

УДК 532.526

## КОМБИНАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Н. М. Терехова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Для объяснения динамики неустойчивых волн, возникающих при введении в сверхзвуковой пограничный слой контролируемых возмущений большой интенсивности, использована нелинейная модель взаимодействия возмущений в режиме парных комбинационных связей. Модель включает эффекты самовоздействия и комбинационного взаимодействия волн. Установлено, что в рамках рассматриваемой модели второго порядка малости можно достаточно точно описать продольную динамику плоских волн.

**Введение.** В настоящей работе теоретически анализируется ситуация, возникающая при введении в пограничный слой на пластине при числе Маха  $M = 2$  контролируемых возмущений достаточно большой интенсивности [1]. Авторы [1] назвали эволюцию таких возмущений вниз по потоку “аномальной”, так как она значительно отличается от наблюдавшейся ранее эволюции малых колебаний. Установлено, что наиболее неустойчивы квазидвумерные возмущения. В начальном спектре фиксируются два волновых пакета с кратными частотами (частотой субгармоники  $f_1 = 10$  кГц и основной частотой  $f_2 = 20$  кГц), доминирует пакет с частотой  $f_1$ , наибольший вклад в интенсивность возмущений дает плоская волна. Вниз по потоку преимущественно двумерный характер волновых спектров не меняется, что является необычным, так как согласно линейной теории инкременты трехмерных волн значительно превосходят инкременты плоских. Наблюдается существенное усиление возмущений с частотой  $f_1$  (почти в 10 раз); усиление возмущений с основной частотой  $f_2$  несколько меньше, но все же значительно больше линейного. Это приводит к тому, что расстояние от передней кромки до точки ламинарно-турбулентного перехода уменьшается на 20 %. Зафиксировано значительное стационарное искажение профиля средней скорости поперек пограничного слоя: увеличение его наполненности в пристенной области и уменьшение во внешней, что приводит к увеличению толщины пограничного слоя. Высказано предположение о том, что описанные результаты эксперимента обусловлены влиянием стационарного вихря, генерируемого источником контролируемых пульсаций. Установлено также, что фазовые скорости возмущений на 30–40 % больше линейных. Авторы [1] делают вывод о том, что наблюдаемые особенности вызваны нелинейным характером развития возмущений. Причины, вызывающие появление таких аномалий, не установлены.

Целью данной работы является попытка объяснить перечисленные выше особенности нелинейным взаимовлиянием собственных бегущих возмущений Толлмина — Шлихтинга без введения в рассмотрение стационарных вихрей, которые пока теоретически не описаны. Анализ проведен в рамках слабонелинейной теории устойчивости, которая применяется для объяснения динамики возмущений на ранних стадиях нелинейности. В этой теории

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00828).

известны две апробированные модели: модель взаимодействия в резонансных триадах и более высокая по порядку малости модель парных комбинационных взаимодействий.

В экспериментах [2, 3] и расчетах [4] показано, что в сверхзвуковом пограничном слое при невысоком уровне контролируемых возмущений реализуется субгармоническая неустойчивость, описать которую можно в рамках резонансных взаимодействий триплетов волн. При этом в спектре возмущений преобладают трехмерные моды, а заполнение его представляет собой каскадный процесс выделения трехмерных субгармоник в параметрической области. Известно, что в дозвуковом пограничном слое эффективность резонансных взаимодействий с ростом интенсивностей или амплитуд пульсаций ослабевает. Подобная закономерность присуща и сверхзвуковому пограничному слою для условий экспериментов [1], однако подробное обсуждение резонансной модели не является целью работы.

В настоящей работе рассмотрена нелинейная эволюция возмущений большой интенсивности в рамках модели парных комбинационных взаимодействий плоских двумерных волн. Условием реализации комбинационного типа взаимодействия является достаточно большое значение амплитуды волны. При этом возможно как самовоздействие волны, так и комбинационное взаимодействие двух и более волн. Такой нелинейный механизм может быть как альтернативным, так и дополнительным к резонансному в процессе перераспределения энергии в амплитудно-частотном спектре возбужденного потока. Важность изучения таких взаимодействий обусловлена также возможностью реализации их в процессе выделения детерминированной частоты при эволюции пакетов волн различной природы, например бегущих и стационарных вихревых, что может оказать воздействие на весь процесс возбуждения волн с частотами, которые могут не быть кратными и могут не удовлетворять условиям фазового синхронизма.

В настоящей работе в рамках слабонелинейной теории устойчивости изучены особенности реализации комбинационного механизма взаимодействия двух плоских волн. Следует отметить, что моделирование нелинейности в дозвуковых пограничных слоях также начиналось с изучения эффектов самовоздействия волн конечной интенсивности [5, 6].

Обозначим через  $\varepsilon$  масштаб пульсационного поля. Тогда рассматриваемый механизм можно описать по следующей схеме. Самовоздействие волны порядка  $\varepsilon^2$  приводит к генерации нулевых вторичных гармоник, вызывающих искажение среднего поля потока, и индукцированию обертонов с удвоенной фазой. При комбинационном взаимодействии двух волн могут образовываться суммарные и разностные вторичные гармоники. В третьем порядке по  $\varepsilon$  взаимодействие вторичных волн с исходными возмущениями определяет нелинейную эволюцию амплитуд первичных колебаний.

Описанная эволюция изучается на основе интегрирования амплитудных уравнений, в основе которых лежит известное уравнение Ландау [7, 8]. Таким образом, механизм парного взаимодействия  $O(\varepsilon^3)$  имеет более высокий порядок нелинейности по сравнению с резонансным механизмом  $O(\varepsilon^2)$ . Рассмотрим все составляющие такого взаимодействия.

**Основные формулы и методы решения.** Исходные положения нелинейной модели для сжимаемых пограничных слоев подробно изложены в [4]. Следуя [4], рассмотрим возмущенное поле скоростей  $u, v$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$  и температуры  $T_0$  сжимаемого газа

$$\begin{aligned} u &= U(Y) + \varepsilon u', & v &= \varepsilon v', & \rho_0 &= \rho(Y) + \varepsilon \rho', \\ p_0 &= P + \varepsilon p', & T_0 &= T(Y) + \varepsilon \Theta', & p'/P &= \varrho'/\rho + \Theta'/T \end{aligned} \quad (1)$$

в безразмерной системе координат  $X = x/\delta$ ,  $Y = y/\delta$ ,  $\delta = \sqrt{\mu_e x / (U_e \rho_e)}$ , где  $\delta$  — толщина пограничного слоя;  $\mu$  — динамическая вязкость; индекс  $e$  соответствует параметрам на внешней границе  $y \geq \delta$ ; величины со штрихами и без штрихов — пульсационные и средние компоненты соответствующих величин; масштабный параметр  $\varepsilon \ll 1$ . Обезразмеривание

проведено параметрами потока на внешней границе. Введем число Рейнольдса, полученное по этим параметрам:  $Re = \sqrt{x\rho_e U_e/\mu_e}$ . Следует отметить, что безразмерные значения продольной координаты  $X$  совпадают со значением  $Re$ .

Стационарные невозмущенные профили  $U$ ,  $\rho$ ,  $T$  находятся по методике [9], причем  $T = 1/\rho$ .

Решение строится методом разложения по малому параметру  $\varepsilon$  и двухмасштабному разложению координаты  $x$ . Помимо “быстрого” масштаба  $X$  вводится “медленный” масштаб  $\xi = \varepsilon X$ , характеризующий разность скоростей изменения фазы и амплитуды возмущений. Необходимость введения “медленного” масштаба обусловлена большим различием указанных скоростей ( $\partial/\partial x = \partial/\partial X + \varepsilon\partial/\partial\xi$ ). Будем искать решения для волн следующего вида:

$$u'_j = A_j(\xi)u_j(Y) \exp(i\theta_j) + A_{-j}(\xi)u_{-j}(Y) \exp(-i\theta_j), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где  $u'_j$  — продольная компонента скорости;  $A_j$  — медленно меняющаяся по продольной координате амплитуда;  $u(Y)$  — собственная амплитудная функция; второе слагаемое — комплексно-сопряженная величина;  $\theta = \alpha X - \omega t$ ;  $\alpha = \alpha^r + i\alpha^i$ ;  $\alpha^r$  — волновое число;  $\alpha^i$  — инкремент;  $\omega = 2\pi f$ . Индекс  $j = 1$  соответствует возмущениям с частотой субгармоники  $f_1$ ,  $j = 2$  — возмущениям с основной частотой  $f_2$ .

Введем исходные переменные, относительно которых будем искать решения, в виде вектора

$$\mathbf{z}^k = |u, u_Y, v, p, \Theta, \Theta_Y|, \quad u_Y = \frac{du}{dY}, \quad \Theta_Y = \frac{d\Theta}{dY}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Подставляя (1), (2) в полную систему уравнений движения и сохранения для сжимаемого газа [9], в рамках слабонелинейной теории получим исходную систему для возмущений (индекс  $j$  опущен)

$$L^k(\exp(i\theta)z^k) = F^k, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L^1(\exp(i\theta)z^1) &\equiv [z^2 - z_Y^1] \exp(i\theta) = 0, \\ L^2(\exp(i\theta)z^2) &\equiv [\rho((-i\omega + i\alpha U)z^1 + U_Y z^3) + i\alpha z^4 - (\mu/Re)z_Y^2] \exp(i\theta) = 0, \\ L^3(\exp(i\theta)z^3) &\equiv [\rho((-i\omega + i\alpha U)z^3) + z_Y^4] \exp(i\theta) = 0, \\ L^4(\exp(i\theta)z^4) &\equiv [(-i\omega + i\alpha U)\varrho + \rho_Y z^3 + \rho(i\alpha z^1 + z_Y^3)] \exp(i\theta) = 0, \\ L^5(\exp(i\theta)z^5) &\equiv [z^6 - z_Y^5] \exp(i\theta) = 0, \\ L^6(\exp(i\theta)z^6) &\equiv [\rho((-i\omega + i\alpha U)z^5 + T_Y z^3) + (\gamma - 1)(i\alpha z^1 + z_Y^3) - \mu\gamma/(\sigma Re)z_Y^6] \exp(i\theta) = 0, \\ \varrho &= \rho(z^4/P - z^5/T). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) — линеаризованная система Дана — Линя [9] для двумерных возмущений. Здесь  $\gamma = C_P/C_V$  — показатель адиабаты;  $\sigma = C_P\mu/K$  — число Прандтля;  $K$  — коэффициент теплопроводности. Числа Маха и Прандтля вычисляются по параметрам потока вне пограничного слоя, нелинейные члены в (3) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} F^1 &= 0, \quad F^2 = \rho(u'u'_X + v'u'_Y) + \varrho(u'_t + Uu'_X + U_Y v'), \quad F^3 = \rho(u'v'_X + v'v'_Y) + \varrho(v'_t + Uv'_X), \\ F^4 &= \varrho(u'_X + v'_Y) + u'\varrho_X + v'\varrho_Y, \quad F^5 = 0, \\ F^6 &= \varrho(\Theta_t + U\Theta_X + T_Y v') + \rho(u'\Theta_X + v'\Theta_Y) + 2\gamma(\gamma - 1)M^2 p'(u'_X + v'_Y). \end{aligned}$$

Нелинейные эффекты определяют квадратичные по амплитуде слагаемые в нелинейных членах.

Краевые условия для возмущений имеют вид

$$z^1 = z^3 = z^5 = 0, \quad Y = 0, \quad Y = \infty. \quad (5)$$

Системы (3), (4) решаются методом ортогонализации [9].

В первом порядке по  $\varepsilon$  однородная система (4) является основной для нахождения собственных значений  $\alpha$  при заданных значениях частоты  $\omega$  и числа Рейнольдса  $Re$ , а также для построения амплитудных функций линейных волн вида (2) с неопределенным амплитудным параметром  $A$  при нормировке  $|z^3|_{\max} = 1$ . В слабонелинейной теории указанные параметры линейных волн считаются искомыми, нелинейность оказывает влияние только на амплитуду  $A$ .

Во втором порядке по  $\varepsilon$  система неоднородных дифференциальных уравнений (3) используется для построения вторичных гармоник. Исследуем характеристики вторичных волн.

При самовоздействии исходных волн вида (2) в нелинейных членах  $F^k(u'_j, u'_j)$  появляются слагаемые типа  $A_j A_{-j} u_j u_{-j} \exp(i\theta_j - i\theta_j)$  и  $A_j A_j u_j u_j \exp(i\theta_j + i\theta_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Первые из них учитывают индуцирование вторичных нулевых гармоник с нулевыми фазами  $\theta_{j,-j} = 0$ . Обозначим их амплитудные функции через  $z_{j,-j}^k$ . Вторичные нулевые гармоники, являясь заведомо стационарными, вносят вклад в искажение средних характеристик потока  $U$  и  $T$ . Из-за силового поля, создаваемого вторыми слагаемыми в  $F^k$ , генерируются обертоны с удвоенными фазами  $\theta_{j,j} = 2\theta_j$ . Амплитудные функции обертонов обозначим через  $z_{j,j}^k$ .

При комбинационном взаимодействии  $u'_1$  и  $u'_2$  возникают как вторичная суммарная волна с амплитудной функцией  $z_{1,2}^k$  и суммарной фазой  $\theta_{1,2} = \theta_1 + \theta_2$ , так и вторичная разностная волна с амплитудной функцией  $z_{1,-2}^k$  и фазой  $\theta_{1,-2} = \theta_1 - \theta_2$ . Таким образом, для двух волн необходимо рассмотреть шесть вторичных гармоник.

Общее решение для вторичных волн находится по общей схеме  $z^k = Cz_o^k + z_H^k$ , где  $z_o^k$  — решения однородной системы (4);  $z_H^k$  — частные решения неоднородной системы (3). Естественно предположить, что и собственные функции вторичных волн удовлетворяют краевым условиям (5). Систему амплитудных уравнений при таком типе нелинейной связи можно получить, используя стандартную процедуру осреднения и условия разрешимости [7, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\xi} &= \{-\alpha_1^i + [E_{1,1,-1}|A_1|^2 + E_{1,2,-2}|A_2|^2]Z_1^{-1}\}A_1, \\ \frac{dA_2}{d\xi} &= \{-\alpha_2^i + [E_{2,2,-2}|A_2|^2 + E_{2,1,-1}|A_1|^2]Z_2^{-1}\}A_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $Z_j = \int_Y \left\{ \sum^k (z_j^k)^+ \frac{\partial L^k(z_j^k)}{\partial \alpha_j} \right\} dY$ ; индексом “+” отмечены решения сопряженной к (4)

системы. Коэффициенты  $E$  характеризуют нелинейную связь первичных волн и вторичных гармоник:

$$\begin{aligned} E_{1,1,-1} &= \int_Y \left\{ \sum^k (z_1^k)^+ \frac{F^k(z_1^k, z_{1,-1}^k) + F^k(z_{-1}^k, z_{1,1}^k)}{\partial L^k(z_1^k)/\partial \omega_1} \right\} dY, \\ E_{1,2,-2} &= \int_Y \left\{ \sum^k (z_1^k)^+ \frac{F^k(z_1^k, z_{2,-2}^k) + F^k(z_{-2}^k, z_{1,2}^k) + F^k(z_2^k, z_{1,-2}^k)}{\partial L^k(z_1^k)/\partial \omega_1} \right\} dY. \end{aligned}$$

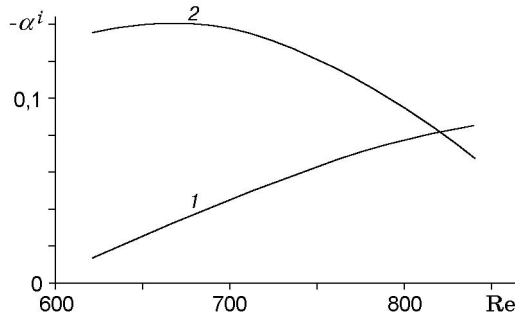


Рис. 1. Инкременты линейных волн:  
1 — с частотой  $f_1$ , 2 — с частотой  $f_2$

Член  $E_{1,1,-1}$  учитывает самовоздействие волны: влияние искажения среднего поля  $z_{1,-1}^k$  и обертона  $z_{1,1}^k$  на амплитуду первой волны. Второй член  $E_{1,2,-2}$  учитывает дополнительное влияние искажения среднего поля, создаваемого второй волной, а также вторичных суммарной и разностной волн на амплитуду  $A_1$  первой волны. Такую же структуру имеет амплитудное уравнение для второй волны.

Запишем комплексные амплитуды  $A_j$  в тригонометрическом виде

$$A_j = a_j \exp(i\psi_j), \quad a = |A|, \quad \psi = \arg A$$

и будем решать (6) относительно  $a$  и  $\psi$ . Начальные значения  $a_j(\xi_0)$  для уравнений (6) задавались через начальные интенсивности волн  $I_j$ . При этом  $\xi_0 = X_0$ , а  $X_0$  определяется начальным значением  $\text{Re}_0$  (см. ниже). Связь между амплитудами колебаний и интенсивностью выражается через максимальное по поперечной координате  $Y$  расчетное значение пульсаций массовой скорости  $m' = \rho u + \rho U$  субгармоники ( $j = 1$ )

$$I_j(\xi_0) = a_j(\xi_0) m'_{1\max} \exp(-\alpha_j^i \xi_0),$$

начальные фазы выбраны произвольными ( $\psi_j(\xi_0) = 0$ ).

**Результаты и обсуждение.** В экспериментах [1] положение источника контролируемых возмущений соответствовало значению  $\text{Re} = 497$ , измерения проводились в диапазоне  $\text{Re}_0 \leq \text{Re} \leq 846$ ,  $\text{Re}_0 = 624$ . В опытах температура торможения была постоянной и составляла 310 К,  $\gamma = 1,4$ ,  $\sigma = 0,72$ . Для тех же параметров проведены расчеты.

На рис. 1 показаны инкременты  $-\alpha^i$  линейных волн с частотой субгармоники  $f_1$  и основной частотой  $f_2$  (кривые 1, 2). Начальное положение субгармоники при  $\text{Re} = \text{Re}_0$  — область вблизи нижней ветви нейтральной кривой, линейный инкремент увеличивается с увеличением значений  $\text{Re}$ , не достигая максимума в конечном сечении измерений. При  $\text{Re} = \text{Re}_0$  основная волна находится вблизи максимума линейного инкремента, который уменьшается вниз по течению.

Среди вторичных гармоник наибольший интерес представляют нулевые ( $u_{1,-1}$  и  $u_{2,-2}$ ), определяющие деформацию эпюр осредненной продольной скорости, найденной экспериментально. На рис. 2 показаны их поперечные распределения (кривые 1, 2) при  $\text{Re} = \text{Re}_0$ , а также средний невозмущенный профиль  $U$  (штриховая линия). Полная деформация  $U$  записывается в виде  $\Delta U = |a_1|^2 u_{1,-1} + |a_2|^2 u_{2,-2}$  и определяется амплитудами исходных волн. Таким образом, учет нелинейности обуславливает большую заполненность профиля в пристенной области и появление дефекта скорости вблизи внешней границы, что приводит к увеличению толщины пограничного слоя. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Влияние нелинейных процессов на амплитуды первичных волн можно проанализировать, рассматривая нелинейные коэффициенты. Объединим коэффициенты, учитывающие самовоздействие и комбинационное взаимодействие (см. (7)). Из (6) следует, что амплитуды  $a_j$  определяются вещественными значениями этих коэффициентов (рис. 3). Положи-

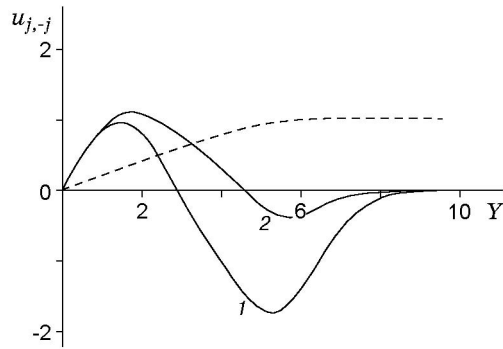


Рис. 2

Рис. 2. Амплитудные функции вторичных нулевых гармоник при  $\text{Re} = \text{Re}_0$ :  
 1 —  $u_{1,-1}$ ; 2 —  $u_{2,-2}$ ; штриховая линия — средний невозмущенный профиль продольной скорости  $U$

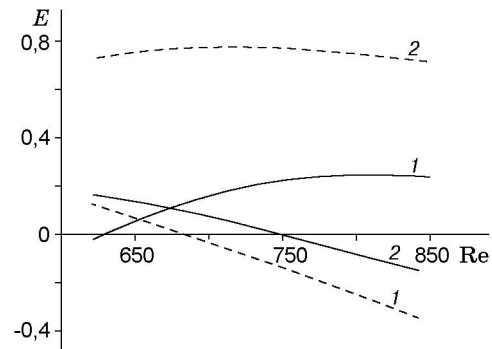


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость нелинейного коэффициента от  $\text{Re}$  для волн с частотой  $f_1$  (1) и  $f_2$  (2):  
 сплошные кривые — режим самовоздействия, штриховые — комбинационное взаимодействие

тельные значения нелинейных членов вызывают дополнительное (по сравнению с линейным значением  $a(\xi_0) \exp(-\alpha^i X)$ ) увеличение амплитуд, а отрицательные приводят к их уменьшению. Из рис. 3 следует, что самовоздействие субгармоники (сплошная кривая 1) приводит к увеличению амплитуды  $a_1$ , а самовоздействие волны с частотой  $f_2$  (штриховая кривая 1) — к ее уменьшению. Влияние основной волны на субгармонику  $E_{1,2,-2}$  проявляется в дестабилизации амплитуды последней при малых значениях  $\text{Re}$ , это влияние значительно уменьшается в середине исследуемого диапазона (сплошная кривая 2). Для волны с основной частотой  $f_2$  наличие в спектре субгармоники всегда приводит к увеличению  $a_2$  (штриховая кривая 2).

Таким образом, влияние нелинейности в рассматриваемом процессе неоднозначно, оно может усиливаться или ослабевать и в целом зависит от значений исследуемых амплитуд.

В рамках рассматриваемой модели проанализируем поведение амплитуд (рис. 4). В расчетах начальные значения  $a_1$ ,  $a_2$  соответствовали экспериментальным суммарным интенсивностям начальных волновых пакетов, причем при  $\xi = \xi_0$   $I_1/I_2 = 3$ ,  $a_1/a_2 = 2$ .

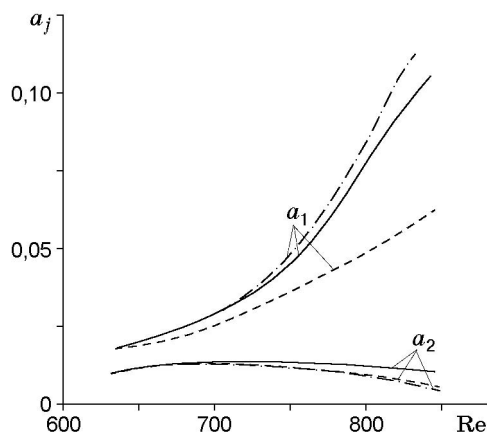


Рис. 4. Динамика модулей амплитуд волн  $a_1$  и  $a_2$ :

сплошные кривые — модель комбинационного взаимодействия; штрихпунктирные — режим самовоздействия; штриховые — линейная модель

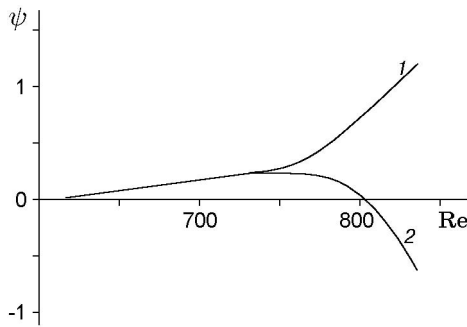


Рис. 5. Набег фаз комплексных амплитуд  $A = a \exp(i\psi)$  в нелинейном процессе для волн с частотой  $f_1$  (1) и  $f_2$  (2)

Нелинейность всегда приводит к более интенсивному росту амплитуды субгармоники. При этом в линейной модели отношение конечных и начальных амплитуд приближенно равно 3, в нелинейном — 6. Таким образом, за счет нелинейности амплитуда может увеличиться почти в два раза. Основной вклад в увеличение амплитуды вносит самовоздействие, присутствие волны с основной частотой приводит к уменьшению амплитуды из-за передачи этой волне части энергии.

Для основной волны из-за значительного уменьшения линейных инкрементов на исследуемом интервале значений  $Re$  наблюдается уменьшение линейной амплитуды  $a_2$ , учет нелинейности в режиме самовоздействия практически не влияет на ее величину, а наличие субгармоники приводит к незначительному росту амплитуды. Слабое влияние нелинейности определяется малой величиной начальной амплитуды волны.

Рассматриваемый процесс распространения возмущений в пограничном слое зависит от значений начальных амплитуд и их отношения  $a_1/a_2$ .

Выше рассматривалась динамика модулей амплитуд. В нелинейном процессе происходит также набег фаз  $\psi_j$ , который может приводить к изменению волновых чисел  $\alpha_j^r$ , а значит, и фазовых скоростей  $c_j = \omega_j/\alpha_j^r$ . В [1] отмечено, что значения фазовых скоростей  $c = 0,70 \div 0,72$  в среднем на 30–40 % превышали значения фазовых скоростей для собственных волн в сверхзвуковом пограничном слое  $c = 0,52 \div 0,55$ . На рис. 5 показаны набег фаз, полученные в расчете. Зависимость  $\psi_j(Re)$  показывает эффективность взаимодействия волн. Из рис. 5 следует, что усиление роли нелинейности имеет место в середине исследуемого интервала значений  $Re$ . В этой области найдены значения  $\Delta\alpha_j^r = d\psi_j/dRe$  и определены фазовые скорости волн на нелинейной стадии. Оказалось, что значения фазовых скоростей с нелинейными поправками ( $c = 0,69 \div 0,75$ ) близки к экспериментально определенным.

Таким образом, в рамках рассмотренной комбинационной модели качественно верно описываются особенности динамики контролируемых возмущений повышенной интенсивности: значительное усиление сигнала по сравнению с линейным, искажение эпюр средних скоростей вблизи внешней границы, приводящее к увеличению толщины пограничного слоя, и увеличение фазовых скоростей волн.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что рассматриваемый нелинейный процесс может иметь место в пограничном слое, возбужденном контролируемым сигналом большой интенсивности. В дальнейшем необходимо исследовать взаимодействие не уединенных волн, а реальных волновых пакетов, а также проанализировать стационарные вихревые моды, которые могут оказывать влияние на нелинейный процесс.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Косинов А. Д., Ермолаев Ю. Г., Семенов Н. В. Об “аномальных” нелинейных волновых явлениях в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 91–98.

2. Ermolaev Y. G., Kosinov A. D., Semionov N. V. Experimental investigation of laminar-turbulent transition process in supersonic boundary layer using controlled disturbances // Nonlinear instability and transition in 3D boundary layer: Proc. of the IUTAM symp., Manchester, 1995. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 17–26.
3. Ермолаев Ю. Г., Косинов А. Д., Семенов Н. В. Экспериментальное исследование нелинейного развития волн неустойчивости на плоской пластине при числе Маха  $M = 3$  // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 107–114.
4. Гапонов С. А., Масленникова И. И. Субгармоническая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4, № 1. С. 3–12.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
7. Володин А. Г., Зельман М. Б. Парные нелинейные взаимодействия волн Толлмина — Шлихтинга в течениях типа пограничного слоя // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 5. С. 78–84.
8. Терехова Н. М. Комбинационное взаимодействие неустойчивых возмущений в сверхзвуковой струе // Изв. СО РАН. Сиб. физ.-техн. журн. 1993. № 5. С. 82–93.
9. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.

*Поступила в редакцию 5/XI 2001 г.,  
в окончательном варианте — 22/III 2002 г.*

---