ПМТФ, № 3, 1969

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СКИНОВЫЙ ВЗРЫВ ПРОВОДНИКА

Е. И. Биченков, А. Е. Войтенко

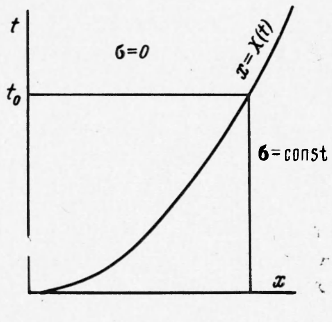
(Новосибирск)

Рассмотрена задача электрического взрыва проводника с плоской границей в сильном магнитном поле. Проведены оценки роли теплопроводности, позволяющие определить критические поля, в которых происходит плавление и испарение металла. Рассмотрены особенности взрыва слоистой среды.

Физическая картина взрыва проводника под действием тока большой плотности описана в работах [1,2]. В [2,3] произведен расчет в предположении, что ток распределен равномерно по сечению проводника. При быстрых процессах, когда время нарастания тока меньше эффективного времени проникновения магнитного поля в проводник («скинового» времени), взрывается тонкий поверхностный слой, и граница испарения движется внутрь проводника. В этом случае применение средних по сечению проводника характеристик уже неудовлетворительно отражает существо явления. Предположение, что фронт потери проводимости (граница испарения) движется в проводнике со скоростью звука [2], может быть принято тоже не всегда. Действительно, скорость нарастания скин — слоя, определяющая скорость движения тепловой волны в глубь проводника, пропорциональна $1 / \sqrt{t}$, т. е. рано или поздно станет меньше скорости звука. Начиная с этого момента, скорость движения фронта испарения будет определяться процессами диффузии магнитного поля, а не упругими свойствами проводника.

Ниже рассмотрено автомодельное распространение волны испарения, точнее волны потери проводимости, или волны деколлективизации электронов по терминологии работы [2]. Принято, что теплопроводность и движение среды несущественны, а проводимость не зависит от температуры вплоть до точки испарения, по достижении которой проводимость исчезает.

1. Автомодельная задача о взрыве проводника. Пусть в исходном состоянии проводник заполняет полупространство $0 \leqslant x < \infty$. Магнитное поле на границе проводника параллельно поверхности его и равно $H_0(t)$. В начальный момент времени поле в проводнике равно нулю. Проводимость σ постоянна вплоть до момента испарения t_0, когда единица объема проводника получает за счет нагрева током теплоту сублимации Q_0, после чего $\sigma = 0$. При этом в глубь проводника распространяется волна испарения, уравнение движения которой $x = X(t)$ неизвестно. При таких предположениях и пренебрежении токами смещения отыскание напряженности магнитного поля H в проводнике сводится к решению уравнения диффузии



Фиг. 1

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \qquad (1.1)$$

в области $t \geqslant 0$, $X(t) \leqslant x < \infty$ (фиг. 1) удовлетворяющего условиям

$$H(x, 0) = 0, \quad H(x, t)_{x=X(t)} = H_0(t), \qquad Q(x, t)_{x=X(t)} = Q_0 \qquad (1.2)$$

Здесь $Q(x, t)$ — тепло, выделившееся в единице объема проводника в процессе его нагрева током. Вообще говоря, точное решение задачи о нагреве проводника скин — током сводится к решению уравнения теплопроводности с джоулевыми источниками тепла мощностью

$$\frac{J^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \tag{1.3}$$

Но, как показано в [4], для металлических проводников можно пренебречь влиянием теплопроводности; это позволяет переписать последнее условие испарения (1.2) в виде

$$Q_0 = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\int\limits_0^{t_0}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 dt \tag{1.4}$$

Сформулированная задача допускает автомодельное решение при постоянных H_0 и Q_0. В этом случае из определяющих параметров задачи и переменных x, t можно составить безразмерные комбинации

$$\xi = \frac{\sqrt{\pi\sigma}\,x}{c\sqrt{t}}, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad \varepsilon = \frac{H_0^2}{8\pi Q_0} \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что решение задачи зависит лишь от одной переменной ξ. При этом уравнение (1.1) сводится к

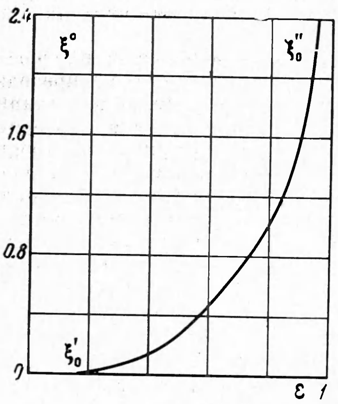
$$h'' = -2\xi h' \tag{1.6}$$

начальное условие (1.2) дает

$$h(\infty) = 0 \tag{1.7}$$

граничное условие (1.2) сводится к

$$h(\xi)_{x = X(t)} = 1 \tag{1.8}$$



Фиг. 2

На фронте волны испарения ξ равно некоторой неизвестной постоянной ξ_0, и уравнение движения фронта испарения

$$X(t) = \xi_0 \frac{c}{\sqrt{\pi\sigma}}\sqrt{t} \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.6) при условиях (1.7), (1.8)

$$h(\xi) = \frac{1 - \Phi(\xi)}{1 - \Phi(\xi_0)} \tag{1.10}$$

где $\Phi(\xi)$ — интеграл вероятности.

Условие испарения (1.4) позволяет найти значение ξ_0 в зависимости от параметра ε и тем самым вычислить скорость разрушения проводника. Подстановка (1.10) в (1.4) приводит в рассматриваемой автомодельной задаче к уравнению

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2}\frac{[1 - \Phi(\xi_0)]^2}{Ei(-2\xi_0^2)} \tag{1.11}$$

где $Ei(z)$ — интегральная показательная функция. График зависимости ξ_0 от ε приведен на фиг. 2, на которой обозначено

$$\xi_0' = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\exp\left(-\frac{\pi}{4\varepsilon}\right), \quad \beta = 1.781 \quad \text{при } \varepsilon \ll 1 \tag{1.12}$$

$$\xi_0'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \quad \text{при } \varepsilon \sim 1 \tag{1.13}$$

2. Минимальное поле, вызывающее испарение. Пределы применимости автомодельного решения. Полученное решение формально дает взрыв скин-слоя при любых малых магнитных полях H_0, хотя физически очевидно, что этого быть не может. Подобная ситуация возникла из-за пренебрежения теплопроводностью и представления условия испарения в упрощенном виде (1.4). Это нетрудно показать следующим образом. Как известно [5], толщина скин-слоя δ и плотность тока j у поверхности проводника соответственно будут

$$\delta \sim \frac{c\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\sigma}}, \qquad j \sim \frac{c}{4\pi}\frac{H_0}{\delta} \sim \frac{H_0}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{\sigma}{t}\right)^{1/2}$$

Пренебрегая теплопроводностью, нетрудно показать, что в единице объема у поверхности проводника за время от t_1 до t_2 выделится тепло

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \frac{j^2}{\sigma}\,dt \sim \frac{H_0^2}{4\pi}\ln\frac{t_2}{t_1} \tag{2.1}$$

и даже малые токи при $t_2 \to \infty$ приведут к достаточному нагреву и испарению проводника. Но нагрев в течение длительного времени даже при малой теплопроводности никак нельзя предполагать адиабатическим. Учет теплопроводности позволяет оценить критическое поле H^*, достаточное для начала взрыва, и тем самым установить пределы применимости полученного решения.

Изменение температуры, как и изменение магнитного поля в проводнике, описывается уравнением диффузии (1.1) с заменой коэффициента диффузии поля $D_m = c^2 / 4\pi\sigma$ на коэффициент температуропроводности $D_T = \varkappa / q$, где $\varkappa$ — теплопроводность, а q — теплоемкость единицы объема проводника. Согласно (1.9), толщина испаряющегося за время t слоя

$$\delta = \xi_0 \frac{c}{\sqrt{\pi\sigma}}\sqrt{t} \tag{2.2}$$

Характерное время τ установления теплового равновесия такого слоя с окружающей средой

$$\tau \sim \frac{\delta^2}{D_T} = \frac{4\xi_0^2 D_m}{D_T}\,t \tag{2.3}$$

Условие применимости адиабатического приближения при рассмотрении испарения скин-слоя $\tau > t$, приводит к $\xi_0^2 > D_T / 4D_m$; откуда для слабых полей после подстановки (1.12) нетрудно получить

$$H^* > 2\pi\left(\frac{Q_0}{\ln(2D_m / \beta D_T)}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Используя связь теплопроводности и электропроводности в соответствии с законом Видемана — Франца и, естественно, полагая температуру металла равной температуре кипения T_{**}, можно переписать полученную оценку минимального поля, достаточного для начала процесса испарения, в виде

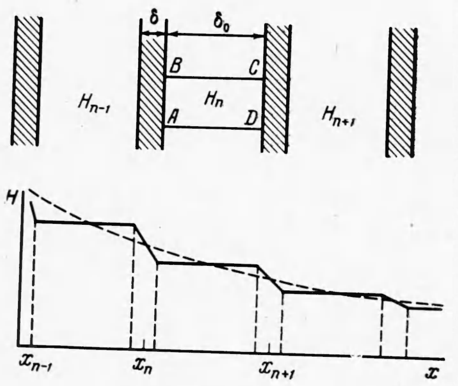
$$H^* > 2\pi\sqrt{Q_0}\left(\ln\frac{\pi}{6\beta}\left(\frac{ck}{e}\right)^2\frac{qT_{**}}{\varkappa^2}\right)^{-1/2} \tag{2.5}$$

Здесь e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана. Вычисления по (2.4) критических полей дают для меди $H^* > 1.5\cdot10^6$ *э*, для вольфрама $H^* > 1.9\cdot10^6$ *э* и для свинца $H^* > 0.66\cdot10^6$ *э*.

При магнитных полях $H \sim \sqrt{8\pi Q_0}$ полученное решение приводит к бесконечной скорости распространения волны плавления в глубь проводника. Понятно, что в таком случае начинают играть роль новые физические процессы, связанные со скоростью разлета испарившегося металла, которые существенно меняют картину явления. Действительно, в автомодельном решении принималось $Q_0 = \text{const}$, что возможно при постоянном давлении на границе испарения. Если же разлет паров металла происходит медленно по сравнению со скоростью движения фронта испарения, то давление на этом фронте возрастает с течением времени, что приводит к повышению температуры кипения и вместе с тем возрастанию Q_0 (эффект, наблюдавшийся в экспериментах И. Ф. Кварцхавы [6]). Возрастание Q_0 при заданном H_0 уменьшает параметр ε и ведет к установлению в связи с этим некоторой конечной скорости движения фронта испарения. Таким образом, задача об испарении проводника в очень сильных полях будет в основном гидродинамической и требует особого рассмотрения.

3. Плавление проводника. Аналогично решению задачи об испарении может быть рассмотрена автомодельная задача о плавлении проводника без изменения его проводимости. В этом случае граница проводника не меняется, а фронт плавления распространяется в глубь проводника и соответствует некоторому постоянному значению автомодельной переменной $\xi = \xi_1$. Существенное отличие в математической формулировке этой задачи от рассмотренной состоит в замене условия (1.8) на $h(0) = 1$, что приводит в (1.10) к обращению знаменателя в единицу и соответствующему изменению в (1.11). При этом оказывается, что

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{Ei(-2\xi_1^2)} \qquad (3.1)$$



Фиг. 3

Критическое поле $H_1{}^*$, вызывающее расплавление проводника, по-прежнему определяется (2.5) с заменой теплоты испарения Q_0 на теплоту плавления Q_1 и температуры кипения T_{**} на температуру плавления T_*. Величины критических полей составляют для меди $5.5 \cdot 10^5$ *э* и для свинца $1.6 \cdot 10^5$ *э*.

Согласно приведенным расчетам, импульсные соленоиды из меди могут выдерживать поля до $0.5 \cdot 10^6$ *э* без разрушения (если не говорить о возможных механических деформациях).

В полях $(0.5-1.5) \cdot 10^6$ *э* поверхность меди должна оплавляться с возможным образованием жидких струй. В полях выше $1.5 \cdot 10^6$ *э* наступает испарение меди, сопровождающееся повышением давления, образованием ударных волн и расширением паров.

4. Взрыв слоистого материала. Представляет интерес рассмотреть диффузию магнитного поля в слоистую среду, состоящую из перемежающихся слоев проводника и диэлектрика. Отвлекаясь от высокочастотной волновой картины, можно считать, что поле в каждом слое диэлектрика однородно, что при определенной величине продиффундировавшего через некоторый слой проводника потока приводит к уменьшению напряженности поля на внутренней поверхности проводящего слоя и, следовательно, к увеличению плотности тока в нем. В результате возрастает мощность нагрева проводника и испарение его наступает раньше.

Нетрудно получить уравнение, описывающее диффузию поля в слоистую среду, если предположить, что толщина проводящего слоя δ и расстояния между слоями δ_0 малы. Пусть поле в n-м слое диэлектрика $H_n(t)$, а диэлектрическая постоянная равна единице. Закон электромагнитной индукции для прямоугольного контура $ABCD$, границы которого AB и CD проходят по внутренней поверхности n-го и по внешней поверхности $(n+1)$-го слоев проводника (фиг. 3), можно записать в виде

$$\frac{1}{c}\,\delta_0\frac{\partial H_n}{\partial t}=\frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{CD}-\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{AB}\right) \tag{4.1}$$

При малых δ можно определить значение производной $\partial H/\partial x$ на границах AB и CD проводников, воспользовавшись разложением поля в n-м и $(n+1)$-м слоях проводника в ряд Тейлора и ограничившись тремя первыми членами этого ряда. Так, для определения $(\partial H/\partial x)_{AB}$ имеем

$$H_{n-1}=H_n-\delta\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{AB}+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_{AB}$$

В силу уравнения диффузии поля в n-й слой проводника и непрерывности H на границе AB

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_{AB}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial H_n}{\partial t},\qquad \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{AB}=\frac{H_n-H_{n-1}}{\delta}+\frac{\delta}{2}\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial H_n}{\partial t}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{CD}=\frac{H_{n+1}-H_n}{\delta}-\frac{\delta}{2}\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial H_n}{\partial t}$$

и подстановка найденных значений $\partial H/\partial x$ на границах в (4.1) приводит к

$$(\delta_0+\delta)\frac{\partial H_n}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{\delta}\left(H_{n+1}+H_{n-1}-2H_n\right) \tag{4.2}$$

Заменяя ступенчатое распределение поля в диэлектрике некоторым непрерывным $H(x, t)$ (показано на фиг. 3 пунктиром), принимающим в центре n-го слоя диэлектрика значение $H_n(t)$, и полагая $(\delta_0+\delta)$ малым, можно переписать (4.2) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\delta_0+\delta}{\delta}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \tag{4.3}$$

т. е. диффузия поля в слоистую среду в первом приближении соответствует диффузии поля в сплошной проводник с проводимостью

$$\sigma_c=\alpha\sigma,\qquad \alpha=\frac{\delta}{\delta_0+\delta}$$

Здесь α — степень заполнения слоистой среды проводником. Плотность тока в n-м слое проводника с той же степенью точности

$$J_n=\frac{c}{4\pi}\frac{H_n-H_{n-1}}{\delta}=\frac{c}{4\pi}\frac{\delta_0+\delta}{\delta}\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x_n} \tag{4.4}$$

и условие испарения

$$Q_0=\int\limits_0^{t_0}\frac{J^2}{\sigma_c}\,dt=\frac{1}{\alpha}\frac{c^2}{16\pi^2\sigma_c}\int\limits_0^{t}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2_{\!x}d. \tag{4.5}$$

соответствует условию испарения сплошного проводника (1.4) с проводимостью σ_c и $Q_c = \alpha Q_0$.

Как и в п. 1 можно поставить автомодельную задачу взрыва слоистой среды. Решение ее описывается формулами (1.9) — (1.11) с заменой σ, ε, ξ_0 на эффективные характеристики слоистой среды, определяемые соотношениями

$$\sigma_c = \alpha\sigma, \qquad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \qquad \xi_{0c} = \xi_0\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \tag{4.6}$$

Отношение испаренной массы проводника M_c в случае слоистой среды к испаренной за то же время массе M сплошного проводника при заданной напряженности поля на границе среды

$$\frac{M_c}{M} = \frac{\alpha X_c(t)}{X(t)} = \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^{1/2}\frac{\xi_{0c}}{\xi_0} = \sqrt{\alpha}\,\frac{\xi_0(\varepsilon/\alpha)}{\xi_0(\varepsilon)} \tag{4.7}$$

При малых ε и ε/α в силу (1.12)

$$\frac{M_c}{M} = \sqrt{\alpha}\exp\frac{\pi(1-\alpha)}{4\varepsilon} \tag{4.8}$$

При $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 1/5$, например, получаем $M_c / M \approx 8$.

Времена разрушения определенной массы проводника при заданном внешнем поле связаны соотношением

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \alpha\frac{\xi_0^2(\varepsilon/\alpha)}{\xi_0^2(\varepsilon)} \tag{4.9}$$

При малых ε и ε/c

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \alpha\exp\frac{\pi(1-\alpha)}{2\varepsilon} \tag{4.10}$$

Для $\alpha = 1/3$ и $\varepsilon = 1/5$ это отношение оказывается равным ~ 64, т. е. взрыв слоистого проводника произойдет в десятки раз быстрее.

Авторы выражают благодарность Л. М. Баркову за обсуждение изложенных вопросов.

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чейс В. Краткий обзор исследований по взрывающимся проволочкам. В сб. «Взрывающиеся проволочки», М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Протопопов Н. А., Кульгавчук В. М., К теории механизма возникновения паузы тока и ударных волн при нагреве металла импульсами электрического тока большой плотности. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 5, стр. 557.
3. Maisonnier Ch., Linhart J. G., Gourlan C. Rapid transfer of magnetic energy by means of exploding foils. Rev. Scient. Instrum., 1966, vol. 37, No. 10. (Рус. перев.: Мезонье, Линхарт, Гурлан. Быстрая передача энергии с помощью взрывающихся фольг. Приборы для научных исследований, 1966, № 10.)
4. Furth H. P., Levine M. A., Waniek R. W. Production and use of high transient magnetic fields. Rev. Scient. Instrum., 1957, vol. 28, No. 11.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика слошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
6. Кварцхава И. Ф., Бондаренко В. В., Плютто А. А., Чернов А. А. Электрический взрыв металлических проволок. ЖЭТФ, 1956, т. 30, вып. 1.