Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 6

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА ДЛЯ ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ И ИЗНОСА

УДК 539.3

Ю. А. Пырьев, Д. В. Грилицкий

Львовский государственный университет им. И. Франко, 290602 Львов

Механическое взаимодействие деталей машин неизбежно сопровождается трением и их изнашиванием. Проблемы трения и износа являются фундаментальным аспектом обеспечения высокой производительности, надежности и долговечности машин и механизмов. Важное место занимает проблема исследования неустойчивости контактных параметров (давления, температуры, термоупругих деформаций, износа и др.), что приводит к нарушению нормальной работы трибосопряжения.

Цель данной работы — построение и анализ нестационарного решения задачи термоупругого контакта цилиндра с жесткой обоймой в условиях фрикционного разогрева и абразивного износа, а также исследование характерных особенностей этой модели, в частности термоупругой неустойчивости (ТУН). На этой модельной задаче в [1] при пренебрежении теплообразованием проанализировано влияние различных видов коэффициентов изнашивания на величину износа. Исследование ТУН в конструкциях типа радиальных уплотнителей в условиях отсутствия износа проведено в [2]. Особенности характеристик термоупругого контакта изучались в [3] на примере двух контактирующих цилиндров при их относительном вращении. Задачи фрикционного контакта рассматривались, как правило, при заданных сжимающих усилиях и в стационарной постановке [4, 5].

Будем предполагать, что область контакта и геометрия контактирующих тел таковы, что можно принять одномерную модель. Применение одномерных моделей оправдано возможностью проследить на них характерные моменты, присущие реальным узлам трения [1, 5, 6].

1. Постановка задачи. Упругий теплопроводящий цилиндр радиуса r_0 вставлен с натяжением u_0 в жесткую обойму (рис. 1). Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z. В области контакта цилиндра с обоймой возникает сила трения $F = 2\pi r_0 f p$, и как следствие происходит тепловыделение и изнашивание его поверхности. Принимаем закономерность абразивного износа согласно [1, 7]. Между цилиндром и обоймой происходит теплообмен по закону Ньютона.

В нашем случае, когда перемещение цилиндра по оси z равно нулю, а перемещения u_r являются функцией только времени t и радиальной координаты r, надо определить температуру $\theta(r,t)$, контактное давление $p(t)$ и износ цилиндра $u_w(t)$.

Для решения задачи необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений квазистатической несвязанной термоупругости [8]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_r(r,t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u_r(r,t) - \frac{1}{r^2} u_r(r,t) = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\theta(r,t), \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\theta(r,t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\theta(r,t) = k^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\theta(r,t), \quad r \in (0,r_0), \quad t \in (0,t_c)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

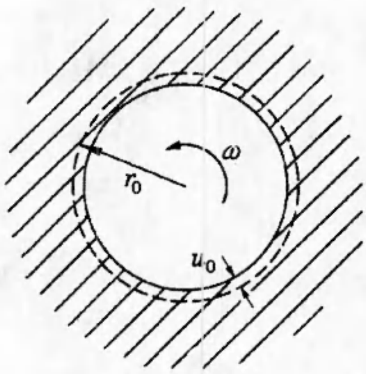

Рис. 1

при механических условиях

$$u_r(0,t) = 0, \quad u_r(r_0,t) = -u_0 + u_w(t), \quad t \in (0,t_c), \tag{1.2}$$

тепловых

$$2\pi r\lambda \frac{\partial}{\partial r}\theta(r,t) \to 0, \quad r \to 0, \quad \lambda \frac{\partial}{\partial r}\theta(r_0,t) + \alpha_\theta\theta(r_0,t) = f\omega r_0 p(t), \quad t \in (0,t_c) \tag{1.3}$$

и начальных условиях

$$\theta(r,0) = 0, \quad r \in (0,r_0). \tag{1.4}$$

Износ цилиндра, пропорциональный работе сил трения [1, 7],

$$u_w(t) = K_w\omega r_0 \int\limits_0^t p(\eta)d\eta, \quad 0 < t < t_c. \tag{1.5}$$

Радиальные напряжения для цилиндра определяются по формуле

$$\sigma_r = \frac{E}{1-2\nu}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{1}{r}u_r - \alpha\theta\right].$$

В (1.1)–(1.5) E — модуль Юнга; ν, λ, k, α, f, α_θ, K_w — коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности, температурного расширения, трения, теплообмена, износа материала цилиндра; $p(t) = -\sigma_r(r_0,t)$ — контактное давление. Время контакта t_c определяется как время, при котором контактное давление неотрицательно, т. е. $p(t) \geqslant 0$ при $t \in (0,t_c)$.

2. Представление решения. Введем безразмерные величины

$$R = r/r_0, \quad \tau = t/t_*, \quad \Omega = 2E\alpha k/[\lambda(1-2\nu)], \quad v = \omega f\Omega/\omega_*, \quad \tau_c = t_c/t_*,$$
$$\mathrm{Bi} = \alpha_\theta r_0/\lambda, \quad \xi = K_w E_1/f\Omega, \quad E_1 = E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$$

и характерные параметры

$$t_* = \omega_*^{-1} = r_0/k^2, \quad p_* = E_1 u_0/r_0, \quad \theta_* = u_0/[2\alpha(1+\nu)r_0].$$

С помощью интегрального преобразования Лапласа [9] решение граничной задачи (1.1)–(1.5) запишем в виде

$$\theta(R,\tau) = \theta_* v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(R,s_m)}{\Delta'(s_m)} \exp(s_m\tau), \quad p(\tau) = p_* v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(s_m)}{s_m\Delta'(s_m)} \exp(s_m\tau), \tag{2.1}$$

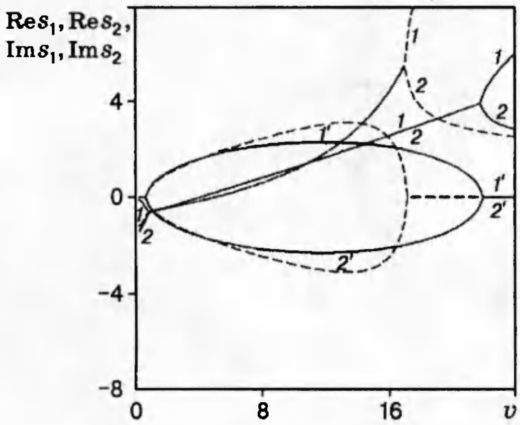

Рис. 2

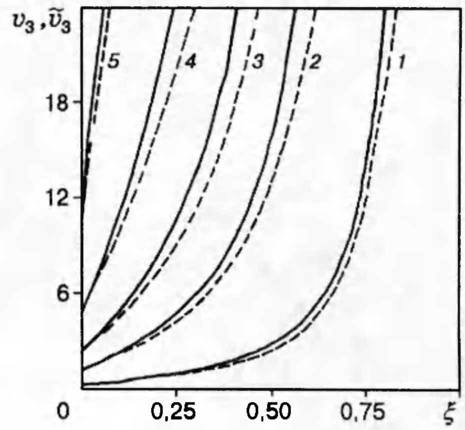

Рис. 3

$$u_w(\tau) = u_0 \left[1 + v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi \Delta_1(s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} \exp(s_m \tau)\right],$$

где

$$\Delta'(s_m) = \frac{d}{ds}\Delta(s)\Big|_{s=s_m} = 0{,}5\Big\{D_m[(\mathrm{Bi}+2)s_m + v\xi\mathrm{Bi}] + C_m[2\mathrm{Bi} + s_m + v(\xi-1)]\Big\};$$

$\Delta_1(s_m) = \mathrm{Bi}\, C_m + s_m D_m$; $\Delta_3(R, s_m) = I_0(R\sqrt{s_m}\,)$; $\Delta_2(s_m) = s_m D_m - \xi\Delta_1(s_m)$; $\Delta(s) = s\Delta_1(s) - v\Delta_2(s)$; $D_m = I_1(\sqrt{s_m}\,)/\sqrt{s_m}$; $C_m = I_0(\sqrt{s_m}\,)$; $m = 1,\ 2$; $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода n-го порядка; s_m — корни характеристического уравнения $\Delta(s) = 0$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$. Исследования показывают, что, как правило, $\mathrm{Im}\, s_m = 0$ при $m = 3,\ 4,\ \ldots$, а при $m = 1,\ 2$ корни в зависимости от параметров задачи лежат в правой или левой комплексной полуплоскости s.

Если $\xi < \xi_1$ $(\xi_1 = 1/(1 + \mathrm{Bi}/2))$, корни при $v < v_2$ отрицательные, при $v_2 < v < v_1$ комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью, при $v_1 < v < v_3$ комплексно-сопряженные с положительной действительной частью, при $v_3 < v$ положительные. Зависимости действительной и мнимой части корней s_1 и s_2 от безразмерной скорости v представлены на рис. 2 сплошными линиями ($\xi = 0{,}4$, $\mathrm{Bi} = 1$). Кривые *1* и *1'* (*2* и *2'*) соответствуют действительной и мнимой части корня s_1 (s_2).

При $\xi > \xi_1$ корни s_1 и s_2 всегда лежат в левой комплексной полуплоскости s, причем при $v < v_2$ они отрицательные, при $v_2 < v < v_3$ комплексно-сопряженные, при $v_3 < v < v_4$ опять отрицательные, при $v_4 < v$ корни s_2 и s_3 комплексно-сопряженные, а корень s_1 отрицательный. Таким образом, при $v = v_m$ $(m = \overline{1,4})$ меняются свойства корней характеристического уравнения.

Зависимость скорости v_3 от параметра ξ для разных значений Bi представлена на рис. 3 сплошными линиями. Кривые *1*–*5* соответствуют $\mathrm{Bi} = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ 5{,}0$.

С величиной $\pi/\mathrm{Im}\, s_1$ можно связать время контакта τ_c: чем больше $\mathrm{Im}\, s_1$, тем меньше время контакта. Величина $\mathrm{Re}\, s_1 > 0$ отображает закономерность возрастания характеристик контакта и их экстремальные значения.

Раскладывая функцию $\Delta(s)$ в окрестности нуля в степенной ряд, для малых значений

s корни s_1 и s_2 можно записать в виде

$$s_{1,2} = \frac{v(1-\xi/\xi_1) - v_0 \pm \sqrt{v^2(1-\xi)^2 - 2vv_0(1+\xi/\xi_1) + v_0^2}}{2/\xi_1 - v(1-\xi/\xi_2)/4}, \quad \xi_2 = (1 + \mathrm{Bi}\,/4)^{-1}, \ v_0 = 2\mathrm{Bi}. \tag{2.2}$$

Изменение действительной и мнимой части приближения корней s_1 и s_2 в зависимости от безразмерной скорости v приведено на рис. 2 ($\xi = 0{,}4$, $\mathrm{Bi} = 1$) штриховыми кривыми.

Соотношения (2.2) позволяют написать приближенные выражения для значений v_m, $m = 1, 2, 3$. Так, $v_m \approx \tilde{v}_m$, $m = 1, 2, 3$, где

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_0\xi_1}{\xi_1 - \xi}, \quad \tilde{v}_m = v_0\frac{1 + \xi/\xi_1 \mp 2\sqrt{\xi(1+\xi\mathrm{Bi}/4)/\xi_2}}{(1-\xi)^2}, \quad m = 2, 3.$$

Зависимость безразмерной скорости $\tilde{v}_3$ от параметра ξ для разных значений Bi представлена на рис. 3 штриховыми линиями. Кривые *1–5* соответствуют $\mathrm{Bi} = 0{,}1$; $0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}0$; $5{,}0$.

3. Анализ решения. С учетом свойств [9] трансформант Лапласа решений получены асимптотики характеристик термоупругого контакта в начальный момент времени:

$$\theta(1,\tau)/\theta_* = v2\sqrt{\tau/\pi} + O(\tau^{1,5}), \quad p(\tau)/p_* = 1 + v(1-\xi)\tau + O(\tau^2), \quad u_w(\tau)/u_0 = v\xi\tau + O(\tau^2).$$

Проанализируем частные случаи. При отсутствии теплоотдачи ($\mathrm{Bi} = 0$) контактное давление и износ для произвольного момента времени приобретают простой вид

$$p(\tau)/p_* = \exp[-v(\xi-1)\tau], \quad u_w(\tau)/u_0 = \xi\Big\{1 - \exp[-v(\xi-1)\tau]\Big\}/(\xi-1),$$

при идеальной теплоотдаче ($\mathrm{Bi} = \infty$)

$$p(\tau)/p_* = \exp(-\beta\tau), \quad u_w(\tau)/u_0 = 1 - \exp(-\beta\tau), \quad \beta = v\xi.$$

Такой же вид имеют характеристики контакта при малых скоростях относительного движения, если пренебречь тепловыделением ($f \to 0$).

Приведем результаты исследований данной задачи на основе анализа решений (2.1) и поведения корней характеристического уравнения. Параметр $\xi = \lambda K_w/2f\alpha k(1+\nu)$ характеризует иерархию износа и теплового расширения.

В случае отсутствия износа ($\xi = 0$) при скорости v меньше критической v_0 со временем контактное давление и температура выходят на стационарный режим:

$$p_c = p_*v_0/(v_0 - v), \quad \theta_c(R) = \theta_*2v/(v_0 - v),$$

поскольку генерация тепла и его теплоотдача в системе взаимокомпенсируются. При скорости v выше критической v_0 происходит рост температуры и контактного давления по экспоненциальному закону. Система не успевает охлаждаться, и наступает фрикционная ТУН, т. е. при незначительном внешнем возбуждении системы (в нашем случае — сжатии вращающегося цилиндра) происходит экспоненциальное возрастание температуры и контактного давления.

При $0 < \xi < \xi_1$, т. е. когда тепловое расширение превышает износ и $v \leqslant v_2$, время контакта $\tau_c = \infty$ и характеристики контакта со временем стремятся к своим стационарным значениям: $p_c = 0$, $\theta_c(R) = 0$, $u_w = u_0$. Чем ближе v к v_2, тем больше увеличивается время выхода на стационарный режим. При $v_2 < v < v_3$ время контакта ограничено. Ми-

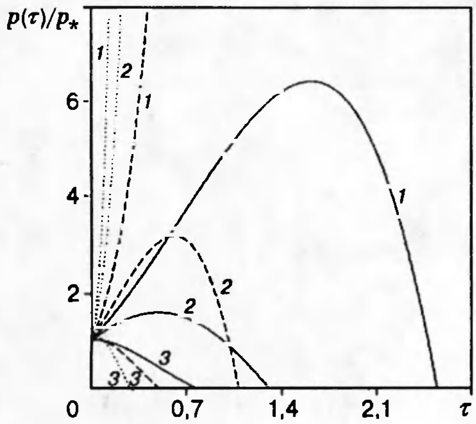

Рис. 4

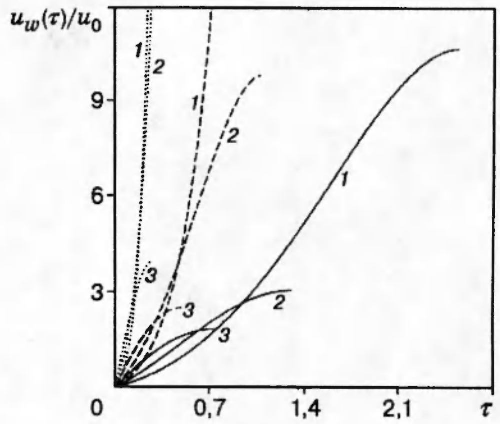

Рис. 5

нимальное время контакта будет при скоростях $v \approx (v_2 + v_3)/2$, т. е. когда максимальное значение приобретает величина $\mathrm{Im}\, s_1$. При приближении скорости v к v_3 максимальные значения характеристик контакта увеличиваются. При скорости v больше критической v_3 (области выше соответствующих кривых на рис. 3) наблюдается фрикционная ТУН, т. е. характеристики контакта экспоненциально возрастают по закону $\exp(s_1\tau)$.

При $\xi \geqslant \xi_1$, т. е. когда износ больше температурного расширения и $v \leqslant v_2$, характеристики контакта со временем стремятся к стационарному решению задачи. При $v \geqslant v_2$ ($\mathrm{Bi} > 0$) время контакта τ_c ограничено, несмотря на то что формально стационарное решение существует. С ростом скорости скольжения время контакта уменьшается.

Контактное давление при $\xi \geqslant 1$ всегда монотонно стремится к нулю в отличие от случая $0 < \xi < 1$, когда оно при отсутствии термоупругой неустойчивости имеет максимум.

4. Результаты расчетов. Для иллюстрации теоретических исследований поведения характеристик контакта проведен численный анализ решения задачи для разных значений коэффициента ξ, который характеризует величину износа, и разных скоростей v; параметр $\mathrm{Bi} = 1$ ($\xi_1 = 0{,}67$).

Значения параметров обезразмеривания в случае стального цилиндра ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, $\lambda = 21$ Вт/(м · °C), $k = 5{,}9 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $\nu = 0{,}3$, $E = 190 \cdot 10^9$ Па) при $r_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ м, $u_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ м следующие: $t_* = 153$ с, $p_* = 1{,}22 \cdot 10^7$ Па, $\theta_* = 0{,}92$ °C.

На рис. 4 и 5 показаны зависимости контактного давления $p(\tau)/p_*$ и износа $u_w(\tau)/u_0$ от безразмерного времени τ (числа Фурье). Сплошные кривые соответствуют безразмерной скорости $v = 5$, штриховые — $v = 10$, пунктирные — $v = 25$. Кривые *1–3* отвечают $\xi = 0{,}2$; 0,4; 0,8.

При $\xi = 0{,}2$ $v_3 = 8$, $v_2 = 0{,}9$, $v_1 = 2{,}7$ ($\tilde v_3 = 7{,}3$, $\tilde v_2 = 0{,}9$, $\tilde v_1 = 2{,}9$). При $v > v_3$ наступает ТУН (штриховые и пунктирные кривые).

При $\xi = 0{,}4$ $v_3 = 21{,}9$, $v_2 = 0{,}65$, $v_1 = 4{,}1$ ($\tilde v_3 = 17{,}1$, $\tilde v_2 = 0{,}65$, $\tilde v_1 = 5$). ТУН наблюдается при $v > v_3$ (пунктирные кривые). С ростом скорости время контакта уменьшается, максимальные значения контактного давления и температуры увеличиваются, возрастает износ.

При $\xi = 0{,}8$ для всех значений скорости v ТУН отсутствует. С ростом скорости время контакта уменьшается, увеличиваются максимальное значение контактной температуры и износ.

При фиксированной скорости рост коэффициента износа ξ приводит к уменьшению времени контакта, более интенсивному росту износа на начальном этапе и к уменьшению окончательной величины износа, а также к уменьшению времени контакта.

Подытожим некоторые результаты.

1. В явном виде построено и проанализировано решение пространственно одномерной задачи фрикционного контакта.

2. Определены условия возникновения фрикционной термоупругой неустойчивости: $\mathrm{Bi} \in [0, \infty)$, $\xi \in [0, \xi_1)$, $v \in [v_3, \infty)$.

3. Учет износа приводит к тому, что критическое значение скорости v_3, при которой возникает термоупругая неустойчивость, возрастает, а при $\xi > \xi_1$, т. е. когда преобладает износ над термоупругим расширением, фрикционная ТУН вообще исчезает. Таким образом, для данной модели износ выступает стабилизирующим фактором, что подтверждает результаты [2].

4. Для данной модели фрикционного контакта ТУН возникает тогда, когда нули характеристического уравнения расположены не только в правой комплексной полуплоскости параметра преобразования Лапласа $s\,(v > v_1,\ \xi < \xi_1)$, но и тогда, когда имеют нулевую мнимую часть $(v \geqslant v_3)$. Последнее условие отличает полученные условия от общепринятых.

5. Определены аналитические выражения для характерных скоростей, что позволяет прогнозировать поведение во времени характеристик фрикционного контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горячева И. Г., Добычин М. Н.** Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988.
2. **Моров В. А.** Анализ термоупругой неустойчивости в трибосистемах типа подвижных уплотнителей при осесимметричном возмущении // Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата: Сб. науч. тр. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1985.
3. **Гриліцький Д. В., Кульчицький-Жигайло Р. Д.** Плоска контактна задача термопружності для двошарового круглого порожнистого циліндра з теплоутворенням // Физ.-хим. механика материалов. 1994. № 6. С. 24–30.
4. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей // ПМТФ. 1985. № 3. С. 129–131.
5. **Александров В. М., Аннакулова Г. К.** Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11, № 1. С. 24–28.
6. **Коровчинский М. В.** Основы теории термического контакта при локальном трении. Ч. 1 //Новое в теории трения. М.: Наука, 1966.
7. **Archard J. F.** The temperature of rubbing surfaces // Wear. 1959. V. 2, N 6. P. 438–455.
8. **Коваленко А. Д.** Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975.
9. **Мартыненко В. С.** Операционное исчисление. Киев: Вища шк., 1973.

Поступила в редакцию 21/VIII 1995 г.