

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ОДНОРОДНОГО  
«ПЯТНА» В ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ  
ПО ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ

*Б. Г. Кузнецов, Г. Г. Черных*

*(Новосибирск)*

В работе проведено численное исследование течения, возникающего в результате коллапса однородного пятна в тяжелой идеальной линейно-стратифицированной по плотности жидкости. Используется нелинейная модель явления. Дано сравнение численных и экспериментальных результатов.

1. Рассматривается плоское нестационарное течение, возникающее в результате коллапса однородного «пятна» (области жидкости с постоянной плотностью) в тяжелой идеальной стратифицированной по плотности жидкости. Предполагается, что стратификация жидкости вызвана растворением в ней соли.

Коллапс пятна в стратифицированной по плотности жидкости и связанное с ним возникновение и распространение внутренних волн исследовались в ряде теоретических и экспериментальных работ. Из экспериментальных отметим работы [1, 2]. В работе [3] численно исследуется коллапс пятна и возникающие вследствие этого внутренние волны, причем стратификация жидкости предполагается слабой. Это позволило автору на основе приближения Буссинеска [4] линеаризовать относительно плотности систему уравнений, описывающих задачу.

В работе [5] проводится численное и аналитическое исследование коллапса пятна, причем предполагалось, что давление на границе пятна распределено по гидростатическому закону. В работе [6] строится приближенная система дифференциальных уравнений, описывающих поведение пятна; полученная приближенная система уравнений представляет собой линеаризованную систему уравнений гидродинамики идеальной жидкости и решается аналитически. В работе [7] наряду с экспериментальным исследованием пятна строится также приближенная система уравнений, которая решается аналитически.

Неоднородное пятно со стратификацией, отличной от стратификации внешней к пятну области жидкости, исследовалось в работе [8]. В рассматриваемой постановке задачи в отличие от [3] не предполагается, что стратификация является слабой; учитывается наличие диффузии соли в растворе. Задача решается численно с применением экономичных разностных схем [9].

2. Будем предполагать, что пятно помещено в прямоугольный бак с достаточно удаленными непроницаемыми для жидкости стенками. Верхнюю и нижнюю стенки бака обозначим через  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ , правую и левую вертикальные стенки — через  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_4$ . Пятно (в начальный момент времени) будем также считать прямоугольным с соответствующими участками границ  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  и помещенным в центре бака.

Обозначим область бака, внешнюю в начальный момент времени к пятну, через  $\Omega_1$ , область бака, занятую пятном в начальный момент времени, — через  $\Omega_2$ , так что бак представляет собой область  $\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Пусть далее  $u, v$  — компоненты вектора среднемассовой скорости частиц чистой жидкости;  $u_1, v_1$  — компоненты вектора среднемассовой скорости частиц растворенной соли;  $u_2, v_2$  — компоненты скорости частиц раствора;  $\rho$  — плотность раствора:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ , где  $\rho_2 = \text{const}$  — плотность жидкости,  $\rho_1$  — плотность растворенной соли;  $p$  — давление,  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\lambda = \text{const}$  — коэффициент диффузии соли в растворе. Уравнения сохранения массы жидкости и растворенной в ней соли и уравнения изменения импульса смеси в этих обозначениях имеют вид [10]

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0 \\ \rho_t + (\rho_1 u_1)_x + (\rho_1 v_1)_y &= 0 \\ \rho (u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) + p_x &= 0 \\ \rho (v_{2t} + u_2 v_{2x} + v_2 v_{2y}) + p_y &= -g\rho \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нижние индексы  $x, y, t$  означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Добавляя к системе (2.1) соотношения

$$u_1 - u = -\lambda \rho_1^{-1} \rho_{1x}, \quad v_1 - v = -\lambda \rho_1^{-1} \rho_{1y} \quad (2.2)$$

связывающие компоненты скоростей жидкости и растворенной в ней соли, получим замкнутую систему уравнений (2.1), (2.2). Воспользовавшись соотношениями (2.2) и пренебрегая в уравнениях импульсов членами второго порядка относительно  $\lambda$  ( $\lambda$  — величина малая), получим следующую систему уравнений, описывающих рассматриваемую задачу:

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0 \\ \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= \lambda (\rho_{xx} + \rho_{yy}) \\ \rho (u_t + uu_x + vv_y) + p_x &= -\lambda \rho_y (v_x - u_y) \\ \rho (v_t + uv_x + vv_y) + p_y &= \lambda \rho_x (v_x - u_y) - g\rho \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функций  $u, v, p, \rho$  из системы уравнений (2.3) при начальных условиях

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad x, y \in \Omega_3, \quad t = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 - a\rho_0^{-1} y), \quad x, y \in \Omega_1, \quad t = 0 \\ \rho = \rho_0, \quad x, y \in \Omega_2, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $a = \rho_y$  при  $t = 0$ ,  $x, y \in \Omega_1$ ,  $\rho_0 = \text{const}$  (начало координат помещено в центр бака). Искомые функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad x, y \in \Gamma_1, \Gamma_3; \quad u = 0, \quad x, y \in \Gamma_2, \Gamma_4 \\ \rho = \rho_0 (1 - \frac{1}{2} a\rho_0^{-1} L_y), \quad x, y \in \Gamma_1 \\ \rho = \rho_0 (1 + \frac{1}{2} a\rho_0^{-1} L_y), \quad x, y \in \Gamma_3; \quad \rho_x = 0, \quad x, y \in \Gamma_2, \Gamma_4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $L_y$  — вертикальный размер бака.

Пусть  $L$  — горизонтальный размер бака;  $l_x, l_y$  — горизонтальный и вертикальный размеры пятна в начальный момент времени.

Вводя безразмерные независимые переменные и функции

$$\begin{aligned} x_1 = x/L, \quad y_1 = y/L, \quad \rho_3 = \rho/\rho_0 \\ t_1 = t(ag/\rho_0)^{1/2}, \quad u_3 = u/L(ag/\rho_0)^{-1/2} \\ v_3 = v/L(ag/\rho_0)^{-1/2}, \quad p_1 = pL^{-2}(ag)^{-1} \end{aligned}$$

переходя к ним в системе (2.3) и возвращаясь к первоначальным обозначениям, перепишем рассматриваемую систему в виде

$$\begin{aligned} \rho (u_t + uu_x + vv_y) + p_x &= -A\rho_y (v_x - u_y) \\ \rho (v_t + uv_x + vv_y) + p_y &= A\rho_x (v_x - u_y) - B\rho \\ \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= A(\rho_{xx} + \rho_{yy}) \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$A = \lambda L^{-2} (ag / \rho_0)^{-1/2}, \quad B = \rho_0 (aL)^{-1}$$

Переходя к безразмерным величинам в начальных условиях (2.4), перепишем их в виде

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad x, y \in \Omega_3, \quad t = 0 \\ \rho = 1 - B^{-1}y, \quad x, y \in \Omega_1, \quad t = 0 \\ \rho = 1, \quad x, y \in \Omega_2, \quad t = 0 \end{aligned}$$

В условиях (2.5) изменятся лишь значения безразмерной плотности смеси на  $\Gamma_1, \Gamma_3$ , а именно

$$\begin{aligned} \rho = 1 - (a/2) \rho_0^{-1} L y, \quad x, y \in \Gamma_1 \\ \rho = 1 + (a/2) \rho_0^{-1} L y, \quad x, y \in \Gamma_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Безразмерными параметрами, характеризующими задачу, будут следующие:  $L_y / L, l_x / L, l_y / L, A, B$ .

3. Для численного интегрирования рассматриваемой задачи вводится функция тока  $\psi$ :  $u = \psi_y, v = -\psi_x$ . Система (2.6) перепишется так:

$$\begin{aligned} (\rho \psi_{tx})_x + (\rho \psi_{ty})_y &= f \\ \rho_t + (\psi_y \rho)_x - (\psi_x \rho)_y &= A(\rho_{xx} + \rho_{yy}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} (f \equiv \rho(\psi_x \omega_y - \psi_y \omega_x) + \rho_x(B + A\omega_x + \psi_x \psi_{xy} - \psi_y \psi_{xx}) + \rho_y(\psi_x \psi_{yy} - \psi_y \psi_{xy} + \\ + A\omega_y) + A\omega(\rho_{xx} + \rho_{yy}), \quad \omega \equiv \psi_{xx} + \psi_{yy}) \end{aligned}$$

Начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad x, y \in \Omega_3, \quad t = 0 \\ \rho = 1 - B^{-1}y, \quad x, y \in \Omega_1, \quad t = 0 \\ \rho = 1, \quad x, y \in \Omega_2, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Граничные условия (2.5) с учетом (2.7) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \psi = \psi_t \equiv 0, \quad x, y \in \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \\ \rho = 1 - (a/2) \rho_0^{-1} L y, \quad x, y \in \Gamma_1 \\ \rho = 1 + (a/2) \rho_0^{-1} L y, \quad x, y \in \Gamma_3; \quad \rho_x = 0, \quad x, y \in \Gamma_2, \Gamma_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используемая здесь величина завихренности  $\omega$  введена для простоты реализации численного алгоритма решения первого уравнения системы (3.1). Возникает необходимость в определении величины завихренности на линиях  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ . Воспользовавшись тем обстоятельством, что на  $\Gamma_2, \Gamma_4$   $\omega = \psi_{xx}$  и учитывая условия (3.3) в предположении выполнения на этих

участках границы первого уравнения системы (3.1), получим для завихренности на данных участках границы уравнение

$$\omega_t - (\psi_x + A\rho^{-1}\rho_y) \omega_y - A\rho^{-1}(\rho_{xx} + \rho_{yy})\omega = 0 \quad (3.4)$$

Так как в начальный момент времени  $\omega = 0$  вдоль  $\Gamma_2, \Gamma_4$ , то из уравнения (3.4) и первого из условий (3.3) следует, что  $\omega \equiv 0$  на  $\Gamma_2, \Gamma_4$ . На  $\Gamma_1, \Gamma_3$   $\omega$  отыскивается экстраполированием по известным значениям  $\omega$  внутри бака. Непосредственно из системы (3.1) и условий (3.2), (3.3) следует, что задача является симметричной относительно оси ординат. Вдоль оси симметрии полагаем  $\omega = \rho_x = \psi = \psi_t = 0$ .

4. Алгоритм решения задачи следующий: при  $t = n\Delta t$ , где  $\Delta t$  — величина временного шага,  $n$  — номер шага по времени ( $n \geq 0$ ), известны значения  $\rho, \psi$ ; находим  $\omega = \psi_{xx} + \psi_{yy}$  внутри области  $\Omega_3$  и экстраполируем на верхнюю и нижнюю стенки бака, затем отыскивается правая часть  $f$  первого уравнения системы (3.1), после чего решается первое уравнение системы (3.1) и находятся значения функции  $\psi_t(n\Delta t, x, y)$ ; по найденным значениям  $\psi_t$  вычисляются значения  $\psi((n+1)\Delta t, x, y)$ . Полученные значения  $\psi$  на  $(n+1)$ -м шаге по времени подставляются во второе уравнение системы (3.1), после решения которого процесс повторяется. Указанный алгоритм реализуется с помощью конечно-разностного метода. Сетка для простоты выбирается квадратной. Равенство  $\omega = \psi_{xx} + \psi_{yy}$  реализуется следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^n &= 1/12 h^{-2} (\psi_{i-1,j-1}^n + \psi_{i+1,j+1}^n + \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i+1,j-1}^n + \\ &+ 4(\psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j-1}^n + \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n) - 20\psi_{i,j}^n) \\ \psi_{i+\alpha, j+\beta}^n &\equiv \psi((n\Delta t, (i+\alpha)h, (j+\beta)h) \end{aligned}$$

где  $h$  — шаг сетки.

При отыскании правой части  $f$  первого из уравнений системы (3.1) используются обычные центральные разности. Положим  $\psi_t \equiv z$ ; для отыскания  $z$  воспользуемся итерационной схемой стабилизирующей поправки [9], аппроксимирующей первое уравнение системы (3.2) со вторым порядком по пространственным переменным

$$\begin{aligned} \frac{z_{i,j}^{n,k+1/2} - z_{i,j}^{n,k}}{\tau} &= h^{-2} (\rho_{i+1/2,j}^n z_{i+1,j}^{n,k+1/2} - 2\rho_{i,j}^n z_{i,j}^{n,k+1/2} + \rho_{i-1/2,j}^n z_{i-1,j}^{n,k+1/2}) + \\ &+ h^{-2} (\rho_{i,j+1/2}^n z_{i,j+1}^{n,k} - 2\rho_{i,j}^n z_{i,j}^{n,k} + \rho_{i,j-1/2}^n z_{i,j-1}^{n,k}) - f_{i,j}^n \quad (4.1) \\ \frac{z_{i,j}^{n,k+1} - z_{i,j}^{n,k+1/2}}{\tau} &= h^{-2} [\rho_{i,j+1/2}^n (z_{i,j+1}^{n,k+1} - z_{i,j+1}^{n,k}) - \\ &- 2\rho_{i,j}^n (z_{i,j}^{n,k+1} - z_{i,j}^{n,k}) + \rho_{i,j-1/2}^n (z_{i,j-1}^{n,k+1} - z_{i,j-1}^{n,k})] \end{aligned}$$

Здесь  $k$  — номер итерации,  $\tau$  — итерационный параметр. Итерации заканчивались, если разность  $|z_{i,j}^{n,k+1} - z_{i,j}^{n,k}|$  становилась меньше некоторого числа  $\varepsilon$  для всех внутренних узлов сетки. Для величины  $z^{n,k+1/2}$  ставятся однородные граничные условия. Известно [9], что схема (4.1) обладает свойством полной аппроксимации и в случае рассматриваемой задачи является абсолютно сходящейся. Реализация схемы (4.1) осуществляется методом прогонки.

Отыскание

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \Delta t z_{i,j}^n + O(\Delta t^2)$$

не вызывает затруднений; гармонический анализ данного соотношения дает основание предполагать устойчивость этого этапа алгоритма решения задачи по крайней мере при достаточно малом  $\Delta t$ .

Для решения второго уравнения системы (3.1) используется схема расщепления [9].

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1/2} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} = \Lambda_1 \rho_{i,j}^{n+1/2}, \quad \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \Lambda_2 \rho_{i,j}^{n+1} \quad (4.2)$$

где  $\Lambda_1 \rho$ ,  $\Lambda_2 \rho$  — разностные аналоги выражений  $-(\psi_y \rho)_x + A \rho_{xx}$ ,  $(\psi_x \rho)_y + A \rho_{yy}$  соответственно. Схема расщепления (4.2) аппроксимирует второе уравнение системы (3.1) с порядком  $O(\Delta t + h^2)$  и является абсолютно устойчивой.

Граничные условия для величины дробного шага аналогичны соответствующим условиям для целого шага. Схема (4.2) реализуется прогонками. Для оценки точности и устойчивости алгоритма проводилось численное исследование поведения полной энергии смеси. В результате расчетов установлено, что максимальное отклонение энергии от первоначальной не превышает 0.19%.

5. По указанному алгоритму было просчитано несколько вариантов задачи. При реализации итерационной схемы число  $\varepsilon$  бралось в пределах 0.1—0.3 %  $\max |z_{i,j}^k|$ . Для достижения такой точности оказалось достаточным сделать 6—10 итераций на каждом шаге по времени. Для проверки свойств математической модели, которая была использована для описания задачи, а также свойств численного алгоритма решения задачи проводились сравнения с экспериментами [2]. Из экспериментальных данных [2] следует, что горизонтальный размер пятна, отнесенный к первоначальному, ведет себя как функция

$$1 + 0.29 (s_1 t)^{1.08} \quad \text{при } 0 < s_1 t < 2.75$$

$$1.03 (s_1 t)^{0.55} \quad \text{при } 2.75 \leq s_1 t \leq 25$$

где  $s_1 = (ag / \rho_0)^{1/2}$  — частота Вайсяла — Бранта,  $t$  — время в сек. В качестве начального горизонтального размера пятна в работе [2] рассматривался диаметр цилиндрической полости, в которой в начальный момент времени жидкость имела постоянную плотность  $\rho_0$ . Здесь это будет величина  $l_x$ . Был просчитан вариант задачи при следующих значениях параметров:

$$L_y / L = 0.718, \quad l_x / L = 0.154, \quad l_y / L = 0.180$$

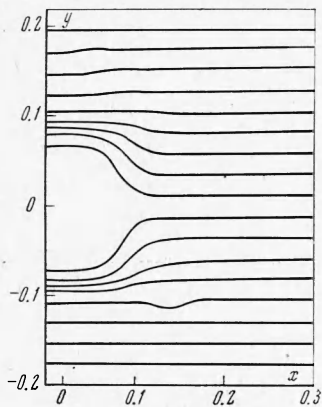
$$A = 0.00011, \quad B = 1.336, \quad \Delta t = 0.0154, \quad \varepsilon = 0.0000008$$

Число узлов сетки составило 40·57. В начальный момент времени плотность в пятне постоянна; для последующих моментов времени условимся понимать под пятном совокупность узлов сетки таких, что плотность в них отличается не более чем на 0.4% от первоначальной, причем узел  $(i, j)$  принадлежит пятну в случае, если по крайней мере один из узлов сетки  $(i, j+1)$ ,  $(i, j-1)$  наряду с узлом  $(i, j)$  удовлетворяет сформулированному выше условию.

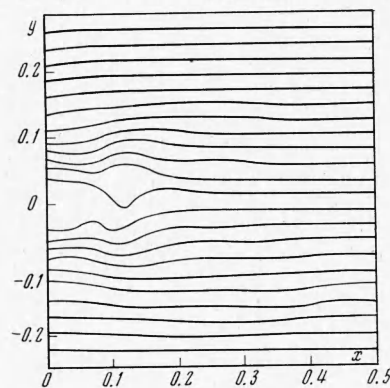
Результаты сравнения экспериментальных данных с результатами расчета приведены в таблице.

$s_1 t$	Данные [°]	Расчет	Процент расхождения
0.7703	1.219	1.167	4.27
1.5406	1.463	1.500	2.53
2.3109	1.717	1.667	2.91
3.0812	1.978	2.000	1.11
3.8515	2.162	2.167	0.23
4.6218	2.390	2.500	4.60
5.3921	2.602	2.833	8.88

Результаты расчетов выводились через каждые 50 шагов по времени в виде массивов значений функций  $\rho$ ,  $\psi$  в узлах сетки и изображения линий

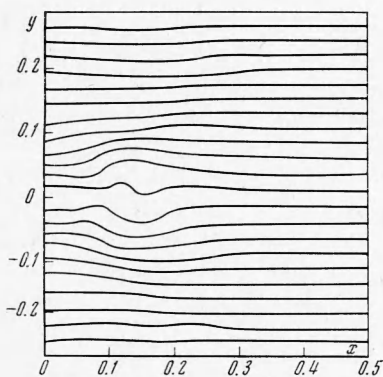


Фиг. 1

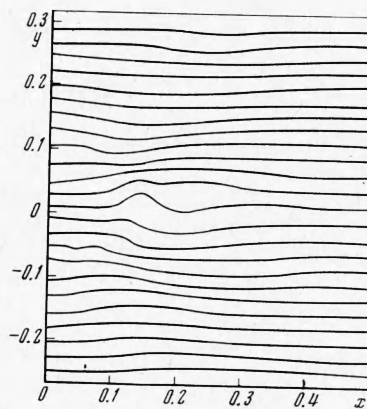


Фиг. 2

равной плотности в данный момент времени. На фиг. 1—4 изображены линии равной плотности, представленные с интервалом 0.011, на соот-



Фиг. 3



Фиг. 4

ветствующие моменты времени, что позволяет проследить первоначальное сплющивание пятна, возникновение и распространение внутренних волн.

Фиг. 1—4 относятся к значениям  $t = 0.7703, 2.3109, 3.8515, 5.3921$  соответственно. Результаты расчетов качественно совпадают с результатами, полученными в работах [2, 3].

Поступила 6 XII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schooley A. H., Stewart R. W. Experiment with a self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient. *J. Fluid Mech.*, 1963, vol. 15 (1), pp. 83—96.
2. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in density-stratified medium. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 35 (3), pp. 531—544.
3. Wessel R. W. Numerical study of the collapse of a perturbation in an infinite density stratified fluid. *Phys. Fluids*, 1969, vol. 12 (12), pt. 2, pp. 171—176.
4. Филлипс О. Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
5. Padmanabhan N., Ames W. F., Kennedy J. F., Hung Ting-Kan. A numerical investigation of wake deformation in density stratified fluids. *J. Engng Math.*, 1970, vol. 4 (3), pp. 229-241.
6. Mei C. C. Collapse of a homogeneous fluid mass in a stratified fluid. *Proc. Twelfth Internat. Congress Appl. Mech.*, Stanford Univ., 1968.
7. Schooley A. H., Hughes B. A. An experimental and theoretical study of internal waves generated by the collapse of two-dimensional mixed region in a density gradient. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 51 (1), pp. 159—175.
8. Hartman R. I., Lewis H. W. Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 51 (3), pp. 613—618.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
11. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.