(\pm L, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}(\pm L, 0) = 0, \quad (3)$$

а также гидродинамическими нагрузками на пластину. Здесь  $M_B$  — масса балки единичной длины,  $J$  — момент инерции ее поперечного сечения,  $E$  — модуль Юнга. В модели Эйлера принимаются во внимание только изгибающие напряжения вдоль пластины. Напряжения в поперечном направлении и срезающие напряжения не учитываются.

Задача состоит из двух связанных между собой частей: гидродинамической (определение течения жидкости и распределения давления по известным скоростям погружения точек пластины) и упругой (определение деформаций пластины по известным начальным данным и распределению гидродинамического давления вдоль пластины). Гидродинамическую часть линеаризованной задачи удобно записать относительно давления  $p'(x', y', t')$ . Функция  $p'(x', y', t')$  является гармонической в нижней полуплоскости  $y' < 0$  и равна нулю на свободной границе в силу динамического условия. На участке  $|x'| < L$ ,  $y' = 0$  условие непротекания после его дифференцирования по времени дает  $(\partial p'/\partial y')(x', 0, t') = -\rho(\partial^2 w'/\partial t'^2)(x', t')$  при  $t' > 0$ . Видно, что на этапе погружения, который следует за ударной стадией, распределение давления зависит только от ускорения точек пластины, но не от скорости погружения, если последняя остается постоянной.

Ниже используются безразмерные переменные. Анализ поведения упругой пластины на ударной стадии [6] показывает, что  $w'_0(x') = (L^2/R)w_0(x'/L)$  ( $R$  — радиус кривизны в вершине волны) и  $w'_1(x') = Vw_1(x'/L)$ . Функции  $w_0(x)$ ,  $w_1(x)$  ограничены при  $|x| < 1$ , где  $x = x'/L$ . Величина  $T = [\rho L^5/(EJ)]^{1/2}$ , которая имеет порядок периода колебаний первой моды для пластины, плавающей на поверхности невесомой жидкости [1], выбирается в качестве масштаба времени,  $L$  — масштаба длины, а произведение  $VT$  — масштаба деформаций границы жидкости и пластины. Остальные масштабы являются производными от указанных выше:  $\rho VL/T$  — для давления,  $VL$  — для потенциала скоростей.

Линейное приближение формально справедливо в том случае, когда глубина погружения пластины намного меньше ее длины:  $VT \ll L$ . Последнее условие с учетом определения масштаба времени  $T$  удобно записать в виде

$$V \ll \sqrt{EJ/(\rho L^3)}, \quad (4)$$

где правая часть имеет размерность скорости и обозначается через  $V_p$ . Например, для экспериментов [1], проведенных в MARINTEX (Норвегия) со стальной плитой размером  $1 \times 0,5 \times 0,008$  м, имеем  $E = 21 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $h = 8$  мм,  $J = h^3/12 = 4,266 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $L = 25$  см,  $V_p \approx 24$  м/с. Неравенство (4) в данном случае означает, что высота, с которой плита сбрасывается на поверхность воды, должна быть намного меньше 30 м. Только тогда можно получить согласование расчетов, выполненных в рамках линейного приближения, с экспериментальными данными. В экспериментах высота падения плиты составляла 50 см. В этом случае использование линейного приближения оправданно при следующих масштабах характеристик процесса погружения: времени — 0,01 с, длины — 25 см, скорости — 2,5 м/с, давления —  $7,825 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>, перемещений — 3,13 мм. С помощью метода [6] при центральном ударе волной с радиусом кривизны в вершине  $R = 10,2$  м определены функции  $w_0(x)$  и  $w_1(x)$ , задающие начальные условия для стадии погружения, а также длительность ударной стадии, равная  $8,5 \cdot 10^{-4}$  с.

**Постановка задачи.** В безразмерных переменных задача относительно давления в жидкости  $p(x, y, t)$  и прогиба пластины  $w(x, t)$  имеет вид

$$p_{xx} + p_{yy} = 0 \quad (y < 0); \quad (5)$$

$$p = 0 \quad (y = 0, \quad |x| > 1); \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (y = 0, \quad |x| < 1); \quad (7)$$

$$p \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty); \quad (8)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, 0, t) \quad (|x| < 1, \quad t > 0); \quad (9)$$

$$w(x, 0) = \gamma w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x) \quad (|x| < 1, \quad t = 0); \quad (10)$$

$$w(\pm 1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\pm 1, t) = 0 \quad (|x| = 1, \quad t > 0). \quad (11)$$

Единственный существенный параметр  $\alpha$  равен отношению  $M_B/(\rho L)$ . В частности,  $M_B = h\rho_B$  для пластины постоянной толщины  $h$  с плотностью материала  $\rho_B$ . Параметр  $\gamma = LV_p/(RV)$  характеризует значимость начального прогиба пластины  $w(x, 0)$  для последующих ее деформаций и распределения изгибающих напряжений. Для длинных волн  $\gamma \ll 1$ . В описанных выше экспериментах  $h = 8$  мм,  $\rho_B = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 10,2$  м, что дает  $\alpha = 0,2512$ ,  $\gamma = 0,1875$ .

Из определения параметра  $\alpha$  и условий применимости уравнений Эйлера в задаче (1)–(3) следует, что для реальных материалов  $\alpha$  мало.

Роль весомости жидкости характеризуется параметром  $gT^2/L$ , где  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. В рассматриваемом случае этот параметр равен 0,04, что позволяет пренебречь в главном приближении гравитационными эффектами.

Уравнения (5)–(8) представляют гидродинамическую часть задачи, а (9)–(11) — упругую. Задача является связанной: давление на пластине  $p(x, 0, t)$  ( $|x| < 1$ ) и прогиб пластины  $w(x, t)$  необходимо определять одновременно. Изгибающие напряжения в пластине  $\sigma(x, z, t)$  в безразмерных переменных вычисляются по формуле

$$\sigma(x, z, t) = zw_{xx}(x, t)/2,$$

где переменная  $z$  меняется по толщине пластины,  $z = -1$  соответствует нижней смоченной части пластины, а  $z = +1$  — ее верхней стороне в местах наибольшей толщины. При  $w_{xx}(x, t) > 0$  верхняя сторона пластины сжимается, а при  $w_{xx}(x, t) < 0$  растягивается. Ниже используется обозначение  $\sigma(x, t) = \sigma(x, 1, t)$ . Масштаб упругих напряжений выбран как  $hEVT/L^2$ . В условиях эксперимента [1] он равен 841 Н/мм<sup>2</sup>.

Задача (5)–(11) линейная, поэтому ее решение достаточно построить и исследовать для двух случаев: когда обе функции  $w_0(x)$ ,  $w_1(x)$  четные и нечетные по  $x$ . В настоящей статье рассматривается только первый случай, соответствующий удару волной в центр пластины.

Наиболее естественным для решения данной задачи является подход, в рамках которого сначала определяются формы собственных колебаний пластины, плавающей на поверхности жидкости,  $\Psi_m(x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), а прогиб пластины  $w(x, t)$  разыскивается затем в виде ряда Фурье

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t)\Psi_m(x). \quad (12)$$

Непосредственное определение форм собственных колебаний плавающей пластины (нормальных мод) затруднительно и возможно только с помощью численных расчетов даже в простейших случаях. Нормальные моды плавающей пластины представляют несомненный интерес, так как с их помощью решение задачи (5)–(11) может быть записано в виде ряда, коэффициенты которого задаются начальными условиями (10) в явном виде.

**Формы собственных колебаний плавающей пластины.** Решение задачи (5)–(11) ищется методом разделения переменных, согласно которому сначала находятся простейшие нетривиальные решения вида

$$w(x, t) = W(t)\Psi(x), \quad p(x, y, t) = -P(t)Q(x, y), \quad (13)$$

удовлетворяющие всем уравнениям задачи за исключением начальных условий (10). Краевое условие (7) будет удовлетворено, если положить

$$P(t) = \frac{d^2 W}{dt^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x, 0) = \Psi(x) \quad (|x| < 1). \quad (14)$$

Подставляя (13) в уравнение колебания балки (9) и учитывая (14), получим

$$[\alpha \Psi(x) + Q(x, 0)] \frac{d^2 W}{dt^2} + W(t) \frac{d^4 \Psi}{dx^4} = 0.$$

Последнее равенство приводит к двум соотношениям

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \omega^2 W = 0; \quad (15)$$

$$\omega^2 [\alpha \Psi(x) + Q(x, 0)] = \frac{d^4 \Psi}{dx^4} \quad (|x| < 1). \quad (16)$$

Уравнение (16) следует рассматривать совместно с граничными условиями (11), которые дают

$$\Psi(\pm 1) = 0, \quad \frac{d^2 \Psi}{dx^2}(\pm 1) = 0, \quad (17)$$

и краевой задачей для функции  $Q(x, y)$ , вытекающей из уравнений (5), (6), (8), (14) и имеющей вид

$$\begin{aligned} Q_{xx} + Q_{yy} &= 0 \quad (y < 0), & Q &= 0 \quad (y = 0, \quad |x| > 1), \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \Psi(x) \quad (y = 0, \quad |x| < 1), & Q &\rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим через  $\Lambda$  линейный оператор, ставящий в соответствие функции  $\Psi(x)$  функцию  $Q(x, 0)$  ( $-1 < x < 1$ ) в силу краевой задачи со смешанными граничными условиями (18). Из второй теоремы Грина следует, что он самосопряжен. С помощью оператора  $\Lambda$  уравнение (16) можно записать в виде

$$\omega^2 [\alpha I + \Lambda] \Psi = \frac{d^4 \Psi}{dx^4} \quad (19)$$

( $I$  — тождественный оператор). Оператор  $\alpha I + \Lambda$  также является самосопряженным, поэтому однородная краевая задача (17), (19) имеет счетное множество вещественных собственных чисел  $\omega_j$ , где  $\omega_{j+1} > \omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , и собственных функций  $\Psi_j(x)$ , которые задают формы собственных колебаний пластины, плавающей на границе идеальной жидкости. Из (19) и (17) вытекает, что при  $i \neq j$  функции  $\Psi_j(x)$  ортогональны в следующем смысле:

$$\int_{-1}^1 \Psi_j''(x) \Psi_i''(x) dx = 0. \quad (20)$$

Удобно ввести новые функции  $\Phi_j(x)$ , равные  $\Psi_j''(x)$  и в силу (20) ортогональные в обычном смысле. Ясно, что  $\Phi_j(\pm 1) = 0$ . Оператор, ставящий в соответствие функциям  $\Phi_j(x)$  функции  $\Psi_j(x)$ , обозначим через  $N$ . Этот оператор является самосопряженным и позволяет записать решение задачи

$$\Psi''(x) = \Phi(x) \quad (-1 < x < 1), \quad \Psi(\pm 1) = 0 \quad (21)$$

в виде  $\Psi = N\Phi$ . Действительно,

$$\int_{-1}^1 \Phi_j N \Phi_i dx = \int_{-1}^1 \Psi_j''(x) \Psi_i(x) dx = \int_{-1}^1 \Psi_j \Psi_i'' dx = \int_{-1}^1 \Phi_i N \Phi_j dx.$$

С помощью оператора  $N$  уравнение (19) относительно новой функции  $\Phi(x) = \Psi''(x)$  переписывается в каноническом виде

$$A\Phi = \mu\Phi, \tag{22}$$

где  $A = N(\alpha I + \Lambda)N$ ;  $\mu = \omega^{-2}$ . Оператор  $A$  самосопряжен. Для практического определения его собственных значений  $\mu_j$  естественным является переход от операторного уравнения (22) к уравнению в конечномерном пространстве, тем самым задача сводится к задаче на собственные значения соответствующей симметричной матрицы.

Собственные функции оператора  $A$  будем искать в виде

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i \psi_i(x), \tag{23}$$

где  $\psi_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) — собственные формы колебаний балки в пустоте. Для шарнирно закрепленной балки имеем  $\psi_i(x) = \cos \lambda_i x$ ,  $\lambda_i = (2i - 1)\pi/2$ . Подставляя представление (23) в уравнение (22) и учитывая условие ортогональности функций  $\Phi_i(x)$ , получим систему

$$A_1 \Phi = \mu \Phi, \tag{24}$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)^T$ ;  $A_1 = D^{-2}(\alpha I + S)D^{-2}$ ,  $D = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}$  — диагональная матрица,  $S$  — матрица присоединенных масс [6]. Элементы симметричной матрицы  $S$  выражаются с помощью функций Бесселя нулевого и первого порядков:

$$S_{nm} = \frac{\pi}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} (\lambda_n J_0(\lambda_m) J_1(\lambda_n) - \lambda_m J_0(\lambda_n) J_1(\lambda_m)) \quad (n \neq m),$$

$$S_{nn} = \frac{\pi}{2} (J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)).$$

Элементы матрицы  $A_1$  быстро убывают с ростом их номеров, поэтому для определения собственных векторов и собственных чисел этой матрицы используется метод редукции. В силу симметричности матрицы  $A_1$  собственные векторы  $\Phi_j$ , отвечающие различным собственным числам  $\mu_j$ , будут ортогональны. Для определенности будем считать векторы  $\Phi_j = (\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \dots)^T$  нормированными, так что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-4} \Phi_{ji}^2 = 1, \quad \Phi_{jj} \leq 0 \quad (1 \leq j \leq \infty). \tag{25}$$

Собственные формы колебаний пластины на поверхности жидкости  $\Psi_j(x)$  определяются как решения задачи (21). Для шарнирно закрепленной пластины имеем

$$\Psi_j(x) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi_{ji}}{\lambda_i^2} \psi_i(x). \tag{26}$$

Функции  $\Psi_j(x)$  удовлетворяют уравнению (19) при  $\omega_j = \mu_j^{-1/2}$  и граничным условиям (17). Кроме того, в силу (25) они нормированы

$$\int_{-1}^1 \Psi_j^2(x) dx = 1 \tag{27}$$

и ортогональны в смысле равенства (20). Относительный вклад (в процентах)  $i$ -й формы колебаний пластины в пустоте  $\psi_i(x)$  в  $j$ -ю форму колебаний пластины, плавающей на поверхности идеальной и невесомой жидкости,  $\tilde{\Psi}_i(x)$ , равен  $\Phi_{ji}^2 \lambda_i^{-4} \cdot 100$ .

**Метод нормальных мод.** Решение задачи (5)–(11) для прогиба пластины ищется в виде разложения по «мокрым» модам (12). Формулы (14) показывают, что если коэффициенты  $a_n(t)$  найдены, то распределение давления вдоль пластины определяется рядом

$$p(x, 0, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{a}_m(t) Q_m(x, 0), \quad (28)$$

$$Q_m(x, 0) = \Lambda \Psi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \lambda_n^{-2} - \omega_m^{-2} \lambda_n^2) \Phi_{mn} \psi_n(x)$$

в силу (19) и (26). Подставляя (12), (28) в (9) и учитывая (19), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^{-2} \ddot{a}_m + a_m) \frac{d^4 \Psi_m}{dx^4}(x) = 0 \quad (|x| < 1, \quad t > 0).$$

Условие ортогональности (20) дает

$$\ddot{a}_m + \omega_m^2 a_m = 0 \quad (t > 0). \quad (29)$$

Начальные данные (10) позволяют определить  $a_m(0) = a_{m0}$ ,  $\dot{a}_m(0) = a_{m1}$  и записать решение уравнения (29) в виде

$$a_m(t) = a_{m0} \cos(\omega_m t) + \frac{a_{m1}}{\omega_m} \sin(\omega_m t). \quad (30)$$

Функции  $w_0(x)$  и  $w_1(x)$  в (10) вычисляются в ходе решения задачи об ударе на начальной стадии [3], когда пластина смочена только частично, в виде

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \psi_j(x), \quad i = 0, 1.$$

Коэффициенты  $w_{ij}$  в дальнейшем считаются известными, отсюда

$$a_{m0} = -\gamma \sum_{j=1}^{\infty} w_{0j} \lambda_j^2 \Phi_{mj} / \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{mj}^2, \quad (31)$$

$$a_{m1} = - \sum_{j=1}^{\infty} w_{1j} \lambda_j^2 \Phi_{mj} / \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{mj}^2, \quad m \geq 1.$$

Подставляя (30), (31) в (12), получим

$$w(x, t) = - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2} S_j(t) \psi_j(x) \quad (32)$$

для прогиба пластины и

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t) \psi_j(x), \quad S_j(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \Phi_{mj} \quad (33)$$

для распределения изгибающих напряжений вдоль пластины.

**Усложненные условия закрепления концов пластины.** В краевых условиях (11) первое равенство оставим без изменений, а второе заменим на

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\pm 1, t) \pm k \frac{\partial w}{\partial x}(\pm 1, t) = 0 \quad (34)$$

( $k$  — жесткость пружины в безразмерных переменных). Краевое условие (34) означает, что пластина по-прежнему шарнирно закреплена по краям и, кроме того, вблизи краев скреплена с конструкцией спиральными пружинами, которые стремятся вернуть пластину в равновесное положение [1]. С прикладной точки зрения условие (34) предпочтительнее, так как позволяет путем подбора  $k$  точнее моделировать особенности прикрепления упругой пластины к жесткой конструкции. Заметим, что при  $k \neq 0$  задача

$$\omega^2[\alpha I + \Lambda]\Psi = \frac{d^4\Psi}{dx^4} \quad (|x| < 1), \quad \Psi(\pm 1) = 0, \quad \Psi''(\pm 1) \pm k\Psi'(\pm 1) = 0 \quad (35)$$

на определение форм собственных колебаний плавающей пластины  $\Psi_j(x)$  и собственных частот  $\omega_j$  аналогична задаче (17), (19) и переходит в нее при  $k \rightarrow 0$ . Решение задачи (35) ищем в виде

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x),$$

где  $\psi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — собственные формы колебаний пластины в пустоте. Функции  $\psi_i(x)$  зависят только от условий закрепления и в случае центрального удара могут быть записаны в виде

$$\psi_i(x) = A_i \left( \cos \lambda_i x - \cos \lambda_i \frac{\operatorname{ch} \lambda_i x}{\operatorname{ch} \lambda_i} \right) \quad (|x| < 1, \quad i = 1, 2, \dots).$$

Здесь  $\lambda_i(k)$  — решения уравнения  $2\lambda_n \cos \lambda_n + k \sin \lambda_n + k \cos \lambda_n \operatorname{th} \lambda_n = 0$  такие, что  $0 < \lambda_1(k) < \lambda_2(k) < \dots$ . Справедливо представление  $\lambda_i(k) = \lambda_i(0) + \gamma_i(k)$ ,  $0 \leq \gamma_i(k) \leq \pi/2$ , где числа  $\lambda_i(0)$  соответствуют случаю шарнирно закрепленной балки,  $\lambda_i(0) = \pi(2i - 1)/2$ . Собственные функции  $\psi_i(x)$  ортогональны друг другу, а если положить  $A_n = [1 + \cos^2 \lambda_n (\operatorname{ch}^{-2} \lambda_n + 2/k)]^{-1/2}$ , то и нормированы:

$$\int_{-1}^1 \psi_j(x) \psi_i(x) dx = \delta_{ij}.$$

Равенство (20) не имеет места при  $k \neq 0$ . Из (35) следует, что

$$\int_{-1}^1 \psi_j(x) \frac{d^4 \psi_i}{dx^4}(x) dx = 0 \quad (36)$$

при  $i \neq j$  и произвольных условиях закрепления концов пластины. Равенство (20) есть частный случай (36), справедливый для шарнирного закрепления, а также для защемленной пластины.

Функции  $\Psi_j(x)$  будем искать в виде  $\Psi_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_{ji} \psi_i(x)$ , при этом краевые условия в задаче (35) удовлетворяются автоматически, а уравнение дает

$$\alpha \Psi_{ji} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ni}(k) \Psi_{jn} = \omega_j^{-2} \Psi_{ji} \lambda_i^4(k), \quad S_{ni}(k) = \int_{-1}^1 \psi_i(x) \Lambda \psi_n(x) dx. \quad (37)$$

Обозначим через  $S(k)$  матрицу присоединенных масс с элементами  $S_{ni}(k)$ , через  $\bar{\Psi}_j$  — вектор с компонентами  $(\Psi_{j1}, \Psi_{j2}, \dots)$  и введем матрицу  $A_1(k) = D^{-2}(\alpha I + S(k))D^{-2}$ ,  $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ , тогда бесконечномерная система (37) переписется в каноническом виде

$$A_1(k) \bar{\Phi}_j = \mu_j \bar{\Phi}_j. \quad (38)$$



Здесь  $\Phi_j = -D^2 \bar{\Psi}_j$ ,  $\mu_j = \omega_j^{-2}$ . В уравнении (38) матрица  $A_1(k)$  симметричная, ее элементы зависят только от параметра  $k$ . Уравнение (38) переходит в уравнение (24) при  $k \rightarrow 0$ . Элементы матрицы присоединенных масс  $S(k)$  вычисляются по формулам

$$S_{nm}(k) = -\pi A_n A_m [\bar{S}_1(m, n, k) + S_2(m, n, k) + S_2(n, m, k) + \bar{S}_3(m, n, k)],$$

$$\bar{S}_1(m, n, k) = \frac{\lambda_m J_1(\lambda_m) J_0(\lambda_n) - \lambda_n J_1(\lambda_n) J_0(\lambda_m)}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2},$$

$$\bar{S}_1(n, n, k) = -\frac{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)}{2},$$

$$S_2(m, n, k) = b_n \frac{\lambda_m I_1(\lambda_m) J_0(\lambda_n) + \lambda_n J_1(\lambda_n) I_0(\lambda_m)}{\lambda_n^2 + \lambda_m^2},$$

$$S_2(n, n, k) = \frac{b_n}{2\lambda_n} (I_1(\lambda_n) J_0(\lambda_n) + J_1(\lambda_n) I_0(\lambda_n)),$$

$$\bar{S}_3(m, n, k) = b_n b_m \frac{\lambda_m I_1(\lambda_m) I_0(\lambda_n) - \lambda_n I_1(\lambda_n) I_0(\lambda_m)}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2},$$

$$\bar{S}_3(n, n, k) = \frac{b_n^2}{2} (I_1^2(\lambda_n) - I_0^2(\lambda_n)), \quad b_n = \frac{\cos \lambda_n \exp \lambda_n}{\operatorname{ch} \lambda_n},$$

где  $J_0, J_1, I_0, I_1$  — обычные и модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков. Нетривиальные решения уравнения (38) нормируются так, что выполняются условия (25), вид которых не зависит от значения  $k$ . Формы собственных колебаний  $\Psi_j = D^{-2}(k) \Phi_j$  удовлетворяют равенствам (27) в силу принятой нормировки (25).

Решение исходной задачи с усложненными краевыми условиями закрепления концов пластины ищется в виде (12), (28). Для коэффициентов  $a_n(t)$  справедливо уравнение (29), но теперь для его вывода используется условие ортогональности в форме (37). Формулы (30), (31) остаются без изменений при  $k \neq 0$ .

**Численные результаты.** Сравнение форм колебаний балки, находящейся в воздухе и на поверхности невесомой жидкости, проведено при значениях параметров  $\alpha = 0,2512$ ,  $\gamma = 0,1875$ ,  $\varkappa = 2,85$ , отвечающих условиям эксперимента [1]. Подтвержден тот факт, что соответствующие формы мало отличаются друг от друга. Главные формы колебаний совпадают, отличие вторых форм не превышает 8%, третьих — 7, а четвертых — 6%.

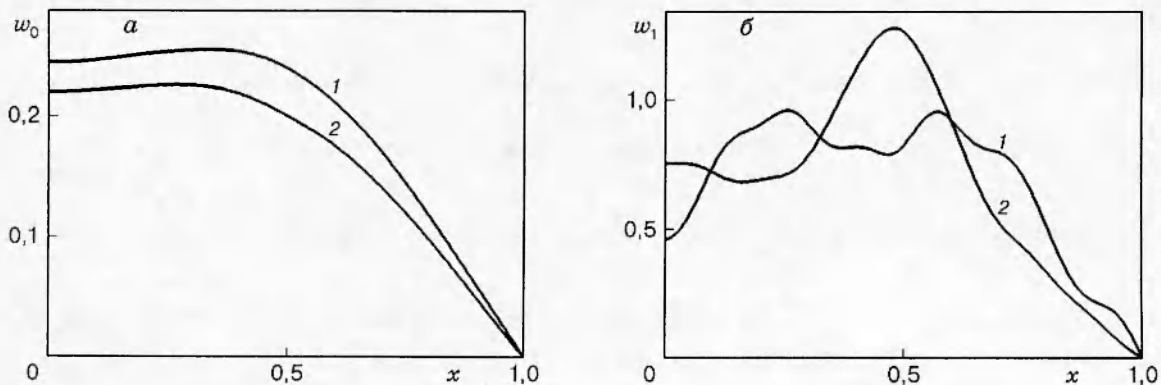


Рис. 2

Изучались эволюции прогиба, скорости и напряжений в центре балки ( $x = 0$ ) при  $\alpha = 2,85$ . Замечено, что прогиб в центре балки хорошо описывается несколькими первыми модами, чего нельзя сказать о напряжениях и скорости, имеющих высокочастотные пульсации. Однако распределения всех трех величин вдоль балки достаточно гладкие.

На рис. 2 приведены графики распределения прогиба (*a*) и скорости точек балки (*b*) в конце ударной стадии. Кривые 1 соответствуют шарнирному закреплению концов балки, а кривые 2 — упругому ( $\alpha = 2,85$ ). Расчеты упругих характеристик на стадии погружения проводились прямым суммированием рядов (32), (33). Оказалось, что при данных параметрах задачи достаточно ограничиться 15 членами рядов.

Эволюция прогиба в центре балки показана на рис. 3 сплошной линией, результаты экспериментов [1] — штриховой. Видно, что на начальном интервале времени, длительность которого приблизительно равна половине основного периода колебаний балки, лежащей на поверхности жидкости, результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На рис. 4 проведено сравнение расчетов напряжений в центре балки (кривая 1) и экспериментальных данных [7] (кривая 3). Видно, что результаты расчетов имеют ярко выраженные пики высокочастотных колебаний, которых нет на экспериментальной кривой. Однако процессы, происходящие с частотой, превышающей предельную частоту чувствительности датчика, учитываются при обработке экспериментальных данных в интегральном смысле. В расчетах это осуществляется с помощью процедуры усреднения по предельному периоду. В [7] отсутствуют данные о чувствительности используемого датчика, поэтому аналогичные данные взяты из работы [8]. В [8] для измерения напряжений в цилиндрической оболочке при ее ударе о воду использовался датчик, который регистрирует вибрации с частотой ниже 5 кГц, что соответствует периодам колебаний выше  $1,25 \cdot 10^{-3}$  с. Кривая 2 получена усреднением результатов расчетов по интервалу времени, равному  $2,1 \cdot 10^{-3}$  с, что соответствует предельной частоте чувствительности датчика 3 кГц и приводит к хорошему совпадению расчетной и экспериментальной кривых.

Важно отметить, что пороги чувствительности датчиков давления и датчиков относительных удлинений, используемых в экспериментах по удару упругих тел о поверхность жидкости, различаются на порядок. Так, в [7] применялись датчики давления с предельной частотой 100 кГц. На рис. 4 видно, что увеличение чувствительности датчика относительных удлинений может привести к изменению экспериментальной кривой 3 с появлением

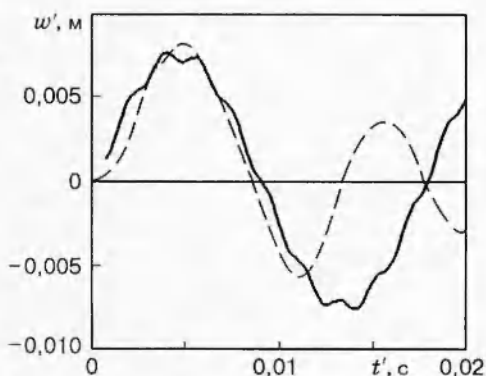


Рис. 3

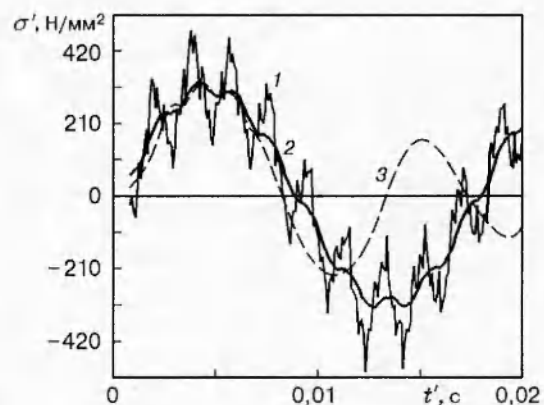


Рис. 4

значительных нерегулярных пульсаций. Расчеты давления в центре пластины на этапе погружения выявили его неравномерные пульсации в зависимости от времени, что соответствует гипотезе о невозможности использования вычисленных или измеренных значений давления при ударе для оценки упругих характеристик [7].

Расчеты максимальных напряжений в пластине и мест их достижения в каждый момент времени ( $0 < t < 2$ ) показали, что максимальные напряжения чаще всего достигаются либо в центре пластины, либо в точках закрепления, но иногда они возникают на участках ( $0,5 < |x| < 0,7$ ). Однако абсолютный максимум напряжений достигается в центре пластины, поэтому рис. 4 дает оценку максимальных напряжений во всей пластине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Faltinsen O. M.** Slamming // *Advances in Ship and Offshore Hydrodynamics* / Ed. by V. Bertram. 1996. N 561. P. 21-30.
2. **Григолюк Э. И., Горшков А. Г.** Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976.
3. **Лотов А. Б.** Об ударе упругой пластины о поверхность жидкости // *Тр. ЦАГИ*. 1935. Вып. 152. С. 32-46.
4. **Wagner H.** Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // *Z. angew. Math. Mech.* 1932. V. 12. H. 4. S. 193-215.
5. **Korobkin A. A.** Water impact problems in ship hydrodynamics // *Advances in Marine Hydrodynamics* / Ed. by M. Ohkusu. Southampton: Computational Mech. Publ., 1996. P. 323-371.
6. **Коробкин А. А.** Плоская задача о симметричном ударе волной по балке Эйлера // *ПМТФ*. 1998. Т. 39, № 5. С. 134-147.
7. **Faltinsen O. M., Kvålsvold J., Aarsnes J. V.** Wave impact on a horizontal elastic plate // *J. Marine Sci. and Technol.* 1997. V. 2, N 2. P. 87-100.
8. **Shibue T., Ito A., Nakayama E.** Structural response analysis of cylinders under water impact // *Proc. Intern. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology, Trondheim, Norway, May 25-27, 1994* / Ed. board: O. Faltinsen, C. M. Larsen, T. Moan, et al. Rotterdam, 1994. P. 221-228.

*Поступила в редакцию 20/VI 1997 г.*

---