

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА БАЛОК

В. П. Ястребов
(Ленинград)

Изучение автомодельных движений сплошных сред является весьма плодотворным [1]. Круг автомодельных задач ограничен соответствующими требованиями к размерностям определяющих величин. В тех случаях, когда эти требования выполняются, математическая сторона задачи может быть существенно упрощена.

В данной работе рассмотрены автомодельные задачи динамического изгиба балок, подчиняющихся динамическому уравнению Бернулли — Эйлера. Для балок бесконечной протяженности известны автомодельные решения и решения, включающие автомодельные составляющие [2—8]. Все эти решения получены, однако, без использования свойств автомодельности. В настоящей работе предлагается общий метод, позволяющий исследовать широкий класс автомодельных решений. На основании метода как частные случаи могут быть получены известные автомодельные решения. Кроме того, устанавливаются способы решения задач изгиба балок с подвижными опорами, движение которых осуществляется в режиме, сохраняющем автомодельность задачи. Этот режим назовем автомодельным режимом движения. Впервые исследуется динамический изгиб под действием силы, перемещающейся по балке в указанном автомодельном режиме.

Ранее свойства автомодельности использовались в работе [9] для изучения деформации мембран с подвижными границами.

1. Рассмотрим уравнение изгиба балки

$$(1.1) \quad EI \partial^4 w / \partial x^4 + m \partial^2 w / \partial t^2 = q(x, t),$$

где w — прогиб; t — время; x — координата; E — модуль упругости материала; I — момент инерции сечения; m — погонная масса; q — погонная нагрузка.

Обратимся вначале к однородному уравнению. Для однородного уравнения прогиб является функцией следующих определяющих параметров: EI , m , t , x . Из них можно составить лишь одну независимую безразмерную комбинацию, в которую одновременно войдут переменные x и t . Запишем эту комбинацию в виде

$$(1.2) \quad \xi = x / (2 \sqrt[4]{a} \sqrt{t}), \quad a = EI/m.$$

Полученная зависимость указывает на автомодельность движения [1]. Для неоднородного уравнения (1.1) автомодельность решения сохранится, если нагрузка q может быть представлена в виде

$$(1.3) \quad q = q_* t^\beta f(\xi),$$

где q_* — постоянная; $f(\xi)$ — безразмерная функция переменной ξ ; β — показатель степени.

Появление новой независимой от констант EI и m размерной величины q_* не нарушит автомодельности, поскольку задача является линейной и q_* войдет в окончательное решение в виде множителя.

Граничные и начальные условия содержат дополнительные размерные величины. Например, в сечениях балки могут действовать сосредоточенные силы или могут быть заданы скорости, изменяющиеся как степенные функции времени

$$(1.4) \quad P = P_* t^\gamma, \quad v = v_* t^\delta,$$

где γ , δ — показатели степени; P_* , v_* — постоянные величины.

Размерности констант \bar{F}_* , v_* должны быть зависимы от размерностей ранее введенных величин, чтобы задача оставалась автомодельной. Это эквивалентно наложению ограничений на величины показателей степеней γ и δ . Если в уравнении (1.1) равна нулю правая часть, то освобождается одна размерная константа, зависящая от g_* и входящая в виде множителя в окончательное решение, которая может быть использована для подчинения независимому граничному или начальному условию. В этом случае при подчинении одному из условий (1.4) один из показателей степени γ или δ может быть взят произвольным. Остальные условия должны иметь зависимые размерности или быть нулевыми.

Условия задачи не должны содержать характерных размеров, что имеет место у бесконечных и полубесконечных балок. Кроме того, возможно задание специальных подвижных граничных условий, соответствующих автомодельным режимам. Отметим, что в силу линейности уравнения (1.1) многие неавтомодельные решения могут быть получены суммированием автомодельных решений.

2. Автомодельные решения ищутся в виде

$$(2.1) \quad w = At^\alpha \varphi(\xi),$$

где α — показатель степени; A — размерная константа; $\varphi(\xi)$ — безразмерная функция переменной ξ . Выражение (2.1) подставляется в уравнение (1.1), в котором правая часть имеет вид (1.3). При вычислении производных переменная ξ считается функцией x и t . В результате подстановки получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2.2) \quad \varphi^{IV} + 4\xi^2 \varphi'' + (12 - 16\alpha)\xi \varphi' + 16\alpha(\alpha - 1)\varphi = 16f(\xi),$$

в котором производные берутся по переменной ξ .

При этом необходимо положить $A = g_* m^{-1}$ и $\alpha = \beta + 2$. Если же уравнение (2.2) однородно, то величина α и размерность A определяются из дополнительного условия (например, граничного).

Пусть, например, в сечении x действует сосредоточенная сила

$$(2.3) \quad P = P_* h(t),$$

где $h(t)$ — единичная функция Хевисайда. В данном случае третья производная от перемещения терпит разрыв непрерывности в месте приложения силы на величину

$$EI \left(\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x+0} - \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x-0} \right) = P_*.$$

Подставляя сюда (2.1), получаем

$$(2.4) \quad 0,125A (EI m^3)^{1/4} t^{\alpha-3/2} (\varphi'''(\xi+0) - \varphi'''(\xi-0)) = P_*,$$

где переменная ξ имеет значение, соответствующее координате x точки приложения силы. Условия, допускающие переход от координаты x к конкретному значению ξ в (2.4), указываются ниже. Выражение (2.4) должно давать условие для φ''' , не зависящее явно от времени и не имеющее размерности. Из этого следует $\alpha = 1,5$, $[A] = [P_*] [EI m^3]^{-1/4}$. Здесь квадратной скобкой указана размерность соответствующей величины. Выбор величины A , кроме размерности, произволен, так как она в дальнейшем может быть объединена с произвольными постоянными интегрирования уравнения (2.2). В рассматриваемом случае константа A может быть выбрана таким образом, чтобы в (2.4) разрыв в производной φ''' был бы равен единице. Отсюда следует

$$(2.5) \quad A = 8P_* (EI m^3)^{-1/4}.$$

В дальнейшем будем исследовать уравнение (2.2) без правой части, опуская слово «однородный» при ссылке на него.

Решение (2.2) отыскивалось путем подстановки разложения в ряд по степеням ξ . Полученные при этом ряды можно выразить для наиболее употребительных значений α через тригонометрические функции и интегралы Френеля [10]

$$S(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\xi \sin y^2 dy, \quad C(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\xi \cos y^2 dy.$$

Наиболее употребительными значениями α следует считать $\alpha = 1,5; 1; 0,5$. Этим значениям соответствуют действие на балку сосредоточенной силы ($\alpha = 1,5$), момента ($\alpha = 1$) и задание в сечении балки скорости ($\alpha = 1$), изменяющихся во времени по закону единичной функции [2-4]. При импульсных воздействиях [6] могут потребоваться решения (2.2) при $\alpha = 0,5$.

Запишем фундаментальную систему решений (2.2) для указанных значений α :

для $\alpha = 1,5$

$$(2.6) \quad \varphi_1 = -\sqrt{2\pi}\xi^3 C(\xi) + 1,5\sqrt{2\pi}\xi S(\xi) + \xi^2 \sin \xi^2 + \cos \xi^2, \quad \varphi_2 = \xi, \\ \varphi_3 = \frac{1}{6} [\sqrt{2\pi}\xi^3 S(\xi) + 1,5\sqrt{2\pi}\xi C(\xi) + \xi^2 \cos \xi^2 - \sin \xi^2], \quad \varphi_4 = \frac{1}{6}\xi^3;$$

для $\alpha = 1$

$$(2.7) \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0,5[\sqrt{2\pi}\xi^2 S(\xi) + 0,5\sqrt{2\pi}C(\xi) + \xi \cos \xi^2], \\ \varphi_3 = 0,5\xi^2, \quad \varphi_4 = 0,25[\sqrt{2\pi}\xi^2 C(\xi) - 0,5\sqrt{2\pi}S(\xi) - \xi \sin \xi^2];$$

для $\alpha = 0,5$

$$(2.8) \quad \varphi_1 = \sqrt{2\pi}\xi S(\xi) + \cos \xi^2, \quad \varphi_2 = \xi, \\ \varphi_3 = 0,5[\sqrt{2\pi}\xi C(\xi) - \sin \xi^2], \quad \varphi_4 = 0,125\{2\pi\xi[S(\xi)]^2 + \\ + 2\pi\xi[C(\xi)]^2 + 2\sqrt{2\pi}[S(\xi) \cos \xi^2 - C(\xi) \sin \xi^2]\}.$$

Заметим, что решения (2.7) и три первых решения (2.8) с точностью до произвольного множителя равны производным по ξ соответственно от (2.6) и (2.7).

Частные решения (2.6) — (2.8) подобраны таким образом, чтобы при $\xi = 0$ значения всех функций и их производных до третьего порядка обращались в нуль, кроме значений, указанных ниже и равных единице:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3''(0) = \varphi_4'''(0) = 1.$$

Подобный выбор функций облегчает подчинение решений граничным условиям при $\xi = 0$.

При исследовании изгиба бесконечных и полубесконечных балок необходимо располагать решениями, стремящимися к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Эти решения можно получить, используя линейные комбинации записанной фундаментальной системы решений. Например, при $\alpha = 1,5$ такими решениями будут

$$(2.9) \quad \varphi_5 = \varphi_1 - 0,75\sqrt{2\pi}\varphi_2 + 3\sqrt{2\pi}\varphi_4 = \\ = -\sqrt{2\pi}\xi^3[C(\xi) - 0,5] + 1,5\sqrt{2\pi}\xi[S(\xi) - 0,5] + \xi^2 \sin \xi^2 + \\ + \cos \xi^2, \quad \varphi_6 = 6\varphi_3 - 0,75\sqrt{2\pi}\varphi_2 - 3\sqrt{2\pi}\varphi_4 = \\ = \sqrt{2\pi}\xi^3[S(\xi) - 0,5] + 1,5\sqrt{2\pi}\xi[C(\xi) - 0,5] + \xi^2 \cos \xi^2 - \sin \xi^2.$$

Полученные результаты позволяют без труда воспроизвести известные автомодельные решения. Например, решение задачи об изгибе бесконечной балки под действием силы (2.3), рассмотренное в [3], можно записать в виде

$$(2.10) \quad w = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{P_* a^{\frac{3}{4}}}{EI} t^{\frac{3}{2}} (\varphi_5 - \varphi_6).$$

При получении (2.10) использовалось общее решение уравнения (2.2) для $\alpha = 1,5$, стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\varphi = C_5 \varphi_5 + C_6 \varphi_6,$$

где C_5, C_6 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий при $\xi = 0$.

3. Предложенный метод не допускает получения решений для балок ограниченной длины. Однако возможно рассмотрение задач, в которых опоры подвижны. Закон перемещения опор должен быть таким, чтобы не вносить дополнительные величины с независимыми размерностями. Этому условию удовлетворяет закон движения

$$(3.1) \quad x = b2 \sqrt[4]{a} \sqrt{t},$$

где b — безразмерная постоянная, характеризующая быстроту перемещения опоры.

Условие (3.1) определяет задание для уравнения (2.2) граничных условий при значении $\xi = b$. Иными словами, в области переменной ξ можно рассматривать изгиб некоторой фиктивной балки, деформация которой описывается усложненным уравнением (2.2). В сечениях этой балки $\xi = b_1, b_2, b_3, \dots$ имеются опоры или приложены силы, моменты. Кроме того, может быть задана распределенная нагрузка. Методы отыскания решений для фиктивной балки принципиально не отличаются от методов расчета статического изгиба балок [11].

Переходя вновь к переменным x и t , получаем балку Бернулли — Эйлера с подвижными опорами и подвижными нагрузками, бегущими от точки $x = 0$ в автомодельном режиме, определяемом уравнениями вида (3.1).

Вопросам изгиба балок под действием подвижных нагрузок посвящено много работ. При получении решений могут использоваться численные методы [12]. Для бесконечных балок (при учете упругого основания и демпфирования) отыскиваются аналитические решения при действии неизменных нагрузок, бегущих вдоль балки с постоянной скоростью. В этом случае удается построить асимптотически точное решение для больших значений времени с момента начала движения нагрузки [13, 14]. Однако переходный процесс в начальный период плохо поддается исследованию и требует выполнения большой вычислительной работы.

Применение автомодельных решений позволяет построить простое точное решение задачи о бегущей нагрузке с самого начала ее движения. При этом нагрузка может меняться с течением времени по степенному закону.

Рассмотрим изгиб бесконечной балки под действием сосредоточенной силы, движущейся вдоль балки от начала координат $x = 0$ по закону (3.1). Данная задача может быть расчленена на две задачи. В этих задачах две одинаковые по величине силы удаляются от начала координат в противоположные стороны, причем в первой задаче (симметричная задача) силы направлены в одну сторону, а во второй — в противоположные (антисимметричная задача). Легко сформулировать граничные условия при

$x = 0$ для каждой задачи. Антисимметричной задаче соответствует свободное опирание на жесткую опору. В симметричной задаче накладывается ограничение на угол поворота, который должен оставаться равным нулю.

Рассмотрим ход решения на примере антисимметричной задачи. Полагаем, что сила изменяется во времени по закону (2.3). Принимаются нулевые начальные условия. Прогиб ищется в виде (2.1), где $\alpha = 1,5$ а коэффициент A определяется (2.5). Подставляя (2.1) в граничные условия задачи при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$, получаем

$$(3.2) \quad \varphi = \varphi'' = 0 \quad (\xi = 0), \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty).$$

В сечении под силой сохраняется непрерывность прогиба и его первой и второй производных, т. е. непрерывность φ , φ' , φ'' , а третья производная терпит разрыв непрерывности, который с учетом (2.4), (2.5) равен

$$\varphi'''(b+0) - \varphi'''(b-0) = 1.$$

Используем частные решения (2.6), (2.9) для $\alpha = 1,5$. Общее решение записывается в виде

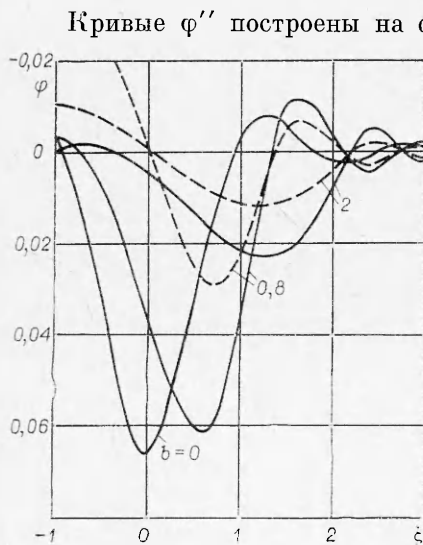
$$(3.3) \quad \varphi = C_2\varphi_2 + C_4\varphi_4 \quad (\xi \leq b), \quad \varphi = C_5\varphi_5 + C_6\varphi_6 \quad (\xi \geq b).$$

Первое и второе решения (3.3) удовлетворяют граничным условиям (3.2) соответственно при $\xi = 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Произвольные постоянные C_2, C_4, C_5, C_6 находятся из сформулированных выше условий сопряжения прогиба и его производных в месте приложения силы ($\xi = b$).

Расчеты выполнены для $b = 0,8$ и 2 . При расчетах использовались таблицы [15]. На фиг. 1 представлены графики функции $\varphi(\xi)$ для антисимметричной задачи (штриховые кривые) и суммарное решение антисимметричной и симметричной задач (сплошные кривые). Суммарное решение соответствует воздействию на бесконечную неопертую балку удвоенной силы $2P_*$, движущейся от сечения $x = 0$ в одну сторону. Для сравнения по формуле (2.10) рассчитана также кривая φ для бесконечной балки при действии неподвижной силы $2P_*$ ($b = 0$).

Изгибающий момент равен

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,25EIA t^{\alpha-1} a^{-\frac{1}{2}} \varphi'' = 2P_* \sqrt[4]{a} \sqrt{t} \varphi''.$$

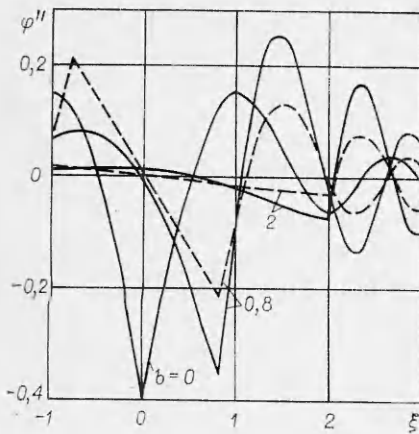


Ф и г. 1

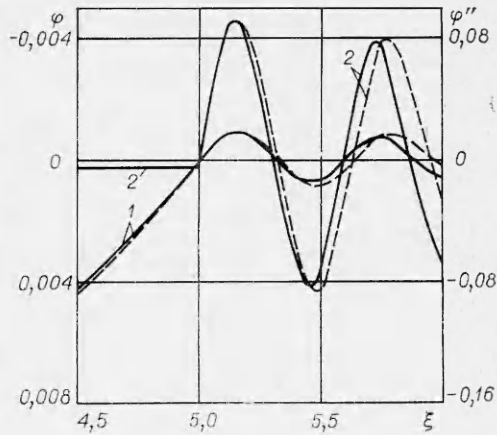
Кривые φ'' построены на фиг. 2. Обозначения кривых приняты та-

кими же, как для фиг. 1. Графики, изображенные на фиг. 1, 2, свидетельствуют о том, что с возрастанием скорости перемещения силы в автомоделном режиме прогибы и изгибающие моменты уменьшаются. Продвижение силы вдоль балки происходит быстрее нарастания прогиба, причем при скоростях, соответствующих $b > 2$, прогиб под силой близок к нулю. Быстро уменьшается изгибающий момент под силой с ростом b . Однако изгибающий момент в предвестнике (волне, идущей впереди силы) уменьшается более медленно.

Сопоставление решений симметричной и антисимметричной задач показывает, что при $b > 2$ характер граничных условий на опоре при $x=0$ мало влияет



Ф и г. 2



Ф и г. 3

на деформированное состояние балки в районе приложения силы.

С ростом скорости перемещения силы ($b > 2$) возрастают вычислительные трудности, связанные с необходимостью расчета малых разностей в функциях (2.9) и их производных при использовании этих функций в (3.3). Для упрощения расчетов преобразуем уравнение (2.2). Введем новую переменную

$$\xi_* = \xi - b.$$

Для новой переменной уравнение примет вид

$$(3.4) \quad \varphi_{\xi_*}^{IV} + 4\varphi''(\xi_* + b)^2 + (12 - 16\alpha)\varphi'(\xi_* + b) + 16\alpha(\alpha - 1)\varphi = 0.$$

Здесь производные взяты по переменной ξ_* .

Если $|\xi_*| \ll b$, то $\xi_* + b \approx b$ и уравнение (3.4) переходит в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого элементарно. При $\alpha = 1,5$ уравнение (3.4) имеет вид

$$(3.5) \quad \varphi^{IV} + 4b^2\varphi'' - 12b\varphi' + 12\varphi = 0.$$

При отыскании деформации балки в окрестности подвижной силы вместо φ_5 и φ_6 в (3.3) использовались два соответствующих частных решения уравнения (3.5). Расчеты показывают, что использование приближенного уравнения (3.5) при $b = 2$ дает еще существенную погрешность для прогиба и изгибающего момента в районе приложения силы, однако при возрастании величины b погрешность быстро уменьшается.

На фиг. 3 изображены φ (кривые 1) и φ'' (кривые 2) в районе приложения движущейся силы P_* при $b = 5$. Сплошной линией показаны точные решения, штриховые линии соответствуют использованию приближенного уравнения (3.5). Графики свидетельствуют о хорошем совпадении решений.

В заключение отметим, что использование представления об автомоделных режимах движения подвижных нагрузок может оказаться полезным при изучении других задач математической физики, допускающих автомоделные решения и возможность введения подвижных источников возмущений.

Поступила 8 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1972.
2. Дуве П., Кларк Д., Боненблост Х. Поведение длинных балок при ударной нагрузке.— Сб. пер. Механика, 1950, № 3.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. Пол и Фу. Полубесконечная балка с заданным на торце скачком скорости.— ПМ, 1967, № 1.
5. Fu C. C. Closed-form solutions of an infinite beam under impact loading.— Intern. J. of Solids Structures, 1967, vol. 3.
6. Mucichescu Dan. Sur la propagation des ondes transversales dans une barre elastique infinie.— Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees, 1970, т. XV, N 2.
7. Цейтлин А. И. О колебаниях полубесконечных стержней и цилиндрических оболочек.— В кн.: Динамика сооружений. М., изд. ЦНИИ строит. конструкций им. В. А. Кучеренко, 1971.
8. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., Судостроение, 1972.
9. Самарин Ю. П. Применение автомодельных решений к задаче о колебаниях круглой мембраны, расширяющейся из точки.— В сб.: Механика. Куйбышев, изд. Политехн. ин-та им. В. В. Куйбышева, 1967.
10. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1962.
11. Справочник по строительной механике корабля. Т. 1. Л., Судпромгиз, 1958.
12. Филиппов А. П., Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев, Наукова думка, 1967.
13. Stadler W., Shreeves R. W. The transient and steady-state response of the infinite Bernoulli — Euler beam with damping and elastic foundation.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1970, vol. XXIII, pt 2.
14. Fryba Ladislav. Vibration of solids and structures under moving loads. Prague, Czechosl. Acad. Sci., 1972.
15. Таблицы интегралов Френеля. М., Изд-во АН СССР, 1953.

УДК 539.375.5

КРИТЕРИЙ ВЯЗКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ФОРМОИЗМЕНЕНИИ МЕТАЛЛОВ

В. М. Сегал

(Минск)

1. Несмотря на то, что пластическую обработку металлов обычно осуществляют в условиях максимальной или достаточно высокой пластичности, явление вязкого разрушения часто наблюдается при ковке, прессовании, прокатке и других технологических процессах. Известны различные попытки построения критериев вязкого разрушения, одни из которых основаны на постулировании некоторых эвристических принципов накопления повреждений [1, 2], другие — на использовании специальных моделей механизма разрушения [3—5]. Последний подход представляется наиболее целесообразным, так как позволяет использовать результаты тонких экспериментальных исследований микроявлений при разрушении и тем самым допускает, по крайней мере в принципе, возможность совершенствования физического содержания модели. Что касается механизма вязкого разрушения достаточно пластичных металлов, то он определяется последовательно развивающимися процессами зарождения, роста и коалесценции пор на субмикро-, микро- и макроуровнях соответственно [6]. Указанная последовательность событий, в основе которых заложены явления различного масштаба, не может быть описана на основе единого подхода, и при переходе ко все более возрастающим уровням используется статистическое усреднение предыдущих [7].

Усреднение явлений субмикроскопического характера, связанных с процессами зарождения, движения и взаимодействия дислокаций и вакансий, в масштабе зерен может быть заменено эквивалентной системой внутренних