

О ПРИЭЛЕКТРОДНЫХ СЛОЯХ В ТЕЧЕНИЯХ ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ НЕВЯЗКОЙ ПЛАЗМЫ

А. И. Морозов, А. П. Шубин

(Москва)

В линейном приближении рассмотрена структура электромагнитных приэлектродных слоев, возникающих при течениях поперек магнитного поля полностью ионизованной, хорошо проводящей и невязкой плазмы с большим магнитным числом Рейнольдса. В качестве конкретных течений взяты: обтекание волнистой стенки и течение в плоском канале медленно меняющегося сечения с секционированными электродами. Показана возможность образования «бездиссипативных» приэлектродных слоев с толщинами, порядка дебаевского или электронного ларморовского радиусов, и «диссипативных», с толщиной, порядка толщины скин-слоя, рассчитанного по скорости диффузии вещества в магнитном поле [2].

При течении плазмы в поперечном магнитном поле вблизи стенок, наряду с «газодинамическими» пограничными слоями, обязанными своим возникновением вязкости, теплопроводности и т. д. (структура этих слоев из-за наличия электромагнитных полей может существенно отличаться от обычных газодинамических), возникают также собственно электромагнитные пограничные слои. Примером таких слоев может служить дебаевский слой, в котором происходит нарушение квазинейтральности плазмы. В целом ряде случаев не менее важным является квазинейтральный электромагнитный пограничный слой, в котором происходит резкое изменение параметра «вмороженности»  $k = B / \rho$  ( $B$  — магнитное поле,  $\rho$  — плотность среды). Особую роль играет этот слой в том случае, когда необходимо явно учитывать эффект Холла и связанное с ним возникновение продольного (в направлении скорости  $v$  среды) электрического поля; будем называть его магнитным. Магнитный пограничный слой может быть как «диссипативным», так и «недиссипативным» (см. ниже). «Диссипативный» магнитный слой рассмотрен в целом ряде работ: для несжимаемой среды с заданным законом движения в [1], для сжимаемой хорошо проводящей среды — в [2] и для плохой проводимости — в [3]. В данной работе основное внимание будет уделено бездиссипативным магнитным пограничным слоям.

На характер электромагнитных и, в особенности, магнитных пограничных слоев при течении в каналах поперек магнитного поля существенно влияют два фактора: величина проводимости плазмы и степень проявления эффекта Холла, характеризующаяся величиной параметра обмена

$$\xi = I / envf$$

где  $f$  — ширина,  $I$  — разрядный ток,  $v$  — скорость плазмы,  $n$  — число частиц в  $1 \text{ см}^3$ ,  $e$  — элементарный заряд (см. [4]).

Кроме того, течение плазмы характеризуется магнитным числом Рейнольдса

$$R_m = vL / \nu_m \quad (\nu_m = c^2 / 4 \pi \sigma)$$

Здесь  $L$  — характерный продольный масштаб длины,  $\nu_m$  — магнитная вязкость среды,  $\sigma$  — проводимость среды. Если  $\xi$  мал (траектории ионной и электронной компонент плазмы практически совпадают) и выполнено условие

$$R_m \gg L^2 / f^2$$

то электромагнитные слои локализованы вблизи стенок. Если при этом необходимо учитывать влияние конечной проводимости плазмы (т. е. диссипацию), то образуются «диссипативные» слои, толщина которых нарастает по диффузионному закону и зависит от величины проводимости; если же проводимость плазмы можно считать бесконечной, то образуются «бездиссипативные» слои, толщина которых определяется локальными характеристиками потока и является величиной порядка «местных» значений дебаевского или электронного ларморовского радиусов.

Однако если  $\xi \gtrsim 1$  (траектории ионной и электронной компонент существенно различны, точнее — угол между ними — величина порядка  $f / L$ ), то возмущения параметра «вмороженности»  $k$  и других характеристик плазмы переносятся электронами на весь объем канала, что при учете диссипации приводит к образованию одного прианодного слоя [2].

Вследствие такого «переноса возмущений электронами» при  $\xi \geq 1$  «плохие» граничные условия могут совершенно разрушить «идеальную» картину течения.

В дальнейшем будем интересоваться только электромагнитными слоями и с этой целью рассмотрим плоское течение поперек магнитного поля полностью ионизованной, хорошо проводящей и невязкой плазмы с большим магнитным числом Рейнольдса <sup>1</sup>  $R_m \gg L^2 / \nu^2$  в предположении, что  $L^2 / f^2 \gg 1$ .

Уже расчет обычных газодинамических пограничных слоев представляет собой, как правило, очень сложную задачу. В случае же течения плазмы в электромагнитном поле положение становится еще более трудным, поскольку появляется большое число электромагнитных характеристик и параметров. Однако в газодинамике качественно правильные результаты получаются при рассмотрении линеаризованных задач, когда возмущения потока граничными условиями предполагаются малыми. Поэтому далее будем рассматривать только линейное приближение по возмущениям. Для течений с  $\xi \geq 1$  это тем более обосновано, поскольку из сказанного выше ясно, что такое течение не может быть разбито на некоторый «основной» поток и пограничные слои, и, следовательно, корректный нелинейный расчет методом приближения пограничного слоя бессмыслен.

**§ 1. Исходная система уравнений. Задача об обтекании плазмой волнистой стенки.** Для описания стационарных течений плазмы будем пользоваться системой уравнений двухжидкостного гидродинамического приближения (для ионной и электронной компонент) и уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= -\frac{\nabla p_i}{n_i} + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) - m \frac{n_e}{n_i} \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e}{\tau} \\ m(\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e &= -\frac{\nabla p_e}{n_e} - e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) + m \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e}{\tau} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0, \quad \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

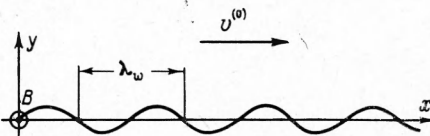
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e), \quad \sigma = n_e e^2 \tau / m, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi c^{-1} e (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$$

$$p_i = p_i(n_i), \quad p_e = p_e(n_e).$$

Здесь  $M$  и  $m$  — массы иона (предполагается однократно заряженным) и электрона,  $n_{i,e}$ ,  $p_{i,e}$ ,  $v_{i,e}$  — число частиц в  $1 \text{ см}^3$ , газокинетическое давление и скорость компонент, соответственно,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы электрического и магнитного полей,  $\tau$  — время электрон-ионных соударений,  $\sigma$  — проводимость плазмы.

Рассмотрим вначале течение с малым параметром обмена  $\xi$ , а именно — обтекание волнистой стенки однородным потоком плазмы (см. фиг. 1). Скорость  $\mathbf{v}^{(0)}$  невозмущенного потока считаем направленной вдоль оси  $x$ , магнитное поле  $\mathbf{B}$  перпендикулярно плоскости чертежа. Для применимости линейной теории необходимо, и это будет предполагаться в дальнейшем, чтобы высота выступов стенки  $a$  была мала по сравнению с расстоянием  $\lambda_w$  между ними (слабая «волнистость»)

$$a / \lambda_w \ll 1 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Величина  $\xi$  в данной задаче — порядка  $a / \lambda_w$ .

В соответствии с этим, возмущения  $F^{(1)}$  параметров потока (плотности, скорости и т. д.) предполагаются малыми по сравнению с невозмущенными величинами  $F^{(0)}$

$$F^{(1)} \sim (a / \lambda_w) F^{(0)} \ll F^{(0)} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Случай  $R_m \ll 1$  неоднократно рассматривался ранее.

Задавая возмущения в виде  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k} = \{q, \kappa\}$ ,  $q = 2\pi/\lambda_x$ , получим из (1.1) после линеаризации

$$\begin{aligned} iMqv^{(0)}\mathbf{v}_i^{(1)} &= -ikc_i^2 \frac{n_i^{(1)}}{n^{(0)}} + e \left( \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\mathbf{v}_i^{(1)}}{c} \times \mathbf{B}^{(0)} + \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \times \mathbf{B}^{(1)} \right) - \frac{m}{\tau} (\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_e^{(1)}) \\ imqv^{(0)}\mathbf{v}_e^{(1)} &= -ikc_e^2 \frac{n_e^{(1)}}{n^{(0)}} - e \left( \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\mathbf{v}_e^{(1)}}{c} \times \mathbf{B}^{(0)} + \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \times \mathbf{B}^{(1)} \right) + \frac{m}{\tau} (\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_e^{(1)}) \\ n^{(0)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i^{(1)}) + qv^{(0)}n_i^{(1)} &= 0, \quad n^{(0)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e^{(1)}) + qv^{(0)}n_e^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}^{(1)} = -\frac{4\pi ie}{c} \{n^{(0)}(\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_e^{(1)}) + \mathbf{v}^{(0)}(n_i^{(1)} - n_e^{(1)})\}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(1)} = -4\pi ie(n_i^{(1)} - n_e^{(1)})$$

$$c_i^2 = \frac{dp_i^{(0)}}{M dn^{(0)}}, \quad c_e^2 = \frac{dp_e^{(0)}}{m dn^{(0)}}$$

Здесь  $c_i, c_e$  — тепловые скорости «звука» составляющих компонент, индексами 0 и 1 отмечены невозмущенные величины и их возмущения.

Полагаем далее, что векторы  $\mathbf{v}_{i,e}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}$  лежат в плоскости  $xy$ , а  $\mathbf{B}^{(1)}$  имеет только поперечную (по оси  $z$ ) составляющую. Для того чтобы система (1.4) имела нетривиальные решения, должен обращаться в нуль ее определитель, и компоненты вектора  $\mathbf{k}$  оказываются, таким образом, связанными так называемым дисперсионным уравнением.

В обычной теории плазменных колебаний рассматриваются нестационарные возмущения покоящейся среды типа  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$ ; при этом дисперсионное уравнение

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (1.5)$$

Отсюда находится зависимость  $\omega$  от компонент вектора  $\mathbf{k}$ .

В случае  $\omega = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^{(0)}$  дисперсионное уравнение имеет вид

$$D(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{k}) = 0 \quad (1.6)$$

давая, тем самым, связь компонент волнового вектора; именно, в нашем конкретном случае

$$\kappa = \varphi_s(q) \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

Видно, что уравнения (1.5) и (1.6), вообще говоря, отличаются друг от друга.

Ввиду громоздкости общего дисперсионного уравнения системы (1.4) рассмотрим отдельно случаи «хорошей» и «плохой» проводимости.

Предположим вначале, что  $qv^{(0)}\tau \gg 1$ . Это означает, что вероятность электрон-ионного столкновения за время прохождения выступа стенки мала. Тогда проводимость плазмы можно считать бесконечной и дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ k^2 c_e^2 + \omega_{pe}^2 + \omega_e^2 \frac{\omega_{pi}^2 + k^2 c^2}{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 c^2} - q^2 v_{(0)}^2 \right] \times \\ & \times \left[ k^2 c_e^2 + \omega_{pi}^2 + \omega_i^2 \frac{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 c^2} - q^2 v_{(0)}^2 \right] = \\ & = \left[ \omega_{pi}^2 + \omega_i^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 c^2} \right] \left[ \omega_{pe}^2 + \omega_e^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 c^2} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$k^2 = q^2 + \kappa^2, \quad \omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n^{(0)} e^2}{M}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n^{(0)} e^2}{m}, \quad \omega_i = \frac{eB^{(0)}}{Mc}, \quad \omega_e = \frac{eB^{(0)}}{mc}$$

Если выполнено условие

$$q^2 \Lambda_i^2 \ll \frac{M}{m} \quad \left( \Lambda_i = \frac{Mc v^{(0)}}{eB^{(0)}} \right)$$

где  $\Lambda_i$  — ионный ларморовский радиус, определенный по скорости  $v^{(0)}$ , то получаем

$$\kappa_1^2 = q^2 \frac{v^{(0)2} - c_n^2}{c_n^2}, \quad \kappa_2^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 c_n^2}{c^2 c_T^2}, \quad \kappa_3^2 = -\frac{\omega_{pi}^2}{c_i^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c_e^2} = -\left(\frac{1}{D_i^2} + \frac{1}{D_e^2}\right),$$

$$c_n^2 = c_T^2 + c_A^2, \quad c_T^2 = c_i^2 + \frac{m}{M} c_e^2, \quad c_A^2 = \frac{B^{(0)2}}{4\pi M n^{(0)}} \quad (1.9)$$

Здесь  $c_T$  — тепловая скорость звука,  $c_A$  — альфвеновская скорость,  $c_n$  — скорость магнитного звука.

Если же  $\Lambda_i^2 q^2 \gg M/m$ , то (1.10)

$$\kappa_1^2 = -q^2 \left(1 - \frac{v^{(0)2}}{c_T^2}\right), \quad \kappa_2^2 = -q^2, \quad \kappa_3^2 = -\frac{\omega_{pe}^2}{c_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{c_i^2 - v^{(0)2}} - q^2$$

В обоих предельных случаях корень  $\kappa_1^2$  описывает магнитозвуковые возмущения, проникающие при сверхзвуковых ( $v^{(0)} > c_n$ ) течениях в глубь потока. Два других корня дают поверхностные волны, т. е. соответствующие возмущения локализованы вблизи стенки. Один из них ( $\kappa_3^2$ ) возникает при нарушении квазинейтральности и, как легко видеть, связан с дебаевской длиной экранирования. Корень  $\kappa_2^2$  в первом предельном случае равен  $-\omega_{pe}^2 / c_T^2$  при  $c_T \gg c_A$  (поперечные электронные колебания), либо  $-\omega_e^2 / c_T^2$  при  $c_T \ll c_A$  (при этом толщина слоя  $\delta_2 = 1 / |\kappa_2|$  равна электронному ларморовскому радиусу, рассчитанному по скорости  $c_T$ ). Во втором предельном случае корень  $\kappa_2^2$  описывает гармонические (вакуумные) возмущения. Корни  $\kappa_{2,3}$  описывают, очевидно, «бездиссипативные» пограничные слои, толщина которых определяется локальными характеристиками потока, т. е. не нарастает в пространстве, как это имеет место, например, в случае обычных вязкостных пограничных слоев. Наличие трех корней  $\kappa$  позволяет ставить три граничных условия на стенке, таковыми могут быть: условие на нормальную к стенке компоненту скорости, условие на электрическое поле и условие на электрический ток.

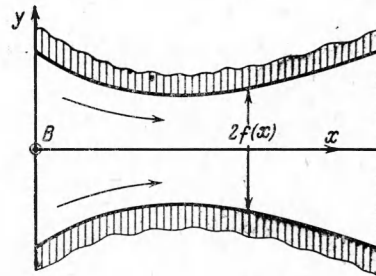
Рассмотрим случай  $qv_{\perp} \tau \ll 1$ , когда необходимо учитывать влияние конечной проводимости. Для квазинейтральной плазмы при этом получается следующее дисперсионное уравнение:

$$(q^2 v^{(0)2} - k^2 c_T^2) \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2 \tau} = i q v^{(0)} (q^2 v^{(0)2} - k^2 c_n^2) \quad (1.11)$$

Если  $(qc^2 / v_{\perp}, \omega_{pe}^2 \tau) \rightarrow 0$ , то

$$\kappa_1^2 = q^2 \frac{v^{(0)2} - c_n^2}{c_n^2}, \quad \kappa_2^2 = i q v^{(0)} \frac{c_n^2}{v_m c_T^2}$$

$$\left(v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \quad (1.12)$$



Фиг. 2

Первый корень, как и раньше, описывает магнитозвуковые возмущения, второй корень дает «диссипативный» магнитный пограничный слой. Толщина этого слоя  $\delta_2 = 1 / |\kappa_2|$  равна толщине скин-слоя, рассчитанного по скорости диффузии вещества в поле. Это означает, что в реальных условиях толщина этого слоя будет нарастать по мере удаления от передней кромки.

§ 2. Бездиссипативное течение в канале медленно меняющегося сечения при произвольном параметре обмена. Ниже будет рассмотрено стационарное плоское течение плазмы поперек магнитного поля в канале медленно меняющегося сечения (см. фиг. 2), т. е. когда длина канала  $L$  велика по сравнению с его шириной  $2f$ . Течение будем предполагать бездиссипативным, диссипативные течения квазинейтральной плазмы были рассмотрены ранее (см. [2]). Электроды — стенки канала предполагаем рассеченными на узкие (точнее — бесконечно узкие) секции, электрически изолированные друг от друга. Как известно, секционирование электродов позволяет в принципе осуществить в узком канале квазиодномерное течение, при котором все параметры потока (кроме потенциала) медленно зависят лишь от продольной координаты  $x$ .

Если слегка закоротить секции, поставив между ними большие, но конечные сопротивления, то появятся малые возмущения идеальных граничных условий и, как следствие этого, возникнут пограничные слои.

При отсутствии диссипации оказывается удобным описание течений при помощи функций тока  $\psi_{i,e}$ , которые вводятся следующим образом

$$n_k v_{kx} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \quad n_k v_{ky} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \quad (k = i, e) \quad (2.1)$$

В принятой выше двухжидкостной модели система уравнений, описывающая течение, имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{M}{2n_i^2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 \right] + w_i + e\varphi &= U_i(\psi_i) \\ \frac{m}{2n_e^2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \right)^2 \right] + w_e - e\varphi &= U_e(\psi_e), \quad w_k = \int \frac{1}{n_k} dp_k \\ \frac{B}{n_i} + \frac{c}{e} \frac{dU_i}{d\psi_i} &= \frac{Mc}{en_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{n_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right], \quad B = \frac{4\pi}{c} e(\psi_i - \psi_e) \\ \frac{B}{n_e} - \frac{c}{e} \frac{dU_e}{d\psi_e} &= -\frac{mc}{en_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{n_e} \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n_e} \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \right) \right], \quad \Delta\varphi = -4\pi e(n_i - n_e) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $U_{i,e}$  — произвольные функции от  $\psi_i, \psi_e$  соответственно,  $w_k$  — «энтальпии» компонент,  $\varphi$  — электростатический потенциал. Для канала медленно меняющегося сечения оказывается возможным существенно упростить систему (2.2), используя приближение пограничного слоя, т. е. пренебрегая квадратом первых производных и вторыми производными по продольной координате  $x$  по сравнению с таковыми по поперечной координате  $y$ , как малыми, порядка  $f^2/L^2$  [5].

В качестве невозмущенного течения (характеристики которого отметим индексом 0) выберем квазиодномерное течение

$$\begin{aligned} n_i^{(0)} &= n_e^{(0)} = n_0(x), \quad B^{(0)} = B_0(x) \\ U_i^{(0)} &= U_{0i} - eB_0 c^{-1} n_0^{-1} \psi_i^{(0)}, \quad U_e^{(0)} = U_{0e} + eB_0 c^{-1} n_0^{-1} \psi_e^{(0)}, \quad U_{0e} = \text{const} \\ \psi_i^{(0)} &= (n_0 v_0 f) \zeta, \quad \psi_e^{(0)} = (n_0 v_0 f) (\zeta - \xi b_0), \quad \zeta = y/f, \quad \xi = cB_0(0)/4\pi e(n_0 v_0 f) \\ b &= B/B_0(0), \quad B_0/n_0 = \text{const}, \quad n_0 v_0 f = \text{const} \\ \varphi^{(0)} &= \varphi_{00}(x) - c^{-1} n_0^{-1} B_0(n_0 v_0 f) \zeta \\ Mv_0^2/2 + w_i^{(0)}(n_0) + e\varphi_{00} &= U_{0i} = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $f$  — полуширина канала;  $\xi$  — параметр обмена для канала бесконечной длины, когда  $B_0 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow L$ ; начало координат  $x = 0$  выбрали на входе в канал, где  $v_0 = 0$ .

Введем безразмерные величины

$$\Psi = \frac{\psi}{n_0 v_0 f}, \quad \Phi = \frac{e\varphi}{Mc_A^2(0)}, \quad N = \frac{n}{n_0} \quad \left( c_A^2(0) = \frac{B_0^2(0)}{4\pi M n_0(0)} \right) \quad (2.4)$$

Предполагая возмущения квазиодномерного течения малыми, линеаризуем систему (2.2); индекс 1 у возмущений опускаем

$$\begin{aligned} \xi b &= \Psi_i - \Psi_e, \quad \frac{c_A^2(0)}{(v_0 c_p)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = N_e - N_i \left( \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M} \right) \\ \left( \frac{\xi v_0^2}{c_A^2(0)} \frac{\partial}{\partial \zeta} + 1 \right) \Psi_i + \frac{\xi c_i^2}{c_A^2(0)} \left( 1 - \frac{v_0^2}{c_i^2} \right) N_i + \xi \Phi &= g_i(\zeta) \\ \left( \frac{m}{M} \frac{\xi v_0^2}{c_A^2(0)} \frac{\partial}{\partial \zeta} - 1 \right) \Psi_e + \frac{\xi c_e^2}{c_A^2(0)} \left( 1 - \frac{m}{M} \frac{v_0^2}{c_e^2} \right) N_e - \xi \Phi &= g_e(\zeta - \xi b_0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_i - \Psi_e - \xi b_0 N_i + \xi b_0 \frac{dg_i(\zeta)}{d\zeta} &= \frac{\xi^2 v_0^2 b_0}{c_A^2(0)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial \zeta} - N_i \right) \\ \Psi_i - \Psi_e - \xi b_0 N_e - \xi b_0 \frac{\partial g_e(\zeta - \xi b_0)}{\partial \zeta} &= -\frac{m}{M} \frac{\xi^2 v_0^2 b_0}{c_A^2(0)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \Psi_e}{\partial \zeta} - N_e \right) \\ g_i(\zeta) &= \frac{\xi}{M c_A^2(0)} \delta U_i(\zeta), \quad g_e(\zeta - \xi b_0) = \frac{\xi}{M c_A^2(0)} \delta U_e(\zeta - \xi b_0) \end{aligned}$$

При линейризации считалось, что возмущения функций  $U_k$  ( $\psi_k$ ) имеют вид

$$U_k^{(1)} = \delta U_k(\psi_k^{(0)}) - \frac{e_k B_0}{c n_0} \psi_k^{(1)} \quad (k = i, e) \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что функции  $\delta U_k$  соответствуют наличию возмущений изомагнитности

$$\delta \left( \frac{B}{n_k} \right) = \frac{B_0}{n_0} \left( \frac{B^{(1)}}{B_0} - \frac{n_k^{(1)}}{n_0} \right)$$

на входе в канал и на стенках. Скорости  $c_k$  введены из соотношений

$$dw_k = M c_k^2 dN_k$$

и представляют собой скорости звука для ионов и электронов. Вместо уравнений (2.5.5), (2.5.6) можно, используя (2.5.3) и (2.5.4), получить

$$\Psi_e - \Psi_i = \frac{c_A^2(0)}{(j\omega_p)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + u(x) + \xi \left( \frac{c_i^2}{c_A^2(0)} N_i + \frac{c_e^2}{c_A^2(0)} N_e \right) \quad (2.7)$$

$$\Psi_e - \Psi_i = \xi b_0 \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Psi_i + \xi \Phi + \xi \frac{c_i^2}{c_A^2(0)} N_i \right) - N_i \right] \quad (2.8)$$

Здесь  $u(x)$  — произвольная функция. Система уравнений (2.5), (2.7) и (2.8) сводится к следующим двум уравнениям

$$\alpha_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \zeta} + \beta_i N_i = a_i, \quad \alpha_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \zeta} + \beta_e N_e = a_e \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{\xi} \left( \frac{c_A(0)}{j\omega_p} \right)^2 + \left[ \frac{c_e^2 + v_0^2}{(j\omega_p)^2} - b_0 \left( \frac{\xi v_0}{c_A(0)} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} + \xi \left( \frac{v_0 c_e}{j\omega_p c_A(0)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \alpha_e &= \xi \left( \frac{v_0}{c_A(0)} \right)^2 + \left( \frac{c_A(0)}{j\omega_p} \right)^2 + \left( \frac{v_0}{j\omega_p} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{m}{M} \xi \left( \frac{c_e v_0}{c_A(0) j\omega_p} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \\ &\quad - \frac{m}{M} \left( \frac{\xi v_0^2 c_e}{j\omega_p c_A^2(0)} \right)^2 \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= -\xi \left( \frac{c_n}{c_A(0)} \right)^2 + \left[ \frac{c_i^2 - v_0^2}{(j\omega_p)^2} + b_0 \left( \frac{\xi v_0}{c_A(0)} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} + \xi (c_i^2 - v_0^2) \left( \frac{c_e}{c_A(0) j\omega_p} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \beta_e &= -\xi \left( \frac{v_0}{c_A(0)} \right)^2 + \left[ \frac{m}{M} \left( \frac{\xi v_0 c_T}{c_A^2(0)} \right)^2 + \frac{c_i^2 - v_0^2}{(j\omega_p)^2} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{m}{M} \xi (v_0^2 - c_i^2) \left( \frac{c_e v_0}{j\omega_p c_A^2(0)} \right)^2 \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} \end{aligned}$$

$$a_i = u(x) + \left[ \frac{1}{\xi} \left( \frac{c_A(0)}{j\omega_p} \right)^2 - \xi b_0 + \left( \frac{c_e}{j\omega_p} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} g_i(\zeta)$$

$$\begin{aligned} a_e &= u(x) + g_e(\zeta - \xi b_0) + \left\{ \left[ 1 - \frac{m}{M} \xi \left( \frac{v_0}{c_A(0)} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left[ \frac{1}{\xi} \left( \frac{c_A(0)}{j\omega_p} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{c_e}{j\omega_p} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} + \left( \frac{c_e}{j\omega_p} \right)^2 \left[ \frac{m}{M} \left( \frac{v_0}{c_e} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 1 \right\} g_i(\zeta) \\ &\quad (c_T^2 = c_i^2 + c_e^2, \quad c_n^2 = c_T^2 + c_A^2) \end{aligned}$$

Операторы  $\alpha$  и  $\beta$  коммутативны. Из системы (2.9) получаем

$$(\alpha_e \beta_i - \alpha_i \beta_e) N_i = \alpha_e a_i - \alpha_i a_e, \quad (\alpha_e \beta_i - \alpha_i \beta_e) \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi_i = \beta_i a_e - \beta_e a_i \quad (2.11)$$

Пусть  $g_i(\xi) = 0$ , т. е. возмущения  $(b - N_i)$  на входе отсутствуют. При этом

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi} + \beta_i N_i \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha_e \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi} + \beta_e N_i \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} g_e(\xi - \xi b_0) \quad (2.12)$$

Введем функцию  $z$ , полагая  $\partial^2 \Psi_i / \partial \xi^2 = -\beta_i z$ ,  $\partial N_i / \partial \xi = \alpha_i z$ . Тогда первое уравнение будет удовлетворено, а второе уравнение даст

$$(\alpha_i \beta_e - \alpha_e \beta_i) z = \frac{\partial}{\partial \xi} g_e(\xi - \xi b_0) \quad (2.13)$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x} + \xi \frac{db_0}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\alpha_i \beta_e - \alpha_e \beta_i) z = 0 \\ & \alpha_i \beta_e - \alpha_e \beta_i = \frac{m}{M} \left( \frac{c_e c_i c^2}{c_A c_A (0) (f \omega_p)^2} \right)^2 \left[ \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \frac{M}{m} \frac{c_i^2 - v_0^2}{\xi c_i^2 c^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{c_T f \omega_{T1}}{c_i c_e} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{M}{m \xi} \left( \frac{c_n c_A (0) f \omega_p}{c c_e c_i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{M}{m} \left( \frac{c_n (f \omega_p)^2}{c c_e c_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решениями уравнения  $(\alpha_i \beta_e - \alpha_e \beta_i) F = 0$  будут

$$F_1 = e^{\pm \kappa_1 \xi}, \quad \kappa_1^2 = \left( \frac{f \omega_p c_T}{c_i c_e} \right)^2, \quad F_2 = e^{\pm \kappa_2 \xi}, \quad \kappa_2^2 = \left( \frac{f \omega_p c_n}{c c_T} \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 \quad (2.15)$$

Непосредственной подстановкой  $\kappa_{1,2}$  в (2.14) легко показать, что члены, содержащие первую и третью производные по  $\xi$ , малы. Корень  $\kappa_1$  соответствует электромагнитному слою с толщиной порядка дебаевской длины экранирования, а корень  $\kappa_2$  — слою с толщиной порядка электронного ларморовского радиуса (при  $c_A \gg c_T$ ), вычисленного по «полной» скорости звука  $c_T$ . При  $\xi \rightarrow \infty$  решение уравнения (2.14) имеет вид

$$z = \chi(\xi - \xi b_0) + f_{11}(x) \exp[\kappa_1(\xi - 1)] + f_{12}(x) \exp[-\kappa_1(\xi + 1)] + f_{13}(x) \exp[\kappa_2(\xi - 1)] + f_{14}(x) \exp[-\kappa_2(\xi + 1)] \quad (2.16)$$

Это соответствует наличию приэлектродных слоев и переносу возмущений вдоль невозмущенных электронных траекторий. Если  $g_i(\xi) \neq 0$ , то необходимо решать уравнения (2.11), (2.12), более сложные, нежели уравнение (2.14). Последнее имеет при конечных  $\xi$  решение более сложной структуры, нежели даваемое (2.16), так как операторы

$$\frac{\partial}{\partial x} + \xi \frac{db_0}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \alpha_i \beta_e - \alpha_e \beta_i$$

некоммутативны.

Поступила 5 VII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвитц Г., Килб Р., Саттон Г. Влияние тензорной проводимости на распределение тока в магнитогидродинамическом генераторе. Сб. «МГД-метод преобразования энергии», 1963.
2. Морозов А. И., Шубин А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофиз. выс. температур, 1965, т. 3, № 6.
3. Любимов Г. А. О вязком пограничном слое на электроде при переменной электропроводности среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
4. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Об одном параметре подобия в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 1.
5. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоское течение идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 7.