УДК 530.372

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С УЧЕТОМ МЕЖФАЗНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ: СЛОИСТАЯ СТРУКТУРА

Ю. Амира, В. В. Шелухин[*,**]

Университет Клермон — Овернь, Клермон-Ферран, Франция
[*] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
[**] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: youcef.amirat@uca.fr, shelukhin@hydro.nsc.ru

Рассматриваются уравнения Максвелла для композитного двухкомпонентного слоистого материала с периодической структурой в поле гармонического по времени источника, действующего вдоль слоев. Проводится двухмасштабная гомогенизация уравнений с учетом комплексной проводимости межфазных слоев и их толщины. Краевая задача для систем дифференциальных уравнений с краевыми условиями сводится к задаче в слабой вариационной формулировке. Устанавливается однозначная разрешимость задачи. Анализируется случай низких частот при межфазных поверхностных токах различной интенсивности с учетом длины волны и длины скин-слоя, которые зависят от частоты. Выводятся макроуравнения и определяются эффективные материальные константы, такие как магнитная и диэлектрическая проницаемости и электрическая проводимость. Описаны условия, при которых эффективные параметры зависят от межфазных токов. Установлено, что при специально подобранных параметрах межфазных слоев эффективная диэлектрическая проницаемость может быть отрицательной, если ее определять по эффективному волновому числу.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, межфазные токи, гомогенизация, двухмасштабная сходимость.

DOI: 10.15372/PMTF20190401

Введение. В работе [1] выполнена гомогенизация гармонических по времени уравнений Максвелла в трехмерном случае с учетом межфазных поверхностных токов. Необходимость исследования подобных задач обусловлена их применением в геофизике. В частности, с помощью метода молекулярной динамики в работе [2] показано, что на границе сред смектит — вода при наличии внешнего электромагнитного источника высокая подвижность противоионов в диффузионном слое и слое Штерна может приводить к возникновению межфазных поверхностных токов. В настоящей работе исследуется подобная задача в другой геометрической постановке. В работе [1] рассматриваются поверхностные токи, протекающие в замкнутых ограниченных поверхностях, разделяющих жидкие и твердые фазы. В данной работе рассматривается композитный материал со слоистой структурой и двумерными токами вдоль плоскостей. Обе фазы (или оба материала) не

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (грант № 14.W03.31.0002).

являются связными, поэтому при решении соответствующей краевой задачи требуется использовать другой математический подход. Такая постановка возникает в теории плазмонов [3]: обнаружено, что при помещении листа графена между двумя диэлектриками можно возбудить поверхность плазмон — поляритон. В отличие от [3] в данной работе рассматривается периодическая задача.

Метод двухмасштабной гомогенизации математически обоснован для ряда композитных материалов с гетерогенной микроструктурой, заданной с помощью периодических по пространству параметров, в электромагнитных полях различной частоты [4–7]. В данной работе исследуется двухкомпонентная среда со слоистой структурой. Предполагается, что плоские электромагнитные волны направлены вдоль слоев. При этом учитываются межфазные поверхностные токи, возбуждаемые внешними источниками.

Целью данной работы является исследование влияния поверхностных межфазных токов на эффективную диэлектрическую проницаемость и эффективную электрическую проводимость. В отличие от работы [1] частотная дисперсия эффективных параметров (диэлектрической проницаемости, магнитной и электрической проводимости) не наблюдается. Это обусловлено тем, что электрическое поле направлено вдоль слоев и отсутствует отражение волны. Установлено, что волновое число гомогенизированной среды зависит от параметров, характеризующих поверхностные токи. При специально выбранных параметрах установлено, что если эффективную диэлектрическую проницаемость определять через волновое число, а не через емкость, то она может быть отрицательной. Подобное явление известно для метаматериалов [8].

В данной работе рассматриваются гармонические по времени уравнения Максвелла с периодическими (по пространственным координатам) коэффициентами, которые зависят от параметра $\delta = l/L$, где l — размер ячейки периодичности; L — размер области измерений. Как и в работе [9], учитывается не только длина волны l_w, но и длина скин-слоя l_s, которая характеризует композитный материал, находящийся во внешнем гармоническом по времени электрическом поле. Следует отметить, что l_w и l_s зависят от частоты ω, поэтому отношение порядка между длинами l, l_w, l_s также зависит от ω; например, может оказаться, что $l \ll l_w \ll l_s$ или $l \ll l_s \ll l_w$ и т. п. Кроме того, учитываются толщина межфазного слоя и ее комплексная электрическая проводимость. Чтобы учесть различные отношения порядка между l, l_w, l_s, осуществляется переход к безразмерным переменным. Уравнения приводятся к такому виду, чтобы была очевидна зависимость от параметра δ в различных интервалах частот. Устанавливается однозначная разрешимость задач в слабой формулировке. Заметим, что применяемые в данной работе методы отличаются от тех, которые были использованы в [1]. Также в работе проводится гомогенизация уравнений Максвелла с учетом граничных и межфазных условий. Отдельно исследуются случаи низких и очень низких частот. Выводятся макроскопические уравнения и определяются эффективные коэффициенты (диэлектрическая проницаемость, магнитная и электрическая проводимости). Исследуется асимптотика электрических полей для межфазных токов различной интенсивности.

1. Постановка задачи. В данной работе используется гауссова система единиц. Если выражение для плотности токов, задаваемой внешними источниками, имеет вид

$$J_s \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

где ω — частота, то электромагнитные поля

$$E \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \quad D \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}), \quad H \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \quad B \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \quad J \equiv \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$$

представляют собой решение гармонических по времени уравнений Максвелла

$$-\frac{i\omega}{c}\,\boldsymbol{D} = \operatorname{curl}\boldsymbol{H} - \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{J} - \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{f}, \qquad \frac{i\omega}{c}\,\boldsymbol{B} = \operatorname{curl}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$$

с материальными соотношениями

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}.$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость; σ — электрическая проводимость; μ — магнитная проницаемость; c — скорость света в вакууме. Путем перекрестного дифференцирования можно исключить магнитное поле и получить уравнение типа уравнения Гельмгольца:

$$\operatorname{curl}\Big(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\Big) = \varkappa^2\boldsymbol{E} + \frac{4i\pi\omega}{c^2}\boldsymbol{f}, \qquad \varkappa^2 = \frac{\omega^2\varepsilon + 4i\pi\sigma\omega}{c^2}. \tag{1}$$

Компоненты композита считаются изотропными.

Предположение о периодичности слоистой структуры композита означает, что функции ε, σ, μ в (1) зависят лишь от переменной x и являются l-периодическими по этой переменной. Слой $0 < x < L$ состоит из N жидких и N твердых слоев. Жидкие слои определяются соотношениями

$$x_{2k} < x < x_{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

твердые — соотношениями

$$x_{2k+1} < x < x_{2k+2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Пусть $0 < \Phi < 1$ и $l = L/N$, тогда толщина жидкого слоя равна Φl, а толщина твердого слоя — $(1-\Phi)l$. Значит,

$$x_{2k+1} - x_{2k} = \Phi l, \qquad x_{2k+2} - x_{2k+1} = (1-\Phi)l.$$

Так как поле внешнего источника направлено вдоль слоев, то

$$\boldsymbol{f} = (0, f_2(x), f_3(x))^{\mathrm{т}}.$$

Следовательно, напряженность электрического поля будем искать в виде

$$\boldsymbol{E} = (0, E_2(x), E_3(x))^{\mathrm{т}}. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что функции $E_2(x)$ и $E_3(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu^{-1}\frac{\partial E_j}{\partial x}\Big) + \varkappa^2 E_j = -\frac{4i\pi\omega}{c^2}f_j, \qquad j = 2, 3. \tag{3}$$

Коэффициенты в уравнении (3) являются кусочно-постоянными:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_s, & x_{2k+1} < x < x_{2k+2}, \\ \varepsilon_f, & x_{2k} < x < x_{2k+1}, \end{cases} \qquad \mu(x) = \begin{cases} \mu_s, & x_{2k+1} < x < x_{2k+2}, \\ \mu_f, & x_{2k} < x < x_{2k+1}, \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_s, & x_{2k+1} < x < x_{2k+2}, \\ \sigma_f, & x_{2k} < x < x_{2k+1}. \end{cases}$$

Пусть единичный вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен плоскости $x = x_k$ и направлен в жидкую область. Введем тангенциальную компоненту поля $\boldsymbol{E}$:

$$\pi_\tau(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})$$

(знак “×” означает векторное произведение). Предположение (2) означает, что $\pi_\tau(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}$.

Скачок вектора $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}$ на межфазной границе равен плотности межфазного тока $\boldsymbol{J}_0$ [10], поэтому справедливы условия на межфазных поверхностях

$$x = x_k\colon \quad [\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}] = 0, \qquad [\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}] = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{J}_0. \tag{4}$$

Здесь $[\,\cdot\,]$ — скачок на межфазной поверхности: если $\boldsymbol{v}_f$ и $\boldsymbol{v}_s$ — значения разрывной величины $\boldsymbol{v}$ на поверхности $x = x_k$ со стороны жидкой и твердой фаз соответственно, то $[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s$.

Выберем $\boldsymbol{J}_0$ в виде

$$\boldsymbol{J}_0 = dS_0\pi_\tau(\boldsymbol{E}), \qquad S_0 \equiv \sigma_0 - i\omega\varepsilon_0/(4\pi), \tag{5}$$

где S_0 — комплексная поверхностная проводимость. Формула (5) соответствует предположению, что каждый твердый слой покрыт проводящим слоем толщиной d с параметрами σ_0, μ_0, ε_0. Математически проводящие слои представляют собой межфазные плоскости x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$, параметры σ_0, μ_0, ε_0 соответствуют этим плоскостям.

Формула (5) является следствием предположения, что гармоническая по времени плотность межфазного тока $\boldsymbol{J}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ определяется полным током в проводящем межфазном слое включая токи смещения:

$$\boldsymbol{J}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = d\Big(\sigma_0\pi_\tau(\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\boldsymbol{E}) + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\pi_\tau(\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\boldsymbol{D})\Big), \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}.$$

Напомним, что в работе [1] условия (4) на межфазных поверхностях использовались вследствие подвижности ионов на границе сред смектит — вода [2, 11].

Для того чтобы постановка задачи была полной, сформулируем краевые условия $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} = 0$ на границе слоя $\Omega = (0, L)$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Следовательно,

$$E_j = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = L \quad (j = 2, 3).$$

Запишем уравнение (3) вместе с краевыми условиями в безразмерных переменных. Для этого введем следующие обозначения:

$$x' = \frac{x}{L},\ \boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{E}}{\hat{E}},\ \boldsymbol{D}' = \frac{\boldsymbol{D}}{\hat{E}},\ \boldsymbol{H}' = \frac{\boldsymbol{H}}{\hat{H}},\ \boldsymbol{B}' = \frac{\boldsymbol{B}}{\hat{H}},\ \boldsymbol{J}' = \frac{\boldsymbol{J}}{\hat{J}},\ \boldsymbol{f}' = \frac{\boldsymbol{f}}{\hat{J}},\ \omega' = \frac{\omega}{\hat{\omega}},\ \sigma' = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}}$$

(символ “$\wedge$” соответствует характерным значениям, штрих — безразмерным переменным). Далее предполагается, что $0 < \omega' \leqslant 1$. Пусть $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ — характерные значения параметров ε, μ. Обозначим $\varepsilon = \hat{\varepsilon}\varepsilon'$, $\mu = \hat{\mu}\mu'$. Заметим, что в системе СГС параметры ε и μ безразмерные. Положим $\hat{J} = \hat{\sigma}\hat{E}$. Далее через E обозначается E_2 либо E_3. В безразмерных переменных уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{1}{\mu'}\,\frac{\partial E'}{\partial x'}\Big) + \varkappa'^2 E' = -4i\pi\omega' a_1 f', \tag{6}$$

где

$$\varkappa'^2 = \omega'^2\varepsilon'\,\frac{L^2}{l_w^2} + 4i\pi\sigma'\omega'\,\frac{L^2}{l_s^2}, \quad a_1 = \frac{L^2}{l_s^2}, \quad l_w = \frac{c}{\hat{\omega}\sqrt{\hat{\mu}\hat{\varepsilon}}}, \quad l_s = \frac{c}{\sqrt{\hat{\omega}\hat{\sigma}\hat{\mu}}}$$

(l_w — длина волны; l_s — длина скин-слоя).

Введем безразмерную микроскопическую переменную $y \in Y$ на интервале $Y = (0, 1)$. В этой ячейке периодичности выделим жидкую $Y_f = (0, \Phi)$ и твердую $Y_s = (\Phi, 1)$ части. Определим кусочно-постоянные функции

$$\varepsilon'(y) = \begin{cases} \varepsilon'_s, & y \in Y_s, \\ \varepsilon'_f, & y \in Y_f, \end{cases} \qquad \mu'(y) = \begin{cases} \mu'_s, & y \in Y_s, \\ \mu'_f, & y \in Y_f, \end{cases} \qquad \sigma'(y) = \begin{cases} \sigma'_s, & y \in Y_s, \\ \sigma'_f, & y \in Y_f. \end{cases}$$

Предположение о периодической структуре композита означает, что коэффициенты ε', σ', μ' в уравнении (6) являются периодическими кусочно-постоянными функциями. Обозначим

$$\varepsilon'_\delta(x') = \varepsilon'\Big(\frac{x'}{\delta}\Big), \quad \mu'_\delta(x') = \mu'\Big(\frac{x'}{\delta}\Big), \quad \sigma'_\delta(x') = \sigma'\Big(\frac{x'}{\delta}\Big), \quad \delta = \frac{l}{L} \equiv \frac{1}{N}.$$

Эти функции являются периодическими с периодом δ.

Как и в работе [1], примем следующие гипотезы:

$$\frac{l}{l_s} = \alpha_s \delta^{m_s}, \qquad \frac{l}{l_w} = \alpha_w \delta^{m_w}, \tag{7}$$

где коэффициенты и показатели степеней не зависят от δ. Соотношения (7) показывают, насколько длины l_s и l_w велики по сравнению с размером ячейки l.

С учетом (7) получаем

$$\frac{L}{l_s} = \frac{\alpha_s^1}{\delta^{1-m_s}} \equiv \frac{\alpha_s}{\delta^{1-m_s}}, \qquad \frac{L}{l_w} = \frac{\alpha_w^1}{\delta^{1-m_s}} \equiv \frac{\alpha_w}{\delta^{1-m_w}},$$

поэтому

$$\varkappa_\delta'^2 = \frac{\alpha_w^2}{\delta^{2(1-m_w)}}\, \omega'^2 \varepsilon'_\delta(x') + 4i\pi\, \frac{\alpha_s^2}{\delta^{2(1-m_s)}}\, \omega' \sigma'_\delta(x').$$

Уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{1}{\mu'_\delta}\,\frac{\partial E'}{\partial x'}\Big) + \varkappa_\delta'^2 E' = -4i\pi\omega' a_1 f', \qquad x' \neq x'_k \quad (1 \leqslant k \leqslant 2N-1). \tag{8}$$

На границе слоя $\Omega' = (0,1)$ имеем следующие граничные условия:

$$E' = 0 \quad \text{при} \quad x' = 0, \quad x' = 1. \tag{9}$$

Условия (4) на межфазных поверхностях сводятся к условиям

$$[E'] = 0, \quad \Big[\frac{1}{\mu'}\,\frac{\partial E'}{\partial x'}\Big] = i\alpha_\sigma E' \quad \text{при} \quad x' = x'_k \quad (1 \leqslant k \leqslant 2N-1). \tag{10}$$

В (8)–(10)

$$\alpha_\sigma = a_3(4\pi\sigma'_0 - i a_2 \varepsilon'_0 \omega')\omega',$$

$$a_1 = \frac{L^2}{l_s^2} = \frac{\alpha_s^2}{\delta^{2(1-m_s)}}, \quad a_2 = \frac{\hat\varepsilon\hat\omega}{\hat\sigma}, \quad a_3 = \frac{Ld}{l_s^2} = \frac{\alpha_s^2 \delta^{2m_s-1} d}{l},$$

$$\sigma_0 = \hat\sigma\sigma'_0, \qquad \varepsilon_0 = \hat\varepsilon\varepsilon'_0.$$

Предположим, что для межфазного проводящего слоя имеет место соотношение

$$\alpha_\sigma = \bar\alpha_\sigma \delta^m,$$

или

$$a_3 = \bar a_3 \delta^m,$$

где постоянная $\bar\alpha_\sigma$ не зависит от δ.

Функцию E' будем называть сильным решением задачи (8)–(10), если $E'(x')$ является решением уравнения (8) всюду, за исключением точек x'_k, и при этом имеет место включение $E' \in C^1[0,1] \cap C^2(x'_k, x'_{k+1})$. Опуская штрихи, нетрудно показать, что сильное решение $E(x)$ является слабым в смысле $E \in H_0^1(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{E_x\varphi_x^*}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 E\varphi^*\Big)\,dx + i\alpha_\sigma \sum_{k=1}^{2N-1} E(x_k)\varphi^*(x_k) = 4i\pi\omega a_1 \int\limits_{\Omega} f\varphi^*\,dx \qquad (11)$$

для любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, где φ^* — комплексная сопряженная функция. В то же время можно показать, что слабое решение E становится сильным, если $E \in C^1[0,1] \cap C^2(x'_k, x'_{k+1})$. Проведем асимптотический анализ задачи (11) при $\delta \to 0$. Заметим, что выражение

$$i\alpha_\sigma \sum_{k=1}^{2N-1} E(x_k)\varphi^*(x_k) \qquad (12)$$

представляет собой граничный интеграл, возникающий при интегрировании по частям с учетом межфазных условий (10).

Введем функцию

$$g(y) = \begin{cases} 1-2y, & 0 < y < \Phi, \\ 2(1-y), & \Phi < y < 1 \end{cases} \qquad (13)$$

на интервале Y и продолжим ее периодически на всю прямую $\mathbb{R}$. Обозначим $g_\delta(x) = g(x/\delta)$.

Лемма 1. *Любая функция $u \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству*

$$\delta \sum_{k=0}^{2N} u(x_k) = \int\limits_{\Omega} u_x(x)[2(1-x) - \delta g_\delta(x)]\,dx.$$

Доказательство. С использованием метода индукции находим

$$\delta \sum_{k=0}^{2N} u(x_k) = \int\limits_{\Omega} u_x(x) G_N(x)\,dx,$$

где

$$G_N(x) = 2 - k/N \qquad (x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, \dots, 2N).$$

Нетрудно показать, что функция $2(1-x) - G_N(x)$ является 1-периодической и удовлетворяет равенству

$$2(1-x) - G_N(x) = \delta g_\delta(x).$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1, для любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ можно получить равенство

$$\delta \sum_{k=0}^{2N} \varphi(x_k)E(x_k) = \int\limits_{\Omega} (E[2\varphi - \delta g_\delta\varphi_x] - \delta g_\delta \varphi E_x)\,dx,$$

применяя интегрирование по частям. Поэтому уравнение (11) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{E_x\varphi_x^*}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 E\varphi^* + \frac{i\alpha_\sigma}{\delta}\,(E[2\varphi^* - \delta g_\delta\varphi_x^*] - \delta g_\delta\varphi^* E_x) - 4i\pi\omega a_1 f\varphi^*\Big)\,dx = 0 \qquad (14)$$

при $E \in H_0^1(\Omega)$.

2. Однозначная разрешимость задачи. Рассмотрим случай низких частот:

$$m_w \in \{1,2\}, \quad m_s \in \{1,2\}, \quad m \in (-1,+\infty). \tag{15}$$

Примем следующие предположения:

$$f \in L^2(\Omega), \tag{16}$$

функции $\varepsilon(y)$, $\mu(y)$, $\sigma(y)$ удовлетворяют ограничениям

$$0 < c_0 \leqslant \varepsilon \leqslant c_0^{-1}, \quad 0 < c_0 \leqslant \mu \leqslant c_0^{-1}, \quad 0 < c_0 \leqslant \sigma \leqslant c_0^{-1}. \tag{17}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении условий* (16), (17) *найдутся достаточно малые положительные числа* ω_0 *и* δ_0, *такие что задача* (14) *имеет единственное решение при любых* $\delta \in (0,\delta_0)$ *и* $\omega \in (0,\omega_0)$.

Доказательство. Введем антисимметричную билинейную форму b в пространстве $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ следующим образом:

$$b(\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \Big(\frac{\varphi_x\psi_x^*}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2\varphi\psi^* + i\,\frac{\alpha_\sigma}{\delta}\,[\varphi(2\psi^* - \delta g_\delta\psi_x^*) - \delta g_\delta\psi^*\varphi_x]\Big)\,dx.$$

Тогда задачу (14) можно сформулировать в виде

$$b(E,\psi) = 4i\pi\omega a_1 \int\limits_\Omega f\psi^*\,dx \qquad \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \tag{18}$$

Покажем, что для задачи (18) выполнены условия теоремы Лакса — Мильграма.

Пусть $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$|b(\varphi,\varphi)|^2 = \Big(\int\limits_\Omega \frac{|\varphi_x|^2}{\mu}\,dx\Big)^2 + $$

$$+ 2\int\limits_\Omega \frac{|\varphi_x|^2}{\mu}\,dx \int\limits_\Omega \Big(|\varphi|^2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{2i\alpha_\sigma}{\delta} - \varkappa_\delta^2\Big) - 2\delta g_\delta\,\mathrm{Re}\,(\varphi\varphi_x^*)\,\mathrm{Re}\Big(\frac{i\alpha_\sigma}{\delta}\Big)\Big)\,dx + $$

$$+ \Big(\int\limits_\Omega \Big(|\varphi|^2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{2i\alpha_\sigma}{\delta} - \varkappa_\delta^2\Big) - 2\delta g_\delta\,\mathrm{Re}\,(\varphi\varphi_x^*)\,\mathrm{Re}\Big(\frac{i\alpha_\sigma}{\delta}\Big)\Big)\,dx\Big)^2,$$

поэтому

$$|b(\varphi,\varphi)|^2 \geqslant \Big(\int\limits_\Omega \frac{|\varphi_x|^2}{\mu}\,dx\Big)^2 + $$

$$+ 2\int\limits_\Omega \frac{|\varphi_x|^2}{\mu}\,dx \int\limits_\Omega \Big(|\varphi|^2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{2i\alpha_\sigma}{\delta} - \varkappa_\delta^2\Big) - 2\delta g_\delta\,\mathrm{Re}\,(\varphi\varphi_x^*)\,\mathrm{Re}\Big(\frac{i\alpha_\sigma}{\delta}\Big)\Big)\,dx. \tag{19}$$

В силу условий (15) имеем

$$\mathrm{Re}\,(2i\alpha_\sigma/\delta) = 2\omega^2 a_2\bar a_3\delta^{m-1}\varepsilon_0, \qquad \mathrm{Re}\,(\varkappa_\delta^2) = \omega^2\alpha_w^2\delta^{2(m_w-1)}\varepsilon_\delta.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_0 = \int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx, \qquad \lambda_1 = \int\limits_\Omega \frac{|\varphi_x|^2}{\mu}\,dx, \qquad A = 2a_2\bar a_3\varepsilon_0, \qquad B = \alpha_w^2\delta^{2(m_w-1)}c_0^{-1}.$$

Из неравенства Юнга и оценки $|g| \leqslant 2$ следует, что при любом $0 < \rho < 1$ справедливо неравенство

$$\Big|2\delta \int\limits_{\Omega} g_\delta \operatorname{Re}(\varphi\varphi_x^*) \operatorname{Re}\Big(\frac{i\alpha_\sigma}{\delta}\Big)\,dx\Big| \leqslant \omega^2 A c_0^{-1/2}\Big(\rho\lambda_1 + \frac{\delta^{2m}}{\rho}\lambda_0\Big). \tag{20}$$

Применяя неравенство Пуанкаре $\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2\,dx \leqslant 2\int\limits_{\Omega} |\varphi_x|^2\,dx$, имеем

$$2\lambda_0\lambda_1\omega^2 B \leqslant 4c_0^{-1}\omega^2 B\lambda_1^2. \tag{21}$$

Кроме того,

$$\Big|\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 \operatorname{Re}(\varkappa_\delta^2)\,dx\Big| \leqslant \omega^2 B\lambda_0. \tag{22}$$

Используя (20)–(22), из (19) находим

$$|b(\varphi,\varphi)|^2 \geqslant \lambda_1^2\big(1 - 2\omega^2 A c_0^{-1/2}\rho - 4c_0^{-1}\omega^2 B\big) + 2\lambda_0\lambda_1\omega^2 A\delta^{m-1}\big(1 - c_0^{-1/2}\delta^{m+1}/\rho\big).$$

Определяя число ω_0 по формуле $\omega_0^2 = (16c_0^{-2}\alpha_w^2)^{-1}$, получаем $4c_0^{-1}\omega^2 B \leqslant 1/4 \ \ \forall\,\omega \in (0,\omega_0)$, $\delta \in (0,1)$. Выберем число $\rho > 0$, так чтобы выполнялось неравенство $2\omega^2 A c_0^{-1/2}\rho \leqslant 1/4$ при $\omega \in (0,\omega_0)$. При фиксированном параметре ρ определим $0 < \delta_0 < 1$ с помощью равенства $1 - c_0^{-1/2}\delta_0^{m+1}/\rho = 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $1 - c_0^{-1/2}\delta^{m+1}/\rho \geqslant 0$ при любом $\delta \in (0,\delta_0)$. В результате получаем оценку

$$|b(\varphi,\varphi)|^2 \geqslant \lambda_1^2/2,$$

которая означает коэрцитивность антисимметричной формы b при $\delta \in (0,\delta_0)$ и $\omega \in (0,\omega_0)$.

Применяя неравенство Коши — Шварца с учетом ограниченности коэффициентов μ_δ^{-1}, $\varkappa_\delta$, α_σ/δ, получаем оценку

$$|b(\varphi,\psi)| \leqslant C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от φ и ψ. Таким образом, антисимметричная форма b удовлетворяет условиям теоремы Лакса — Мильграма. Следовательно, при $f \in L^2(\Omega)$ вариационное уравнение (18) имеет единственное решение $E \in H_0^1(\Omega)$. Лемма доказана.

3. Переход к пределу. Обозначим через E^δ решение задачи (14). Исследуем поведение E^δ при $\delta \to 0$. Будем рассматривать различные значения параметров m_s, m_w, m.

3.1. *Низкие частоты.* Сначала рассмотрим случай $m_s = m_w = m = 1$. В этом случае толщина скин-слоя, длина волны и токи в межфазном слое достаточно велики. Получим априорные оценки, не зависящие от δ.

Лемма 3. *Пусть* $m_s = m_w = m = 1$ *и*

$$\alpha_s^2\sigma_s - 2\bar a_3\sigma_0 \neq 0, \qquad \alpha_s^2\sigma_f - 2\bar a_3\sigma_0 \neq 0.$$

Тогда решение E^δ *удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{\Omega} (|E^\delta|^2 + |E_x^\delta|^2)\,dx \leqslant c\int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx \tag{23}$$

равномерно по δ.

Доказательство. Следует отметить, что функции E^δ и f являются комплексно-значными. Полагая в (14) $\varphi = E^\delta$, получаем равенство

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + \Big(2i\bar\alpha_\sigma - \varkappa_\delta^2\Big)|E^\delta|^2\Big)\,dx = i\int\limits_\Omega \big(4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta *} + 2\bar\alpha_\sigma \delta g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta *})\big)\,dx. \qquad (24)$$

Реальная и мнимая части равенства (24) соответственно имеют вид

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + |E^\delta|^2\omega^2(2\bar a_3 a_2\varepsilon_0 - \alpha_w^2\varepsilon_\delta)\Big)\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\Big[i\int\limits_\Omega \big(4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta *} + 2\bar\alpha_\sigma \delta g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta *})\big)\,dx\Big]; \qquad (25)$$

$$4\pi\omega\int\limits_\Omega |E^\delta|^2(\alpha_s^2\sigma_\delta - 2\bar a_3\sigma_0)\,dx = -\operatorname{Im}\Big[i\int\limits_\Omega (4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta *} + 2\bar\alpha_\sigma \delta g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta *}))\,dx\Big].$$

В силу условий леммы из последнего равенства следует

$$\int\limits_\Omega |E^\delta|^2\,dx \leqslant c\int\limits_\Omega (|f|^2 + \delta|E_x^\delta|^2)\,dx,$$

где постоянная c не зависит от δ и ω. Тогда оценка (23) следует из (25). Лемма доказана.

Для исследования предела E^δ при $\delta \to 0$ применим понятие двухмасштабной сходимости [12]. Напомним, что последовательность $u^\delta \subset L^2(\Omega)$ сходится двухмасштабно слабо к пределу $u \in L^2(\Omega\times Y)$, если для любой тестовой функции $\psi \in C(\,\overline{\Omega}\,; C^\infty_{per}(Y))$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega u^\delta(x)\psi\Big(x, \frac{x}{\delta}\Big)\,dz \;\to\; \int\limits_\Omega\int\limits_Y u(x,y)\psi(x,y)\,dx\,dy. \qquad (26)$$

Свойство (26) запишем в виде $u^\delta(x) \overset{t.s.}{\rightharpoonup} u(x,y)$. Заметим, что допустимые тестовые функции можно выбирать из пространства $C(\,\overline{\Omega}\,; L^2_{per}(Y))$.

Двухмасштабный предел обладает следующими свойствами. Из любой ограниченной в $L^2(\Omega)$ последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая сходится двухмасштабно в $L^2(\Omega\times Y)$. Кроме того, если $u^\delta(x) \overset{t.s.}{\rightharpoonup} u(x,y)$, то $u^\delta \to \int\limits_Y u(x,y)\,dy \equiv \tilde u(x)$ слабо в $L^2(\Omega)$.

Что касается сходимости производных, то справедливо следующее утверждение [12]. Пусть последовательности u^δ и u_x^δ ограничены в $L^2(\Omega)$. Тогда существуют подпоследовательность u^δ и функции $u^0 \in H^1(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$, такие что последовательности $u^\delta(x)$ и $u_x^\delta(x)$ сходятся двухмасштабно к $u^0(x)$ и $u_x^0(x) + u_y^1(x,y)$ соответственно. Кроме того, $u^\delta \to u^0$ слабо в $H^1(\Omega)$.

Далее последовательность и какая-либо ее подпоследовательность обозначаются одинаково.

Приведенное ниже утверждение, не используемое в данной работе непосредственно, характеризует влияние двухмасштабной сходимости при вычислении граничного интеграла (12).

Лемма 4. *Пусть последовательность* $u^\delta \subset H_0^1(\Omega)$ *удовлетворяет оценке* $\|u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c$ *равномерно по* δ, *тогда найдутся подпоследовательность* u^δ *и функция* $u \in H_0^1(\Omega)$, *такие что* $u^\delta \to u$ *в* $L^2(\Omega)$ *и*

$$I^\delta \equiv \delta \sum_{k=0}^{2N} u^\delta(x_k)\varphi\Big(x_k, \frac{x_k}{\delta}\Big) \to \int_\Omega u(x)[\varphi(x,\Phi) + \varphi(x,1)]\,dx$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_{per}(Y))$; *точки* x_k *те же, что и в п.* **1**.

Доказательство. Используя лемму 1 и интегрируя по частям, можно записать следующее представление:

$$I^\delta = \int_\Omega \Big\{u^\delta(x)\Big[2\varphi\Big(x,\frac{x}{\delta}\Big) - \delta g\Big(\frac{x}{\delta}\Big)\varphi_x\Big(x,\frac{x}{\delta}\Big) - g\Big(\frac{x}{\delta}\Big)\varphi_y\Big(x,\frac{x}{\delta}\Big)\Big] - \delta\varphi\Big(x,\frac{x}{\delta}\Big)g\Big(\frac{x}{\delta}\Big)u^\delta_x(x)\Big\}\,dx.$$

Так как $u^\delta \to u$ в $L^2(\Omega)$ и $u^\delta(x) \xrightarrow{t.s.} u_x(x) + u^1_y(x,y)$, то

$$I^\delta \to \int_\Omega \int_Y u(x)\big[2\varphi(x,y) - g(y)\varphi_y(x,y)\big]\,dx\,dy.$$

Используя определение (13) функции $g(y)$, можно доказать справедливость равенства

$$\int_Y (2\varphi(x,y) - g(y)\varphi_y(x,y))\,dy = \varphi(x,\Phi) + \varphi(x,1).$$

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$\xi^\delta(x) = E^\delta_x(x)/\mu_\delta(x).$$

В силу оценки (23) функции E^δ и E^δ_x сходятся двухмасштабно к $E^0(x)$ и $E^0_x(x) + E^1_y(x,y)$ соответственно. Кроме того, $E^\delta \to E^0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и сильно в $L^2(\Omega)$. Так как $\|\xi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c$ равномерно по δ, то можно считать, что $\xi^\delta(x) \xrightarrow{t.s.} \xi^0(x,y)$ для некоторой функции $\xi^0 \in L^2(\Omega \times Y)$.

Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_{per}(Y))$. Выберем тестовую функцию в (14) в виде $\varphi(x) = \delta\psi(x, x/\delta)$. Применяя формулу

$$\frac{d}{dx}\,\varphi(x) = \psi_x(x,y)\big|_{y=x/\delta} + \delta^{-1}\psi_y(x,y)\big|_{y=x/\delta}$$

и переходя к двухмасштабному пределу, находим

$$\int_\Omega \int_Y \xi^0(x,y)\psi_y(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Так как функция ψ произвольна, то $\xi^0_y(x,y) = 0$. Переходя к двухмасштабному пределу в равенстве $\mu_\delta(x)\xi^\delta(x) = E^\delta_x(x)$, получаем

$$\mu(y)\xi^0(x) = E^0_x(x) + E^1_y(x,y).$$

Будем искать функцию E^1 в виде $E^1(x,y) = E^0_x(x)w(y)$, считая функцию $w(y)$ периодической. Ясно, что

$$\frac{1 + w_y(y)}{\mu(y)} = \frac{\xi^0(x)}{E^0_x(x)},$$

поэтому найдется константа c_0, такая что $1 + w_y(y) = c_0\mu(y)$. Эта константа определяется путем интегрирования $\mu(y)$ по Y:

$$c_0 = \mu_h^{-1}, \qquad \mu_h \equiv \int\limits_Y \mu(y)\,dy = \mu_f\Phi + \mu_s(1-\Phi).$$

Следовательно,

$$\xi^0 = \frac{E_x^0(x)}{\mu_h}.$$

Напомним, что $\alpha_\sigma = \delta\bar{\alpha}_\sigma$, где постоянная $\bar{\alpha}_\sigma$ не зависит от δ. Полагая в (14) $\varphi = \varphi(x)$ и переходя к двухмасштабному пределу, получаем равенство

$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y \big(-\xi^0(x)\varphi_x^*(x) + \varkappa^2(y)E^0(x)\varphi^*(x) + 4i\pi\omega a_1 f(x)\varphi^*(x) - 2i\bar{\alpha}_\sigma E^0(x)\varphi^*(x)\big)\,dx\,dy = 0.$$

В силу произвольности функции φ предельная функция E^0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\mu_h}\frac{dE^0}{dx}\Big) + (\varkappa_1^2)_h E^0 = -4i\pi\omega a_1 f \quad \text{в } \Omega, \tag{27}$$

где

$$(\varkappa_1^2)_h = \int\limits_Y \varkappa^2(y)\,dy - 2i\bar{\alpha}_\sigma.$$

Далее через D обозначается какая-либо компонента вектора электрической индукции $\boldsymbol{D} = (0, D_2(x_1), D_3(x_1))^{\mathrm{T}}$. Заметим, что интеграл $\int\limits_\Omega |D^\delta(x)|^2\,dx$ ограничен равномерно по δ. Переходя к пределу в равенстве $D^\delta(x) = \varepsilon(x/\delta)E^\delta(x)$ с учетом сильной сходимости E^δ в $L^2(\Omega)$, получаем равенство $D(x) = \varepsilon_h E^0(x)$, где D — слабый предел последовательности D^δ в $L^2(\Omega)$; $\varepsilon_h = \int\limits_Y \varepsilon(y)\,dy$.

Аналогично с учетом равенства $J^\delta(x) = \sigma(x/\delta)E^\delta(x)$ можно сделать вывод, что

$$J(x) = \sigma_h E^0(x), \qquad \sigma_h = \int\limits_Y \sigma(y)\,dy.$$

В размерных переменных уравнение (27) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\mu_H}\frac{dE}{dx}\Big) + \varkappa_H^2 E = -i\,\frac{4\pi f}{c^2}, \tag{28}$$

где

$$\mu_H = \int\limits_Y \mu(y)\,dy, \qquad \varepsilon_H = \int\limits_Y \varepsilon(y)\,dy, \qquad \sigma_H = \int\limits_Y \sigma(y)\,dy,$$

$$\varkappa_H^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\Big(\varepsilon_H - \frac{2d\varepsilon_0}{l}\Big) + i\,\frac{4\pi\omega}{c^2}\Big(\sigma_H - \frac{2d\sigma_0}{l}\Big).$$

Следовательно, величины μ_H, ε_H, σ_H не зависят от свойств межфазного поверхностного слоя, в то время как волновое число $\varkappa_H^2$ зависит от параметров ε_0, σ_0, d этого слоя. Следует отметить, что помимо емкостной техники измерения диэлектрической проницаемости существует волновая техника, основанная на решениях уравнения Максвелла, описывающих волны падения и отражения [13]. Основную роль в этих измерениях играет волновое число. Из формул (1) следует, что для однородной среды диэлектрическую проницаемость можно определить через комплекснозначное волновое число: $\varepsilon_w = \operatorname{Re}(\varkappa^2 c^2 \omega^{-2})$. Будем использовать индекс w, когда рассматривается волновой способ измерений. Альтернативные методы изложены в работе [14]. Некоторые прямые методы основаны на материальном уравнении $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ [15], при этом учитывается, что емкость зависит от диэлектрической константы. Отметим, что полученные формулы для σ_H и ε_H используются в прямых конденсаторных методах измерений. Вводя определения

$$\varepsilon_{wH} = \operatorname{Re}(\varkappa_H^2 c^2/\omega^2), \qquad \sigma_{wH} = \operatorname{Im}(\varkappa_H^2 c^2/(4\pi\omega)), \tag{29}$$

из уравнения (28) находим

$$\varepsilon_{wH} = \varepsilon_H - 2\varepsilon_0 d/l, \qquad \sigma_{wH} = \sigma_H - 2\sigma_0 d/l.$$

Таким образом, при некоторых значениях d, σ_0, ε_0 эффективные параметры σ_{wH}, ε_{wH} могут принимать отрицательные значения, в то время как ε_H и σ_H остаются положительными. Это обусловлено тем, что материал является композитным и имеются поверхностные токи. Для некоторых композитных метаматериалов имеют место отрицательные значения диэлектрической проницаемости [16]. В силу материального соотношения $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ это означает, что векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ противоположно направлены. Из полученных выше формул следует, что при отсутствии межфазных поверхностных токов $\varepsilon_{wH} = \varepsilon_H$, $\sigma_{wH} = \sigma_H$. Отметим также отсутствие частотной дисперсии: эффективные параметры μ_H, σ_H и ε_H не зависят от частоты. По-видимому, это обусловлено тем, что волны направлены вдоль слоев и отсутствует преломление волн.

Рассмотрим случай $m_s = m_w = 1$, $m > 1$, что соответствует слабым токам. Вернемся к безразмерным переменным. Полагая в (14) $\varphi = E^\delta$, получаем

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + (2i\bar\alpha_\sigma\delta^{m-1} - \varkappa_\delta^2)|E^\delta|^2\Big)\,dx = i\int\limits_\Omega \big(4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta*} + 2\bar\alpha_\sigma\delta^m g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta*})\big)\,dx. \tag{30}$$

Выделяя в (30) вещественную и мнимую части, имеем равенства

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + |E^\delta|^2\omega^2(2\delta^{m-1}\bar a_3 a_2\varepsilon_0 - \alpha_w^2\varepsilon_\delta)\Big)\,dx = \\ = \operatorname{Re}\Big[i\int\limits_\Omega \big(4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta*} + 2\bar\alpha_\sigma\delta^m g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta*})\big)\,dx\Big]; \tag{31}$$

$$4\pi\omega\int\limits_\Omega |E^\delta|^2(\alpha_s^2\sigma_\delta - 2\delta^{m-1}\bar a_3\sigma_0)\,dx = \\ = -\operatorname{Im}\Big[i\int\limits_\Omega \big(4\pi\omega\alpha_s^2 f E^{\delta*} + 2\delta^m\bar\alpha_\sigma g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta*})\big)\,dx\Big].$$

Поскольку можно указать такое значение $\delta_0 > 0$, что $\alpha_s^2\sigma_\delta - 2\delta^{m-1}\bar a_3\sigma_0 \geqslant c > 0$ при любом $\delta \leqslant \delta_0$, из последнего равенства следует оценка

$$\int\limits_\Omega |E^\delta|^2\,dx \leqslant c\int\limits_\Omega (|f|^2 + \delta^m|E_x^\delta|^2)\,dx,$$

равномерная по δ. С помощью (31) можно сделать вывод, что неравенство

$$\int\limits_{\Omega} (|E^\delta|^2 + |E^\delta_x|^2)\,dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx$$

выполняется равномерно по δ. Применяя двухмасштабную сходимость аналогично тому, как это сделано в случае $m = 1$, находим, что предел E^0 последовательности E^δ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\mu_h}\,\frac{dE^0}{dx}\Big) + (\varkappa_1^2)_h E^0 = -4i\pi\omega\alpha_s^2 f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{32}$$

где

$$(\varkappa_1^2)_h = \int\limits_Y \varkappa^2(y)\,dy, \qquad \mu_h = \int\limits_Y \mu(y)\,dy = \mu_f\Phi + \mu_s(1-\Phi).$$

Отметим, что предельное уравнение (32) совпадает с уравнением, которое следует из гомогенизированного вариационного уравнения

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{E^\delta_x \varphi^*_x}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 E^\delta \varphi^* - 4i\pi\omega\alpha_s^2 f\varphi^*\Big)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega),$$

при этом межфазные токи не учитываются. Кроме того, эффективная диэлектрическая проницаемость ε_{wH}, заданная формулой (29), удовлетворяет равенству $\varepsilon_{wH} = \varepsilon_H > 0$.

Рассмотрим случай $m_s = m_w = 1$, $-1 < m < 1$ (очень сильные межфазные токи). В силу неравенства Юнга из (31) следует, что существуют константы c и δ_0, такие что при $\delta \leqslant \delta_0$ выполняется оценка

$$\int\limits_{\Omega} \big(|E^\delta_x|^2 + (\delta^{m-1} - \delta^{2m} - 1)|E^\delta|^2\big)\,dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx. \tag{33}$$

Значит, последовательность E^δ ограничена в $H^1_0(\Omega)$. Запишем уравнение (14) в виде

$$\delta^{1-m} \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{E^\delta_x \varphi^*_x}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 E^\delta \varphi^* - 4i\pi\omega\alpha_s^2 f\varphi^*\Big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} i\bar{\alpha}_\sigma\big(E^\delta[2\varphi^* - \delta g_\delta \varphi^*_x] - \delta g_\delta \varphi^* E^\delta_x\big)\,dx \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Очевидно, что слабый предел E^0 последовательности E^δ удовлетворяет равенству $\int\limits_{\Omega} E^0\varphi^*\,dx = 0$, поэтому $E^0 = 0$.

Обозначим $\tilde{E}^\delta = E^\delta\delta^{m-1}$. Нетрудно показать, что $\tilde{E}^\delta$ удовлетворяет уравнению

$$\delta^{1-m} \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\tilde{E}^\delta_x \varphi^*_x}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 \tilde{E}^\delta \varphi^*\Big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \big(i\bar{\alpha}_\sigma\{\tilde{E}^\delta[2\varphi^* - \delta g_\delta \varphi^*_x] - \delta g_\delta \varphi^* \tilde{E}^\delta_x\} - 4i\pi\omega\alpha_s^2 f\varphi^*\big)\,dx \tag{34}$$

при любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Как и в случае (33), существуют константы c и δ_0, такие что при $\delta \leqslant \delta_0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega} \big(|\tilde{E}_x^\delta|^2 + (\delta^{m-1} - \delta^{2m} - 1)|\tilde{E}^\delta|^2\big)\,dx \leqslant c\delta^{m-1} \int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx.$$

Значит, последовательности $\tilde{E}^\delta$ и $\delta^{(1-m)/2}\tilde{E}_x^\delta$ ограничены в $L^2(\Omega)$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в уравнении (34), можно показать, что последовательность E^δ/δ^{1-m} сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к пределу $\tilde{E}^0$, который удовлетворяет равенству

$$\tilde{E}^0 = \frac{4\pi\omega\alpha_s^2}{2\bar{\alpha}_\sigma}\,f.$$

С использованием асимптотических рядов указанный результат можно сформулировать следующим образом. Пусть

$$E^\delta = \delta^{1-m}\tilde{E}^\delta = \delta^{1-m}(\tilde{E}^0 + \delta\tilde{E}^1 + \ldots), \qquad D^\delta = \delta^{1-m}(\tilde{D}^0 + \delta\tilde{D}^1 + \ldots),$$

тогда $\tilde{E}^0$ удовлетворяет уравнению

$$(\varkappa^2)_h\tilde{E}^0 = -4i\pi\omega\alpha_s^2 f, \tag{35}$$

где $(\varkappa^2)_h = -2i\bar{a}_3(4\pi\sigma_0 - ia_2\varepsilon_0\omega)\omega$. В размерных переменных уравнение (35) принимает вид

$$\varkappa_H^2 E = -4i\pi\omega f/c^2, \tag{36}$$

где

$$\varkappa_H^2 = -2\omega^2\varepsilon_0 d/(c^2 l) - i8\omega\pi\sigma_0\varepsilon_0 d/(c^2 l).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{wH} = -2\varepsilon_0 d/l, \qquad \sigma_{wH} = -2\sigma_0 d/l. \tag{37}$$

3.2. *Очень низкие частоты.* Рассмотрим случай $m_s = m_w = 2$, $m = 1$. В этом случае длина скин-слоя, длина волны и межфазные поверхностные токи велики. Полагая в (14) $\varphi = E^\delta$ и выделяя вещественную и мнимую части, получаем равенства

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + |E^\delta|^2\omega^2(2\bar{a}_3 a_2\varepsilon_0 - \delta^2\alpha_w^2\varepsilon_\delta)\Big)\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\Big[i\int\limits_{\Omega} \big(4\pi\omega\alpha_s^2\delta^2 f E^{\delta*} + 2\bar{\alpha}_\sigma\delta g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta*})\big)\,dx\Big]; \tag{38}$$

$$4\pi\omega\int\limits_{\Omega} |E^\delta|^2(\delta^2\alpha_s^2\sigma_\delta - 2\bar{a}_3\sigma_0)\,dx = -\operatorname{Im}\Big[i\int\limits_{\Omega} \big(4\pi\omega\alpha_s^2\delta^2 f E^{\delta*} + 2\bar{\alpha}_\sigma\delta g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta*})\big)\,dx\Big].$$

Так как найдется значение $\delta_0 > 0$, такое что $2\bar{a}_3\sigma_0 - \delta^2\alpha_s^2\sigma_\delta \geqslant c > 0$ при любом $\delta \leqslant \delta_0$, то из последнего равенства получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega} |E^\delta|^2\,dx \leqslant c\int\limits_{\Omega} \delta^4\big(|f|^2 + \delta^2|E_x^\delta|^2\big)\,dx,$$

равномерную по δ. При использовании этой оценки из (38) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \big(|E^\delta|^2 + \||E_x^\delta|^2\big)\,dx \leqslant c\delta^4\int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx \tag{39}$$

равномерно по δ. Значит, последовательность E^δ сходится к нулю сильно в $H_0^1(\Omega)$.

Обозначим $\tilde{E}^\delta = E^\delta/\delta^2$. Нетрудно показать, что $\tilde{E}^\delta$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{\tilde{E}_x^\delta \varphi_x^*}{\mu_\delta} - \varkappa_\delta^2 \tilde{E}^\delta \varphi^* + i\bar{\alpha}_\sigma \{ \tilde{E}^\delta [2\varphi^* - \delta g_\delta \varphi_x^*] - \delta g_\delta \varphi^* \tilde{E}_x^\delta \} - 4i\pi\omega\alpha_s^2 f \varphi^* \Big)\, dx = 0$$

при любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Из (39) следует, что последовательность $\tilde{E}^\delta$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Применяя двухмасштабную сходимость, находим, что двухмасштабный предел $\tilde{E}^0$ последовательности E^δ/δ^2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\mu_h}\frac{d\tilde{E}^0}{dx}\Big) - 2i\bar{\alpha}_\sigma \tilde{E}^0 = -4i\pi\omega\alpha_s^2 f \qquad \text{в} \quad \Omega, \tag{40}$$

где $\mu_h = \int\limits_Y \mu(y)\, dy = \mu_f \Phi + \mu_s(1-\Phi)$. Величина $\tilde{E}^0$ является первым членом асимптотического разложения

$$E^\delta = \delta^2 \tilde{E}^\delta = \delta^2(\tilde{E}^0 + \delta \tilde{E}^1 + \dots), \qquad D^\delta = \delta^2(\tilde{D}^0 + \delta \tilde{D}^1 + \dots). \tag{41}$$

Единственное отличие от рассмотренного выше случая очень сильных межфазных токов состоит в том, что эффективная магнитная проницаемость μ_h является конечной. Эффективные параметры $\varkappa_H^2$, ε_{wH}, σ_{wH} задаются формулами (37).

Рассмотрим случай $m_s = m_w = 2$, $m > 1$, соответствующий слабым межфазным токам. Полагая в (14) $\varphi = E^\delta$ и выделяя вещественную и мнимую части, получаем равенства

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{|E_x^\delta|^2}{\mu_\delta} + |E^\delta|^2 \omega^2 (2\delta^{m-1} \bar{a}_3 a_2 \varepsilon_0 - \delta^2 \alpha_w^2 \varepsilon_\delta) \Big)\, dx =$$

$$= \operatorname{Re}\Big[i \int\limits_\Omega (4\pi\delta^2\omega\alpha_s^2 f E^{\delta *} + 2\bar{\alpha}_\sigma \delta^m g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta *}))\, dx \Big]; \tag{42}$$

$$4\pi\omega \int\limits_\Omega |E^\delta|^2 (\delta^2 \alpha_s^2 \sigma_\delta - 2\delta^{m-1} \bar{a}_3 \sigma_0)\, dx =$$

$$= -\operatorname{Im}\Big[i \int\limits_\Omega \big(4\pi\delta^2\omega\alpha_s^2 f E^{\delta *} + 2\delta^m \bar{\alpha}_\sigma g_\delta \operatorname{Re}(E^\delta E_x^{\delta *})\big)\, dx \Big].$$

С помощью неравенства Пуанкаре $\int\limits_\Omega |E^\delta|^2\, dx \leqslant 2 \int\limits_\Omega |E_x^\delta|^2\, dx$ и неравенства Юнга можно показать, что при некотором значении $\delta_0 > 0$ из (42) следует неравенство

$$\int\limits_\Omega |E_x^\delta|^2\, dx \leqslant c\delta^4 \int\limits_\Omega |f|^2\, dx + c\delta^2 \int\limits_\Omega |E^\delta|^2\, dx, \tag{43}$$

которое выполняется равномерно по $\delta \in (0, \delta_0)$. В силу неравенства Пуанкаре из (43) получаем оценку

$$\int\limits_\Omega |E_x^\delta|^2\, dx \leqslant c\delta^4 \int\limits_\Omega |f|^2\, dx,$$

равномерную по δ. Можно сделать вывод, что
$$\int\limits_\Omega \big(|E^\delta|^2 + |E^\delta_x|^2\big)\,dx \leqslant c\delta^4 \int\limits_\Omega |f|^2\,dx \tag{44}$$
равномерно по δ. Это значит, что E^δ сходится сильно к нулю в $H^1_0(\Omega)$.

Обозначим $\tilde E^\delta = E^\delta/\delta^2$. Нетрудно показать, что $\tilde E^\delta$ есть решение уравнения
$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{\tilde E^\delta_x \varphi^*_x}{\mu_\delta} - \varkappa^2_\delta \tilde E^\delta \varphi^* + i\bar\alpha_\sigma \delta^{m-1}\big\{\tilde E^\delta[2\varphi^* - \delta g_\delta \varphi^*_x] - \delta g_\delta \varphi^* \tilde E^\delta_x\big\}\Big)\,dx = 4i\pi\omega\alpha_s^2 \int\limits_\Omega f\varphi^*\,dx$$
при любой функции $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. В силу (44) последовательность $\tilde E^\delta$ ограничена в $H^1_0(\Omega)$. Значит, двухмасштабный предел $\tilde E^0$ последовательности E^δ/δ^2 удовлетворяет уравнению
$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\mu_h}\,\frac{d\tilde E^0}{dx}\Big) = -4i\pi\omega\alpha_s^2 f \qquad \text{в} \quad \Omega, \tag{45}$$
где $\mu_h = \int\limits_Y \mu(y)\,dy = \mu_f\Phi + \mu_s(1-\Phi)$.

Очевидно, что $\tilde E^0$ — первый член асимптотического разложения (41). Из уравнения (45) следует
$$\varkappa^2_H = 0, \qquad \varepsilon_{wH} = 0, \qquad \sigma_{wH} = 0.$$

Пусть выполнены условия $m_s = m_w = 2$, $-1 < m < 1$, что соответствует очень сильным межфазным поверхностным токам. В силу неравенства Юнга из (42) следует, что существуют постоянные c и δ_0, такие что при $\delta \leqslant \delta_0$ справедлива оценка
$$\int\limits_\Omega \big(|E^\delta_x|^2 + (\delta^{m-1} - \delta^{2m} - \delta^2)|E^\delta|^2\big)\,dx \leqslant c\delta^2 \int\limits_\Omega |f|^2\,dx$$
или эквивалентная оценка
$$\int\limits_\Omega \big(\delta^{1-m}|E^\delta_x|^2 + (1 - \delta^{m+1} - \delta^{3-m})|E^\delta|^2\big)\,dx \leqslant c\delta^{3-m} \int\limits_\Omega |f|^2\,dx.$$
Следовательно, $\int\limits_\Omega |E^\delta_x|^2\,dx \leqslant c\delta^2 \int\limits_\Omega |f|^2\,dx$. С использованием неравенства Пуанкаре можно показать, что неравенство $\int\limits_\Omega |E^\delta|^2\,dx \leqslant c\delta^2 \int\limits_\Omega |f|^2\,dx$ выполняется равномерно по δ. Значит, последовательность E^δ сильно сходится к нулю в $H^1_0(\Omega)$.

Обозначим $\tilde E^\delta = E^\delta/\delta^{3-m}$. Нетрудно показать, что $\tilde E^\delta$ удовлетворяет уравнению
$$\delta^{1-m}\int\limits_\Omega \Big(\frac{\tilde E^\delta_x \varphi^*_x}{\mu_\delta} - \varkappa^2_\delta \tilde E^\delta \varphi^*\Big)\,dx = -\int\limits_\Omega \big(i\bar\alpha_\sigma\{\tilde E^\delta[2\varphi^* - \delta g_\delta \varphi^*_x] - \delta g_\delta \varphi^* \tilde E^\delta_x\} - 4i\pi\omega\alpha_s^2 f\varphi^*\big)\,dx\,dx \tag{46}$$
при любой функции $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. Функции E^δ/δ и $\delta^{(1-m)/2}\tilde E^\delta_x$ ограничены в $L^2(\Omega)$. Переходя к пределу в уравнении (46) при $\delta \to 0$, получаем, что E^δ/δ^{3-m} сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $\tilde E^0$, заданной равенством
$$\tilde E^0 = \frac{4\pi\omega\alpha_s^2}{2\bar\alpha_\sigma} f.$$

Функция $\tilde{E}^0$ является первым членом в первом из асимптотических разложений

$$E^\delta = \delta^{3-m}\tilde{E}^\delta = \delta^2(\tilde{E}^0 + \delta\tilde{E}^1 + \dots), \qquad D^\delta = \delta^{3-m}(\tilde{D}^0 + \delta\tilde{D}^1 + \dots)$$

и удовлетворяет уравнению (36) с эффективными параметрами, заданными формулами (37).

Заключение. Для различных значений длины волны l_w и длины скин-слоя l_s выполнена двухмасштабная гомогенизация гармонических по времени уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные волны в композитном материале со слоистой периодической структурой и малым периодом порядка δ во внешнем гармоническом по времени электрическом поле с частотой ω. Величины l_w и l_s рассматривались в зависимости от частоты ω и параметра δ. Учитывались межфазные поверхностные токи, которые возбуждаются внешними полями, действующими вдоль слоев. Характеристиками межфазного слоя являются его толщина и комплекснозначная электрическая проводимость. Дифференциальные уравнения задачи исследованы в слабой вариационной формулировке с учетом граничных и межфазных условий. В зависимости от частоты получены энергетические оценки решения задачи, равномерные по параметру δ, и установлена ее однозначная разрешимость. Выведены макроуравнения и получены эффективные параметры, такие как магнитная и диэлектрическая проницаемости и электрическая проводимость. Описаны условия, при которых эффективные параметры зависят от межфазных токов. В то же время установлено, что в отсутствие преломления эти параметры не зависят от частоты. Результаты асимптотического анализа показывают, что при специально выбранных параметрах межфазного слоя эффективная диэлектрическая проницаемость может быть отрицательной, если ее определять через волновое число.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Amirat Y., Shelukhin V. V.** Homogenization of time harmonic Maxwell equations: the effect of interfacial currents // Math. Methods Appl. Sci. 2017. V. 40, iss. 8. P. 3140–3162.
2. **Tournassat C., Chapron Y., Leroy P., et al.** Comparison of molecular dynamics simulations with triple layer and modified Gouy — Chapman models in a 0.1 M NaCl-montmorillonite system // J. Colloid Interface Sci. 2009. V. 339. P. 533–541.
3. **Bludov Yu. V., Ferreira A., Peres N. M. R., Vasilevskiy M. I.** A primer on surface plasmon-polaritons in grafene // Intern. J. Modern Phys. B. 2013. V. 27, N 10. 1341001.
4. **Kristensson G.** Homogenization of corrugated interfaces in electromagnetics // Progr. Electromagnetic Res. 2005. V. 55. P. 1–31.
5. **Shelukhin V. V., Terentev S. A.** Frequency dispersion of dielectric permittivity and electric conductivity of rocks via two-scale homogenization of the Maxwell equations // Progr. Electromagnetic Res. B. 2009. V. 14. P. 175–202.
6. **Шелухин В. В., Терентьев С. А.** Гомогенизация уравнений Максвелла и дисперсия Максвелла — Вагнера // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 3. С. 402–406.
7. **Wellander N.** Homogenization of the Maxwell equations: Case 2. Nonlinear conductivity // Appl. Math. 2002. V. 47, N 3. P. 255–283.
8. **Lagarkov A. N., Kisel V. N., Semenenko V. N.** Wide-angle absorption by the use of a metamaterial plate // Progr. Electromagnetics Res. Lett. 2008. V. 1. P. 35–44.
9. **Amirat Y., Shelukhin V. V.** Homogenization of time harmonic Maxwell equations and the frequency dispersion effect // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 95. P. 420–443.
10. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2005.

11. **Bourg I. C., Sposito G.** Molecular dynamics simulations of the electrical double layer on smectite surfaces contacting concentrated mixed electrolyte ($NaCl$–$CaCl_2$) solutions // J. Colloid Interface Sci. 2011. V. 360. P. 701–715.
12. **Nguetseng G.** A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, N 3. P. 608–623.
13. **Sarabandi K., Ulaby F. T.** Techniques for measuring the dielectric constant of thin materials // IEEE Trans. Instrument. Measurement. 1988. V. 4. P. 631–636.
14. **Boughriet A. H., Legrand C., Chapoton A.** Non-iterative stable transmission/reflection method for low-loss material complex permittivity determination // IEEE Trans. Microwave Theory Methods. 1997. V. 45, N 1. P. 52–57.
15. **Браун В.** Диэлектрики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
16. **Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., et al.** Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 4, N 18. P. 4184–4187.

Поступила в редакцию 28/VIII 2018 г.,
после доработки — 28/VIII 2018 г.
Принята к публикации 29/IV 2019 г.