

СКОРОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ГОРЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИ ТОЛСТОГО СЛОЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ ТЕПЛОБМЕНЕ С ИНЕРТНОЙ СРЕДОЙ

С. С. Рыбанин, С. Л. Соболев

(Черноголовка)

Рассмотрим распространение волны горения вдоль термически толстого слоя вещества, когда имеется существенное изменение температуры в поперечном направлении. Вследствие сильной аррениусовской зависимости скорости волны горения от температуры ее фронт искривляется [1, 2], а слой вещества, прилегающий к инерту, может даже не догорать [3—5]. В работе [5] обращено внимание на то обстоятельство, что при искривлении фронта волны горения ее лидирующая область как бы экранируется слоем несгоревшего вещества от интенсивного теплоотвода со стороны инертного материала (рис. 1). Такая тепловая экранировка оказывает существенное влияние на пределы распространения волны горения [5].

Точно описать аналитическими методами распространение волны горения с сильно искривленным фронтом — задача очень сложная. Трудности, стоящие перед численным расчетом, — обилие исходных параметров. Поэтому целесообразно провести приближенное решение задачи, используя приемы работы [5], которые, как показано в [6], дают достаточно точные результаты. Цели, которые ставятся перед приближенным решением, заключаются в том, чтобы выявить основные закономерности процесса и указать безразмерные критерии, в которых следует представлять результаты экспериментов и численных расчетов.

Модель горения. Уравнение теплового баланса

Рассмотрим стационарное распространение волны горения вдоль плоского слоя конденсированного вещества толщиной $2H$, находящегося между двумя пластинами инертного материала (инерта), толщина которых равна L (см. рис. 1). Предположим, что превращение исходного вещества в продукты горения происходит в узкой зоне химической реакции, которая расположена от поверхности инерта на расстоянии δ . Будем характеризовать положение фронта волны горения зависимостью $\delta(X)$.

Вследствие симметрии в центральной части слоя горящего вещества имеется область, где изменение температуры в поперечном направлении незначительное, такое, что фронт горения в этой области можно считать плоским. Существенное искривление фронта горения может происходить у поверхности инерта, где в результате охлаждения вещества температура в зоне химической реакции падает и влечет за собой снижение нормальной скорости горения. При искривлении фронта горения зона химической реакции в центральной части как бы экранируется

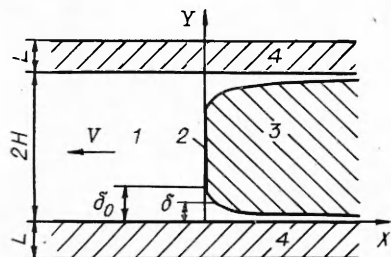


Рис. 1. Модель волны горения.

1 — конденсированное вещество; 2 — зона химической реакции; 3 — продукты горения; 4 — инертный материал (инерт).

от охлаждающего действия инерта слоем несгоревшего вещества [5]. Учтем это обстоятельство при составлении теплового баланса, который в силу симметрии запишем только для нижней половины системы $Y \leq H$ (см. рис. 1), пренебрегая кондуктивным потоком тепла из зоны химической реакции в продукты горения¹:

$$c_f \rho_f (H - \delta_0) (T_r - T_\infty) + \int_{-\infty}^0 \lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=\delta_0} dX \approx \rho_f V (H - \delta_0) Q, \quad (1)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности; V — скорость волны горения; δ_0 — толщина экранирующего слоя несгоревшего вещества при $X=0$; T_r — температура в зоне химической реакции; T_∞ — начальная температура; Q — тепловой эффект химической реакции. Индекс f относится к конденсированному веществу.

Интеграл в левой части равенства (1) представляет собой поток тепла, идущий на нагрев несгоревшего вещества и инерта. Как показано в [6], достаточно точную оценку этого интеграла можно получить, приравняв его произведению теплового потока в точке $X=0$ на ширину михельсоновского слоя:

$$\int_{-\infty}^0 \lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=\delta_0} dX \approx \frac{\lambda_f (T_r - T_w) a_f}{\delta_0 V}, \quad (2)$$

где T_w — температура поверхности инерта под зоной химической реакции в точке $X=0$ (см. рис. 1).

Выразим из (1), (2) температуру в зоне химической реакции:

$$T_r = \frac{V^2 \delta_0 (H - \delta_0) T_a / a_f^2 + T_w}{V^2 \delta_0 (H - \delta_0) / a_f^2 + 1}. \quad (3)$$

Здесь $T_a = Q/c_f + T_\infty$ — адиабатическая температура горения; $a_f = \lambda_f / \rho_f c_f$ — коэффициент температуропроводности конденсированного вещества.

Известно [7], что в случае тонкой зоны химической реакции скорость волны горения экспоненциально зависит от температуры в ней, поэтому можно приближенно записать

$$U \approx \exp \left(- \frac{E (T_a - T_r)}{2RT_a T_r} \right), \quad (4)$$

где $U = V/V_a$, V_a — нормированная и адиабатическая скорости волны горения. Соотношения (3), (4) служат для расчета U . Кроме U они содержат неизвестные: T_w — температуру на границе раздела горящего вещества и инерта и δ_0 — толщину экранирующего слоя конденсированного вещества в точке $X=0$.

Рассчитаем эти величины для ряда предельных случаев.

Слой инерта термически толстый. В [6] показано, что характерный размер по оси Y области инерта, прогретой потоком тепла из михельсоновского слоя волны горения, находится из формулы

$$S \approx (a_f a_i)^{1/2} / V.$$

Здесь и далее индексом i помечены физические характеристики инерта. Слой инерта термически толстый, если $L > S$.

Знание масштаба S позволяет оценить величину потока тепла, направленного внутрь инерта в точке $X=0$:

$$\lambda_i \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} \approx \frac{\lambda_i (T_w - T_\infty)}{S} = \frac{\lambda_i (T_w - T_\infty) V}{(a_f a_i)^{1/2}}.$$

¹ Точность разного рода приближений, сделанных в работе, имеет обычный для аналитической теории горения порядок RT/E .

Воспользовавшись неразрывностью теплового потока на границе горящего вещества и инерта, запишем следующее приближенное равенство:

$$\frac{\lambda_f(T_r - T_w)}{\delta_0} \approx \frac{\lambda_i(T_w - T_\infty)V}{(a_i a_f)^{1/2}}.$$

Выразив T_r из (3) и (5), а затем подставив его в (4), получим после простых преобразований уравнение для расчета безразмерной скорости волны горения

$$\gamma = (1 - \Delta_0)(1 + \varepsilon h U \Delta_0) U \ln 1/U, \quad (5)$$

$$\Delta_0 = \delta_0/H,$$

$$h = \frac{H V_a}{a_f} \left[\frac{2RT_a^2}{E(T_a - T_\infty)} \right]^{1/2},$$

$$\gamma = \frac{E(T_a - T_\infty)^{1/2}}{2RT_a^2 H V_a} \left[\frac{(\lambda \rho c)_i}{(\lambda \rho c)_f} \right]^{1/2}.$$

$$\varepsilon = \left[\frac{E(T_a - T_\infty)(\lambda \rho c)_i}{2RT_a^2 (\lambda \rho c)_f} \right]^{1/2}.$$

Величина γ имеет смысл безразмерных тепловых потерь. Она пропорциональна отношению характерного времени химической реакции и времени теплообмена между горящим веществом и инертном. Параметр ε — нормированное отношение тепловых активностей инерта и горящего вещества.

Правая часть уравнения (5) как функция U и Δ_0 имеет максимум, поэтому решение (5) и, следовательно, стационарное распространение волны горения, возможно только в том случае, если $\gamma < \gamma_*$ (γ_* — максимальная величина). Таким образом, при $\gamma = \gamma_*$ достигается предел существования режима стационарного распространения волны горения. Соотношения для расчета предельной скорости горения и критических значений остальных параметров находятся из условия равенства нулю частных производных правой части (5) по U и Δ_0 . После ряда преобразований получим

$$\varepsilon = \frac{\ln^{3/2}(1/U_*)}{\ln(1/eU_*)}, \quad (6)$$

$$\Delta_{0*} = \delta_{0*}/H_* = \ln(eU_*), \quad (7)$$

$$h_* = \frac{H_* V_a}{a_f} \left(\frac{2RT_a^2}{E(T_a - T_\infty)} \right)^{1/2} = \frac{1}{U_* \ln^{3/2}(1/U_*)}, \quad (8)$$

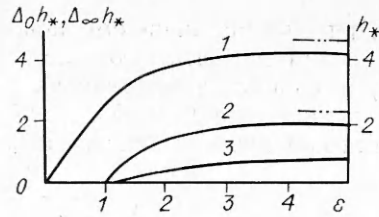
$$\frac{T_{w*} - T_\infty}{T_a - T_\infty} = \frac{\ln(1/eU_*^2)}{1 + \frac{2RT_a^2}{E(T_a - T_\infty) \ln(1/U_*)}}. \quad (9)$$

Предельное значение U_* находится из (6) и в рассматриваемом случае зависит только от одного ε . Критические значения безразмерной толщины экранирующего слоя Δ_{0*} и горящего вещества h_* , температуры на границе раздела компонентов системы T_{w*} в точке $X = 0$ выражаются через U_* из (7) — (9) соответственно.

Выражения (6) — (9), как и рассматриваемая модель горения, имеют смысл тогда, когда существует экранирующий слой, т. е. выполняется условие $\Delta_{0*} > 0$. Из этого неравенства и (7) вытекает, что $U_* > e^{-1}$. Другое ограничение на величину U_* следует из условия $\varepsilon > 0$ и соотношения (6), которое дает неравенство $U_* < e^{-1/2}$. Таким образом, предельная скорость горения для термически толстого слоя инерта заключена в интервале $e^{-1} < U_* < e^{-1/2}$.

Из выражений (7), (8) вытекают ограничения на величину критической толщины экранирующего слоя инерта $\delta_{0*} < H/2$ и слоя горящего

Рис. 2. Зависимости $h_*(\epsilon)$, $\Delta_0 h_*(\epsilon)$ и $\Delta_\infty h_*(\epsilon)$.



вещества $e < h_* < 2\sqrt{2e}$, а из (13) — на температуру на границе раздела горящего вещества и инерта в точке $X=0$: $T_a/[1 + 2RT_a^2/E(T_a - T_\infty)] > T_{w*} > T_\infty$. Кроме того, из условия $\Delta_{0*} > 0$ и соотношений (6), (7) следует неравенство $\epsilon > 1$, которое представляет собой более простую запись границ применимости рассматриваемой модели горения, когда слой горящего вещества и инерта термически толстые.

При $\epsilon \leq 1$ условие $\Delta_{0*} > 0$ не выполняется. Это означает, что при $\epsilon \leq 1$ экранирующий слой отсутствует ($\Delta_0 = 0$), а фронт горения плоский. При $\epsilon \leq 1$ для расчета критических условий надо использовать соотношение (5), в котором следует положить $\Delta_0 = 0$. Этот случай подробно изучен в [6], где получено выражение для расчета критической толщины слоя горящего вещества

$$h_* = \epsilon e.$$

График зависимости $h_*(\epsilon)$, построенный при $\epsilon \leq 1$ по этой формуле, а при $\epsilon > 1$ — по (6) и (8), представлен на рис. 2, 1. На рис. 2, 2 изображена зависимость нормированной критической толщины экранирующего слоя $\Delta_{0*} h_* = \frac{\delta_{0*} V_a}{a_f} \left(\frac{2RT_a^2}{E(T_a - T_\infty)} \right)^{1/2}$ от параметра ϵ . При $\epsilon \leq 1$ $\delta_0 = 0$ и фронт горения плоский. При $\epsilon > 1$ существует экранирующий слой δ_0 , а фронт горения искривленный. Поэтому равенство $\epsilon = 1$ можно рассматривать как критическое условие искривления фронта волны на пределе горения вследствие охлаждения горящего вещества инертном, когда его слой термически толстый. Как видно из рис. 2, искривление фронта горения и образование экранирующего слоя δ_0 существенно ослабляют зависимость $h_*(\epsilon)$.

При $\epsilon \rightarrow \infty$ температура на границе горящего вещества и инерта стремится к T_∞ . В этом случае теплоотвод из горящего вещества в инерт и критическая толщина h_* достигают наибольшего значения $h_{*max} = 2\sqrt{2e}$, при этом $U_* \rightarrow e^{-1/2}$ и $\Delta_{0*} \rightarrow 1/2$.

Наибольшее значение $d_* = 2H_*$ также соответствует $\epsilon \rightarrow \infty$ и находится из выражения

$$d_{*max} = \frac{4a_f}{V_a} \left(\frac{eE(T_a - T_\infty)}{RT_a^2} \right)^{1/2}.$$

Для оценки критического размера цилиндрического образца горящего вещества, находящегося в инертной оболочке, значение d_* для плоского слоя следует умножить на $\sqrt{2}$.

Слой инерта термически тонкий. Особенность горения термически толстого слоя вещества в отличие от тонкого заключается в том, что могут существовать пределы горения даже для термически тонкого слоя инерта [5]. Покажем это, рассмотрев случай, когда инерт нагревается в основном за счет тепла, идущего из михельсоновского слоя горящего вещества. Запишем баланс тепла

$$\frac{\lambda_f(T_r - T_w)}{\delta_0} \frac{a_f}{V} \approx \rho c_i L V (T_w - T_\infty).$$

Если для упрощения анализа считать $T_a \gg T_\infty$, то из этого баланса, а также из соотношений (3), (4) вытекает выражение для расчета U

$$\gamma l \approx (1 - \Delta_0) (1 + \epsilon h l U^2 \Delta_0) \ln 1/U, \quad (10)$$

$l = LV_a/(a_f a_f)^{1/2}$ — безразмерная толщина слоя инерта.

Критические значения параметров на пределе распространения волны горения соответствуют максимуму функции, стоящей в правой части (10), и находятся из условия равенства нулю частных производных этой функции по U и Δ_0 . После ряда преобразований уравнения для расчета критических значений приобретают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon l &= \frac{2 \ln^{3/2} 1/U_*}{U_* \ln 1/(eU_*^2)}, \\ \Delta_{0*} &= \frac{1 - lU_* \ln 1/U_*}{\ln(e/U_*^2)}, \\ h_* &= \frac{\ln e/U_*^2}{2U_* \ln^{3/2} 1/U_*}.\end{aligned}\quad (11)$$

Величина εl — единственный параметр, от которого зависят критические значения U_* , Δ_{0*} и h_* . Уравнение (11) служит для расчета предельной скорости горения U_* в зависимости от величины εl , значения Δ_{0*} и h_* выражаются через U_* . Однако (11) имеет решение не для всех εl . Действительно, правая часть (11) как функция U_* имеет минимум при $U_* = e^{-V^{3/2}}$, который равен $\approx 5,25$. Поэтому решения уравнения (11) существуют только при выполнении условия

$$\varepsilon l \geq 5,25. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае слой инерта считается термически тонким, при этом, как показано в [6], его толщина должна удовлетворять неравенству $L < S$ (или $lU < 1$). Сопоставляя это неравенство с (12), получим условие, при котором имеют место критические явления при горении термически толстого слоя вещества, заключенного между термически тонкими пластинами инерта:

$$\left(\frac{e(\lambda \rho c)_i}{(\lambda \rho c)_f} \right)^{1/2} \geq \frac{\rho_i c_i V_a L}{\lambda_f} \geq 7,35 \left(\frac{RT_a^2}{E(T_a - T_\infty)} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Это соотношение выражает два требования, налагаемые на слой инерта. С одной стороны, он должен быть достаточно тонким, чтобы успеть прогреться в михельсоновском слое волны горения. Это требование выражается левым неравенством (13). С другой стороны, слой инерта должен быть достаточно толстым и охлаждать горящее вещество до такой степени, чтобы вызвать пределы горения. Последнее требование выражается правым неравенством соотношения (13).

Пределы и скорость волны горения при произвольной толщине слоя инерта

В [6] изучался предельный случай, когда слой горящего вещества термически тонкий. При этом фронт горения плоский и экранирующего слоя нет ($\Delta_0 = 0$). Другой предельный случай, когда слой горящего вещества термически толстый и фронт горения искривлен ($\Delta_0 > 0$), рассмотрен в настоящей работе на примерах термически толстого ($lU > 1$) и тонкого ($lU < 1$) слоев инерта.

Основываясь на анализе этих асимптотических случаев, удастся получить обобщающую зависимость для расчета скорости волны горения путем сшивки решений по параметру l :

$$\gamma l \approx (1 - \Delta_0) (1 + lU + \varepsilon h l U^2 \Delta_0) \ln 1/U. \quad (14)$$

(Справедливость сшивки решений проверялась путем сравнения приближенного решения с численными [2, 4, 11, 12].) Правая часть (14) как функция U и Δ_0 имеет максимум, который соответствует критическим условиям горения.

Приравняв нулю частные производные правой части (14) по U и Δ_0 , получим уравнения для расчета критических значений U_* , Δ_{0*} и h_*

$$\varepsilon = \frac{(2 + W_*) \ln^{3/2} 1/U_*}{W_* \ln(1/eU_*^2)}, \quad (15)$$

$$\Delta_{0*} = \frac{1 + W_* \ln(eU_*)}{W_* + \ln(e/U_*^2)}, \quad (16)$$

$$h_* = \frac{W_* + \ln(e/U_*^2)}{U_* (2 + W_*) \ln^{3/2} 1/U_*}. \quad (17)$$

При $lW_* \rightarrow \infty$ из (15)–(17) вытекают соотношения (6)–(8), а при $lW_* \rightarrow 0$ — соответственно (11). Как следует из (15)–(17), значения U_* , Δ_{0*} и h_* зависят от параметров ε и l .

Можно показать, что уравнение (15) имеет решение только тогда, когда безразмерная толщина слоя инерта больше некоторого минимального значения, зависящего от параметра ε . (Такое требование уже встречалось в случае термически тонкого слоя инерта, и оно записано в виде (12).) Следует отметить, что при фиксированном значении ε величина h_* , соответствующая минимальной толщине слоя инерта, незначительно (менее чем на 30 %) отличается от критической толщины, соответствующей термически толстому слою инерта. Поэтому для оценки h_* в общем случае вполне пригодна формула (8).

Рассмотрим зависимость скорости волны горения U от параметров ε , l и величины h , которая дается соотношением (14), в которое входит неизвестная величина $\Delta_0 = \delta_0/H$. Естественно выбрать такое значение $\Delta_0 = \Delta_{0\max}$, чтобы скорость горения была максимальной. Этому условию соответствует равенство нулю частной производной правой части соотношения (14) по Δ_0 , откуда следует

$$\Delta_{0\max} = \frac{\varepsilon h l U^2 - 1 - W}{2\varepsilon h l U^2}. \quad (18)$$

При таком выборе величины $\Delta_{0\max}$ условие для расчета предельной скорости волны горения автоматически выполняется.

Подстановка значения $\Delta_{0\max}$ из (18) в (14) дает окончательно уравнение:

$$\frac{2U}{\ln^{1/2} 1/U} = \frac{1}{\varepsilon l} + \frac{U}{\varepsilon} + hU^2. \quad (19)$$

Соотношение (19) справедливо только в случае, когда слой горящего вещества термически толстый, а фронт горения искривленный ($\Delta_{0\max} > 0$). Используя (18), (19), можно показать, что для этого необходимо выполнение условия $h > \sqrt{2\varepsilon}$.

Если же формально $\Delta_{0\max} \leq 0$, то слой горящего вещества следует считать термически тонким, и вместо (19) для расчета U надо использовать уравнение, рассмотренное в [6]. Оно получается из (14), если в нем положить $\Delta_0 = 0$:

$$\frac{\varepsilon}{h} = \left(\frac{1}{l} + U \right) \ln \frac{1}{U}. \quad (20)$$

Отметим, что уравнения (19), (20) справедливы в рамках сделанных при их выводе допущений. Это условие $T_a \gg T_\infty$ и требование о том, чтобы слой инерта получал, а не отдавал тепло в михельсоновском слое горящего топлива, т. е. был достаточно теплоемким. Для этого необходимо по крайней мере выполнение неравенства (12).

На рис. 3 представлены зависимости скорости волны горения U от безразмерной толщины слоя горящего вещества h при различных значениях параметра ε для термически толстого слоя инерта ($l \rightarrow \infty$), построенные при $\Delta_{0\max} > 0$ по формуле (19), а при $\Delta_{0\max} \leq 0$ — по (20). Участки кривых, проведенные штриховыми линиями, соответствуют аб-

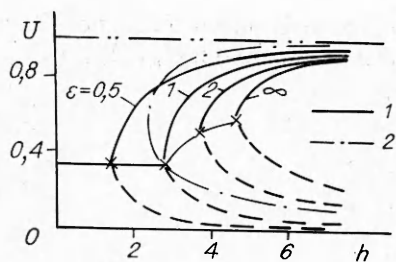


Рис. 3. Зависимость $U(h)$.

солютно неустойчивым режимам горения; сплошные кривые — зависимость между \bar{U}_* и h_* ; штрих-пунктирная линия, на которой $\Delta_{0\max} = 0$, разделяет плоскость (h, U) на две области: правая ($\Delta_{0\max} > 0$) соответствует термически толстым слоям горящего вещества, левая ($\Delta_{0\max} \leq 0$) — термически тонким. Из рис. 3 видно, что условие $\Delta_{0\max} > 0$ эквивалентно $\varepsilon > 1$ только на пределе горения.

Форма фронта горения. Слой недогоревшего вещества

Как отмечалось выше, вследствие охлаждения горящего вещества инертном, температура в зоне химической реакции снижается, что приводит к искривлению фронта горения [1—5]. При сильном падении температуры у поверхности инерта может даже образовываться слой недогоревшего вещества, который обнаружен и исследован при горении слоя топлива, помещенного на металлическую пластину [8], а также при горении вещества в инертной оболочке [2, 4, 5]. Для последнего случая в [2, 4] проведены расчеты толщины недогоревшего слоя в предположении, что температура поверхности инерта равна температуре окружающей среды T_∞ . Только в работе [5] оценка толщины недогоревшего слоя вещества сделана с учетом теплофизических свойств инерта, при этом получены критические условия появления этого слоя.

Внимание к изучению недогоревшего слоя вещества не случайно, с его образованием связаны проблемы загрязнения окружающей среды, использования горения в технологических целях и др.

Проведем расчет формы фронта волны горения, которую будем характеризовать зависимостью между координатой зоны химической реакции δ и продольной координатой X (см. рис. 1). Ограничимся рассмотрением нижней половины слоя горящего вещества $H \geq Y \geq 0$, так как фронт горения симметричен относительно координаты $Y = H$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в области за лидирующей частью волны горения ($X > 0$) уравнения, описывающие теплообмен продуктов горения с инертном и недогоревшим слоем вещества при $X \rightarrow \infty$, превращаются в уравнения типа пограничного слоя, когда основное значение имеет поперечная теплопередача, а теплопередачей в продольном направлении можно пренебречь. Поэтому в первом приближении считаем, что такой характер теплопередачи имеет место сразу же за лидирующим фронтом волны горения при $X > 0$. Учтем, кроме того, что на границе рассматриваемого слоя вещества при $Y = H$ стока тепла нет и вследствие симметрии $(dT/dY)|_{Y=H} = 0$.

На нижней границе $Y = 0$ имеется сток тепла в инерт. Вследствие этого можно считать приближенно, что перепад температуры в поперечном направлении сосредоточен в слое недогоревшего вещества $0 \leq Y \leq \delta$, а в продуктах горения в слое $\delta \leq Y \leq H$ перепада температуры в поперечном направлении нет. Согласно такому приближению, температура в зоне химической реакции и продуктах горения T_{rb} снижается только за счет теплопередачи в поперечном направлении, при этом справедливо следующее уравнение теплового баланса

$$\rho_f c_f V (H - \delta) \frac{dT_{rb}}{dX} \approx - \frac{\lambda_f (T_{rb} - T_w)}{\delta}. \quad (24)$$

Считая изменение температуры продуктов небольшим и используя соотношение (3), можно положить приближенно

$$T_{rb} - T_w \approx T_r - T_w = \frac{V^2 \delta_0 (H - \delta_0) (T_a - T_r)}{a_f^2}, \quad (22)$$

$$T_r = T_{rb}|_{x=0}, \quad \delta_0 = \delta|_{x=0}.$$

Если учесть, что изменение δ невелико по сравнению с H и даже на пределе распространения волны горения $H - \delta \geq H/2$ (см. (6), (7)), то можно принять $H - \delta \approx H - \delta_0$.

При таких приближениях из соотношений (21), (22) следует

$$\frac{dZ}{dX} \approx \frac{V\delta_0(T_a - T_r)}{a_f\delta(T_a - T_\infty)}, \quad (23)$$

где $Z = (T_r - T_{rb})/(T_a - T_\infty)$ — безразмерная температура. Считая, что формула (4) справедлива для расчета нормальной скорости горения u_n , выразим отношение u_n/V через Z :

$$\frac{u_n}{V} \approx \exp\left(-\frac{E(T_a - T_\infty)Z}{2RT_r^2}\right). \quad (24)$$

Для искривленного стационарного фронта горения выполняется соотношение

$$u_n/V = \cos \alpha, \quad (25)$$

$$d\delta/dX = -\text{ctg} \alpha \quad (26)$$

(α — угол между вектором нормальной скорости горения u_n и направлением распространения волны горения (осью X)). Система (23) — (26) сводится к одному дифференциальному уравнению, которое связывает Z и δ :

$$\frac{dZ}{d\delta} = -\frac{V\delta_0(T_a - T_r)}{a_f\delta(T_a - T_\infty)} \left[\exp\left(\frac{E(T_a - T_\infty)Z}{RT_r^2}\right) - 1 \right]^{1/2}, \quad (27)$$

$\delta = \delta_0: Z = 0.$

В результате интегрирования (27) получаем зависимость $\delta(Z)$:

$$\delta = \delta_0 \exp\left\{-\frac{a_f}{\delta_0 V \ln \frac{V_a}{V}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \exp\left(-\frac{E(T_a - T_\infty)Z}{ZRT_r^2}\right) \right]\right\}. \quad (28)$$

Если $E(T_a - T_\infty)/RT_r^2 \gg 1$, то даже при незначительном изменении Z величина δ практически достигает своего асимптотического значения

$$\delta_\infty = \delta_0 \exp\left(-\frac{\pi a_f}{2\delta_0 V \ln \frac{V_a}{V}}\right), \quad (29)$$

которое представляет собой толщину слоя недогоревшего вещества, возникающего у поверхности инерта вследствие сильного охлаждения им зоны химической реакции. Учитывая это обстоятельство, в (28) можно подставить разложение Z по X в окрестности точки $X = 0$:

$$Z = \frac{(T_a - T_r) VX}{(T_a - T_\infty) a_f}.$$

В результате получим формулу для расчета расстояния зоны химической реакции от поверхности инерта $\delta(X)$ при $\delta < H$

$$\delta \approx \delta_0 \exp\left\{-\frac{a_f}{\delta_0 V \ln \frac{V_a}{V}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \exp\left(-\frac{XV}{a_f} \ln \frac{V_a}{V}\right) \right]\right\}, \quad (30)$$

откуда следует, что зависимость $\delta(X)$, полученная для малых значений X , дает правильную асимптотику и при $X \rightarrow \infty$. Поэтому соотношение (30) можно использовать для приближенного расчета формы фронта горения во всем интервале изменения координаты X .

На рис. 1 изображена форма фронта волны горения $\delta(X)$ при $E(T_a - T_\infty)/RT_a^2 = 4$, когда слой инерта термически толстый ($l \rightarrow \infty$) и его тепловая активность очень велика ($\varepsilon \rightarrow \infty$). При условиях $l \rightarrow \infty$

и $\epsilon \rightarrow \infty$ толщина недогоревшего слоя δ_∞ достигает наибольшего значения:

$$\delta_{\infty \max} \approx \frac{a_f}{V_a} \left[\frac{\epsilon E (T_a - T_\infty)}{RT_a^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\pi \left(\frac{RT_a^2}{E (T_a - T_\infty)} \right)^{1/2} \right].$$

В общем случае δ_∞ зависит от h , l и ϵ . На рис. 2, 3 представлена зависимость нормированной толщины слоя недогоревшего вещества $\Delta_\infty h = \frac{\delta_\infty V_a}{a_f} \left(\frac{2RT_a^2}{E (T_a - T_\infty)} \right)^{1/2}$ от параметра ϵ на пределе распространения горения для термически толстого слоя инерта. Расчет этой зависимости проводился по формулам (6)–(8) и (29).

Обратим внимание на то обстоятельство, что при $\epsilon = 1$, когда появляется экранирующий слой δ_0 (см. рис. 3), значение производной $\frac{g\delta_0}{d\epsilon} > 0$, в то время как для недогоревшего слоя $\frac{d\delta_\infty}{d\epsilon} = 0$, в связи с чем недогоревший слой становится заметным не сразу после начала образования экранирующего слоя (искривления фронта горения). Из выражения (29) следует, что δ_∞ становится очень малой при $V \rightarrow V_\infty$, что имеет место, например, при увеличении h , хотя при этом фронт может искривляться ($\Delta_{0\max} > 0$). Эти примеры показывают, что искривление фронта горения не обязательно сопровождается появлением заметного слоя недогоревшего вещества.

Развитая в настоящей работе приближенная теория искривления фронта горения позволяет оценить минимальный размер неоднородного возмущения, которое может возникнуть, если волна горения становится неустойчивой [9]. Действительно, тепловой баланс (1) и все следствия из него справедливы приближенно для любого искривленного фронта. Если же неоднородное возмущение фронта волны горения отдает тепло только в окружающее его несгоревшее вещество, нужно положить $\epsilon = \left[\frac{E (T_a - T_\infty)}{2RT_a^2} \right]^{1/2}$. При $\frac{E (T_a - T_\infty)}{2RT_a^2} \gg 1$ $\epsilon \gg 1$, как следует из соотношений (15)–(17) и рис. 2, 1. В этом случае минимальный размер возмущения практически равен наибольшему значению d_* . Этот вывод находит экспериментальное подтверждение в работе [10], где обнаружено, что размер нестационарных пульсаций фронта волны горения приблизительно равен критическому диаметру.

Отметим еще одну особенность нестационарного горения вещества в контакте с инертным материалом. Вследствие того, что δ_∞ зависит от скорости горения, при нестационарных режимах величина δ_∞ должна изменяться в соответствии с изменением этой скорости.

Полученные результаты о зависимости скорости и пределов горения от размеров, теплофизических свойств горящего вещества и инерта находятся в качественном согласии с экспериментальными данными [1, 11]. В случае, когда известны все необходимые кинетические и теплофизические параметры, получено совпадение с точностью $\sim 10\%$ значений критической толщины и безразмерной предельной скорости горения, найденных по формулам (6)–(8) и определенных путем численного решения уравнений и экспериментально в работе [12]. Такое же совпадение имеется между расчетами безразмерной критической толщины, сделанными в [13] методом усреднения [14] и по формулам (6)–(8). Однако численные расчеты критической толщины, проведенные в [13], дают значения в 1,5–2 раза больше, чем по методу усреднения [14] и формулам (6)–(8). Такое расхождение в [13] объясняется влиянием нестационарности, которое наблюдается при расчете критической толщины численными методами, использованными в [13].

В заключение сделаем краткий обзор основных результатов работы. Безразмерная скорость горения $U = V/V_a$ зависит от трех безразмерных параметров: толщины слоя горящего вещества h и инерта l , отношения

тепловых активностей инерта и горящего вещества ϵ . Расчет зависимости U от этих параметров проводится по формуле (19), если $\Delta_{0\max} > 0$, или по (20) при $\Delta_{0\max} \leq 0$. При $\Delta_{0\max} > 0$ фронт волны горения искривленный, а при $\Delta_{0\max} \leq 0$ — плоский.

Критические значения величин, соответствующие пределу горения, рассчитываются по (15) — (17), если $\Delta_{0\max} > 0$, или по (21), (22) из [6], когда $\Delta_{0\max} \leq 0$. В этих выражениях $\gamma = \epsilon/h$.

Таким образом, в результате приближенного аналитического решения сопряженной задачи теплообмена между горящим веществом и инертным материалом получены зависимости скорости и пределов распространения волны горения от геометрических размеров, теплофизических и кинетических параметров. Получены также соотношения для расчета формы фронта волны горения и толщины слоя недогоревшего вещества, который может возникать у поверхности инерта.

Авторы благодарны А. П. Алдушину и А. Г. Струниной за обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенин А. А., Лейпунский О. И., Писковский С. В. и др. ФГВ, 1976, 12, 2, 179.
2. Aly S. L., Simpson V. B., Hermance S. E. AIAA J., 1979, 17, 56.
3. Алдушин А. П. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — ИХФ АН СССР, 1974.
4. Lee S. T., T'ien J. S. Comb. Flame, 1982, 48, 273.
5. Рыбанин С. С., Соболев С. Л. Докл. АН СССР, 1983, 269, 6, 1394.
6. Рыбанин С. С., Соболев С. Л. ФГВ, 1989, 25, 5.
7. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
8. Новиков С. С., Похил П. Ф. и др. Докл. АН СССР, 1968, 180, 6, 1391.
9. Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В. ПМТФ, 1971, 5, 51.
10. Маршаков В. Н. Хим. физика, 1987, 6, 4, 530.
11. Андреев К. К. Термическое разложение и горение взрывчатых веществ. — М.: Наука, 1966.
12. Александров В. В., Давыденко А. А., Еремин А. Ф. и др. ФГВ, 1984, 20, 6, 79.
13. Александров В. В., Давыденко А. А., Коваленко Ю. А. и др. ФГВ, 1987, 23, 2, 70.
14. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 27/VII 1987,
после доработки — 19/VII 1988

УДК 536.46

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ГЕТЕРОГЕННОГО ГОРЕНИЯ СЛОЕВОЙ СИСТЕМЫ

В. А. Струнин, А. Н. Фирсов, К. Г. Шкадинский, Г. Б. Манелис
(Черноголовка)

Современные конденсированные топлива — это многокомпонентные, многофункциональные композиции. Они постоянно модифицируются, меняются условия их применения. Возникает необходимость качественного прогноза характеристик их горения, что представляет трудную задачу из-за сложности и многогранности этого процесса.

Ниже предлагается математическая модель горения смесевых составов, которая допускает сравнительно простой анализ и позволяет установить параметрическую зависимость ряда экспериментально наблюдаемых характеристик стационарного горения. Хотя проблемам горения смесевых конденсированных составов с газообразными продуктами реакции в последнее время уделяется значительное внимание, проведенный с помощью этой модели вычислительный эксперимент представляется важным.