

УДК 539.3

АНАЛИЗ ИЗГИБА БАЛКИ ТИМОШЕНКО С ТРЕЩИНОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ч. Фу, С. Ян

Шанхайский университет, Шанхай, Китай

E-mails: jerryfc@shu.edu.cn, xyang@shu.edu.cn

С использованием нелокальной градиентной теории упругости и модели изгибной жесткости трещины предложена модель балки Тимошенко с трещиной, в которой учитываются размеры балки. Получены выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы высших порядков, а также аналитическое решение задачи об изгибе свободно опертой балки с произвольным числом трещин, находящейся под действием равномерной поперечной нагрузки. Исследовано влияние нелокального параметра, характерного линейного размера материала, наличия трещины и гибкости балки на поведение балки при ее изгибе. Установлено, что характерный линейный масштаб материала существенно влияет на поведение балки с трещиной при изгибе, в то время как влияние нелокального параметра градиентной теории менее существенно. Показано, что упрочнение и разупрочнение микробалки с трещиной зависят от обоих масштабных параметров, и в том случае, когда эти параметры равны, поведение микробалки при изгибе отличается от поведения классической балки Тимошенко с трещиной. Установлено, что влияние масштабного эффекта на упрочнение и разупрочнение балки увеличивается с уменьшением гибкости балки.

Ключевые слова: нелокальная градиентная теория упругости, изгибная жесткость трещины, масштабный параметр, балка с трещиной, краевые условия высшего порядка.

DOI: 10.15372/PMTF20190320

Введение. Микро- и наномасштабные системы и устройства широко используются в биологии, химии, при создании новых материалов и т. д. Поскольку классическая теория упругости не описывает масштабный эффект в материале [1], были предложены различные неклассические теории сплошной среды [2–5], позволяющие учесть масштабный эффект при анализе поведения маломасштабных конструкций. Наиболее широко используется нелокальная теория Эрингена [3]. Однако согласно [6] нелокальная теория упругости описывает лишь разупрочнение материала, в то время как градиентная теория может описывать и упрочнение материала. В результате анализа этих двух теорий в работе [2] предложена двухпараметрическая нелокальная градиентная теория упругости. Один из этих параметров называется нелокальным параметром, а другой — параметром характерного линейного размера материала. С использованием нелокальной градиентной теории проведено исследование поведения ряда маломасштабных конструкций [7–10].

Поскольку порядок системы дифференциальных уравнений неклассических теорий выше порядка системы уравнений классической теории упругости, необходимо исследовать

корректность постановки краевых условий в таких теориях [8]. В работах [7, 9] выполнен анализ краевых условий для смещений в нелокальной градиентной теории упругости для задач изгиба и устойчивости, а также для задач о свободных колебаниях, в результате которого получены краевые условия для обобщенных усилий высшего порядка. В работе [8] с использованием метода взвешенных невязок сформулированы вариационно-согласованные краевые условия высшего порядка. В [10] получено выражение для осевой силы высшего порядка в стержне и решена задача о свободных продольных колебаниях стержня с учетом масштабного эффекта.

Несмотря на то что динамическое поведение неповрежденных микро- и наномасштабных балок изучено достаточно полно, имеется лишь небольшое количество работ, посвященных исследованию поведения аналогичных балок с трещиной. Классический аналитический подход к изучению поведения балок с трещинами заключается в следующем. Балка рассматривается как совокупность неповрежденных балок, соединенных невесомыми пружинами, жесткость которых можно определить на основе механики разрушения или молекулярной динамики [11]. Вычислительные затраты при получении решения с использованием такого подхода возрастают с увеличением числа трещин [11–13].

В данной работе с помощью нелокальной градиентной теории упругости получены дифференциальные уравнения и краевые условия высшего порядка для обобщенных усилий для микро- и наномасштабных балок Тимошенко. Найдено общее аналитическое решение задачи об изгибе свободно опертой балки с трещиной. Исследовано влияние на поведение балки нелокального параметра теории, параметра характерного размера материала и гибкости балки.

1. Уравнения равновесия и краевые условия. Ниже приводятся уравнения равновесия и краевые условия, полученные с использованием нелокальной градиентной теории упругости.

1.1. *Нелокальная градиентная теория упругости.* В соответствии с нелокальной градиентной теорией упругости [2] выражения для полных нормальных t_{xx} и сдвиговых t_{xz} напряжений в поперечном сечении балки Тимошенко записываются в виде

$$t_{xx} = \sigma_{xx} - \nabla \sigma_{xx}^{(1)}, \quad t_{xz} = \sigma_{xz} - \nabla \sigma_{xz}^{(1)}, \quad (1)$$

где ∇ — оператор градиента в одномерном случае. Напряжения в классической теории упругости σ_{xx} , σ_{xz} и напряжения высшего порядка $\sigma_{xx}^{(1)}$, $\sigma_{xz}^{(1)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \int_0^L E \alpha_{0x}(x, x', e_{0x}a) \varepsilon_{xx}(x') dx', & \sigma_{xx}^{(1)} &= l^2 \int_0^L E \alpha_{1x}(x, x', e_{1x}a) \varepsilon_{xx,x}(x') dx', \\ \sigma_{xz} &= \int_0^L 2\kappa G \alpha_{0z}(x, x', e_{0z}a) \varepsilon_{xz}(x') dx', & \sigma_{xz}^{(1)} &= l^2 \int_0^L 2\kappa G \alpha_{1z}(x, x', e_{1z}a) \varepsilon_{xz,x}(x') dx'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E , G , κ — модуль Юнга, модуль сдвига и корректирующий множитель соответственно; α_{0i} , α_{1i} ($i = x, z$) — нелокальные функции, характеризующие ослабление напряжений и зависящие от деформаций ε_{xi} и их градиентов $\varepsilon_{xi,x}$ соответственно; l — характерный линейный материальный масштаб; a — характерная длина материальных внутренних (атомных) связей; e_{0i} , e_{1i} — параметры нелокальности, определяющие отличие деформаций в классической теории упругости от деформаций высшего порядка в градиентной теории упругости.

В предположении, что напряжения и деформации разлагаются в ряд, соотношения (2) можно записать в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \left(1 - (e_{0x}a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx}, & \left(1 - (e_{1x}a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xx}^{(1)} &= El^2 \frac{d\varepsilon_{xx}}{dx}, \\ \left(1 - (e_{0z}a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xz} &= 2\kappa G \varepsilon_{xz}, & \left(1 - (e_{1z}a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xz}^{(1)} &= 2\kappa Gl^2 \frac{d\varepsilon_{xz}}{dx}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $e_{0x} = e_{1x} = e_{0z} = e_{1z} = e$. Тогда уравнения (1) можно записать в виде

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) t_{xx} = E \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \varepsilon_{xx}, \quad \left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) t_{xz} = 2\kappa G \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \varepsilon_{xz}, \quad (4)$$

где ea, l — параметр нелокальности и линейный материальный масштаб, с помощью которых учитывается масштабный эффект. При $l = 0$ уравнения (4) сводятся к определяющим уравнениям Эрингена нелокальной теории упругости [3], при $ea = 0$ — к определяющим соотношениям градиентной теории упругости [4]. В случае $l = ea = 0$ соотношения (4) сводятся к соотношениям классической теории упругости.

1.2. *Основные уравнения задачи.* Рассмотрим задачу об изгибе под действием поперечной нагрузки $q(x)$ микро- или наномасштабной прямоугольной упругой балки длиной L (в направлении оси x), шириной b (в направлении оси y) и толщиной h (в направлении оси z). В соответствии с гипотезами Тимошенко смещения балки u_1, u_2, u_3 в направлениях осей x, y, z соответственно записываются в виде

$$u_1(x, y, z) = -z\varphi(x), \quad u_2(x, y, z) = 0, \quad u_3(x, y, z) = w(x),$$

где $w(x), \varphi(x)$ — поперечное смещение осевой линии балки и угол поворота поперечного сечения балки соответственно.

Отличными от нуля являются следующие компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = -z \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \varepsilon_{xz}(x, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right). \quad (5)$$

В модели неповрежденной балки, в которой учитываются ее размеры, вариация энергии деформации записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{xz}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xz}) dV = \\ &= \int_0^L \frac{dM}{dx} \delta \varphi(x) dx - \int_0^L F_s \delta \varphi(x) dx - \int_0^L \frac{dF_s}{dx} \delta w(x) dx - \\ &- (M \delta \varphi(x)) \Big|_0^L + (F_s \delta w(x)) \Big|_0^L - \left(M^{(1)} \frac{d\delta \varphi(x)}{dx} \right) \Big|_0^L + \left(F_s^{(1)} \frac{d\delta w(x)}{dx} \right) \Big|_0^L - (F_s^{(1)} \delta \varphi(x)) \Big|_0^L, \end{aligned}$$

где полный изгибающий момент $M(x)$, изгибающий момент высшего порядка $M^{(1)}(x)$, полная перерезывающая сила $F_s(x)$ и перерезывающая сила высшего порядка $F_s^{(1)}(x)$ определяются следующим образом:

$$M = \int_A z t_{xx} dA, \quad M^{(1)} = \int_A z \sigma_{xx}^{(1)} dA, \quad F_s = \int_A t_{xz} dA, \quad F_s^{(1)} = \int_A \sigma_{xz}^{(1)} dA.$$

Выражение для вариации работы внешней силы имеет вид

$$\delta W = \int_0^L q(x) \delta w(x) dx.$$

Согласно принципу виртуальной работы $\delta W - \delta U = 0$. Приравнивая в этом уравнении к нулю коэффициенты при вариациях δw и $\delta \varphi$, получаем уравнения равновесия балки Тимошенко

$$\frac{dF_s}{dx} + q(x) = 0, \quad -\frac{dM}{dx} + F_s = 0. \quad (6)$$

При $x = 0$ и $x = L$ краевые условия для этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} F_s = 0 \quad \text{или} \quad w(x) = 0, \quad M + F_s^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi(x) = 0, \\ F_s^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dw(x)}{dx} = 0, \quad M^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для полного изгибающего момента и полной перерезывающей силы с учетом масштабного эффекта записываются в виде

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) M = -(EI)_0 \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \frac{d\varphi(x)}{dx}; \quad (8)$$

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) F_s = \kappa(GA)_0 \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \left(\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x)\right), \quad (9)$$

где $(EI)_0$, $(GA)_0$ — изгибная жесткость и жесткость на сдвиг неповрежденной балки Тимошенко соответственно.

1.3. *Краевые условия высшего порядка.* Следуя [10], получим явные выражения для момента высшего порядка $M^{(1)}$ и перерезывающей силы высшего порядка $F_s^{(1)}$. Подставляя выражения (5) в первые два соотношения (3), получаем

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xx} = -Ez \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma_{xx}^{(1)} = -El^2 z \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}. \quad (10)$$

Интегрируя первое уравнение в (1) и уравнения (10), имеем

$$M(x) = M^{(0)}(x) - \frac{dM^{(1)}(x)}{dx}; \quad (11)$$

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) M^{(0)}(x) = -(EI)_0 \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad (12)$$

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) M^{(1)}(x) = -l^2 (EI)_0 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2},$$

где $M^{(0)}(x) = \int_A z \sigma_{xx} dA$ — изгибающий момент низшего порядка. Из соотношений (12) следует

$$M^{(1)}(x) = l^2 \frac{dM^{(0)}(x)}{dx} + A_1 e^{x/(ea)} + A_2 e^{-x/(ea)}. \quad (13)$$

Полагая в (13) $A_1 = A_2 = 0$ [10], получаем

$$M^{(1)}(x) = l^2 \frac{dM^{(0)}(x)}{dx}. \quad (14)$$

Из (14), (11) и первого уравнения в (12) следует

$$M^{(0)}(x) - (ea)^2 \frac{M^{(0)}(x) - M(x)}{l^2} = -(EI)_0 \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (15)$$

С использованием соотношений (6), (8), (14), (15) получаем выражение для изгибающего момента высшего порядка

$$M^{(1)}(x) = -l^2(EI)_0 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \frac{l^2(ea)^4}{(ea)^2 - l^2} \frac{dq(x)}{dx} + \frac{l^4(ea)^2}{(ea)^2 - l^2} (EI)_0 \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}. \quad (16)$$

Аналогично можно найти выражение для перерезывающей силы высшего порядка:

$$F_s^{(1)}(x) = \frac{(ea)^4 l^2}{l^2 - (ea)^2} \frac{d^2q(x)}{dx^2} + l^2 \varkappa(GA)_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right) + \frac{(ea)^2 l^4}{l^2 - (ea)^2} \varkappa(GA)_0 \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right). \quad (17)$$

С использованием соотношений (7), (16), (17) можно получить краевые условия для балки Тимошенко. В частности, для свободно опертой микробалки Тимошенко краевые условия имеют следующий вид:

$$w(x) = 0, \quad M = 0, \quad F_s^{(1)} = 0, \quad M^{(1)} = 0. \quad (18)$$

2. Изгиб свободно опертой балки с трещинами. Рассмотрим изгиб балки с трещинами под действием равномерной поперечной нагрузки $q(x) = Q_0$. Предположим, что открытые трещины находятся в сечениях $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). С использованием модели, предложенной в [14], можно получить выражение для изгибной жесткости балки с трещинами

$$\frac{1}{(EI)_{eq}} = \frac{1}{(EI)_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \delta(x - x_i), \quad (19)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; k_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — жесткости на изгиб, которые можно задать либо определить с использованием методов молекулярной динамики [11].

Из уравнений (6) следует

$$M(x) = -q^{(2)}(x) - C_1 x - C_2, \quad F_s(x) = -q^{(1)}(x) - C_1, \quad (20)$$

где C_1, C_2 — произвольные константы,

$$q^{(1)}(x) = \int_0^x q(x) dx, \quad q^{(2)}(x) = \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx.$$

Подставляя выражения (19), (20) в уравнения (8), (9), получаем

$$\left(\frac{1}{(EI)_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \delta(x - x_i) \right) \left(-q^{(2)}(x) - C_1 x - C_2 + (ea)^2 q(x) \right) = - \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad (21)$$

$$-q^{(1)}(x) - C_1 - (ea)^2 \frac{dq(x)}{dx} = \varkappa(GA)_0 \left(1 - l^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(\frac{dw(x)}{dx} - \varphi(x) \right).$$

В безразмерных переменных

$$w^* = \frac{w}{L}, \quad \varphi^* = \varphi, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_i = \frac{x_i}{L}, \quad l_1 = \frac{l}{L}, \quad l_2 = \frac{ea}{L}, \quad \beta_i = \frac{L}{k_i}, \quad M^* = \frac{ML}{(EI)_0},$$

$$M^{(1)*} = \frac{M^{(1)}}{(EI)_0}, \quad F_s^* = \frac{F_s L^2}{(EI)_0}, \quad F_s^{(1)*} = \frac{F_s^{(1)} L}{(EI)_0}, \quad Q^* = \frac{Q_0 L^3}{(EI)_0}, \quad (GA)^* = \frac{(GA)_0 L^2}{(EI)_0}$$

уравнения (21) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \varphi^*(\xi)}{d\xi^3} - \frac{1}{l_1^2} \frac{d\varphi^*(\xi)}{d\xi} &= \left(1 + \sum_{i=1}^N \beta_i \delta(\xi - \xi_i)\right) \frac{l_2^2 Q^* - Q^{*(2)} - C_1 \xi - C_2}{l_1^2}, \\ -Q^{*(1)} - C_1 - l_2^2 \frac{dQ^*}{d\xi} &= \varkappa(GA)^* \left(1 - l_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \left(\frac{dw^*(\xi)}{d\xi} - \varphi^*(\xi)\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных для уравнений (22) и используя краевые условия (18), получаем выражения для безразмерного смещения и угла поворота поперечного сечения для свободно опертой балки Тимошенко с трещинами:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\xi) &= Q^* \left\{ \frac{4\xi^3 - 6\xi^2 + 1}{24} + (l_2^2 - l_1^2) \left[\frac{1}{2} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\xi - 1}{l_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) \right] \operatorname{csch} \left(\frac{1}{l_1} \right) - \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i Q^* \left(l_2^2 + \frac{(1 - \xi_i) \xi_i}{2} \right) \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{1 - \xi_i}{l_1} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{1}{l_1} \right) \left[l_1 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{l_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) - l_1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - l_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1 - \xi_i}{l_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\xi - \xi_i}{l_1} \right) H(\xi - \xi_i) \right\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \beta_i Q^* \left(l_2^2 + \frac{(1 - \xi_i) \xi_i}{2} \right) [-H(\xi - \xi_i) + (1 - \xi_i)]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} w^*(\xi) &= -\frac{Q^*}{\varkappa(GA)^*} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{2} \right) + \frac{Q^*}{\varkappa(GA)^*} (l_1^2 - l_2^2) \left\{ \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\xi - 1}{l_1} \right) \right] \operatorname{csch} \left(\frac{1}{l_1} \right) - 1 \right\} + \\ &+ \frac{\xi - 2\xi^3 + \xi^4}{24} Q^* + \frac{Q^*}{2} (l_2^2 - l_1^2) \left\{ l_1 \operatorname{cth} \left(\frac{1}{2l_1} \right) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) - 1 \right] - l_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) - \xi(\xi - 1) \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i Q^* \left(l_2^2 + \frac{(1 - \xi_i) \xi_i}{2} \right) \left\{ l_1 \operatorname{ch} \left(\frac{1 - \xi_i}{l_1} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{1}{l_1} \right) \left[1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\xi}{l_1} \right) + \xi \operatorname{ch} \left(\frac{1}{l_1} \right) - \xi \right] + \right. \\ &\quad \left. + l_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\xi - \xi_i}{l_1} \right) H(\xi - \xi_i) - \xi l_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1 - \xi_i}{l_1} \right) \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i Q^* \left(l_2^2 + \frac{(1 - \xi_i) \xi_i}{2} \right) [(1 - \xi_i) \xi - (\xi - \xi_i) H(\xi - \xi_i)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Следует отметить, что если положить равными нулю характерный линейный материальный масштаб l и характерную длину материальных внутренних (атомных) связей a , то выражения (23), (24) сведутся к выражениям, полученным в классической теории изгиба балки Тимошенко [15].

3. Результаты вычислений. Ниже приводятся результаты вычислений для свободно опертой балки Тимошенко с открытой трещиной, находящейся под действием равномерной нагрузки Q_0 . Трещина находится в сечении $x_1 = L/2$, степень поврежденности равна $k_1 = 2$ [11]. Параметры материала балки и ее геометрические параметры имеют следующие значения: модуль Юнга $E = 1,44$ ГПа, модуль сдвига $G = E(1 + \nu)/2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,38$, корректирующий коэффициент сдвига $\varkappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$, толщина $h = 17,6$ мкм, ширина $b = 2h$, длина $L = 10h$ [16]. Значения двух безразмерных масштабов удовлетворяют неравенствам $0 \leq l_1, l_2 \leq 0,2$ [2].

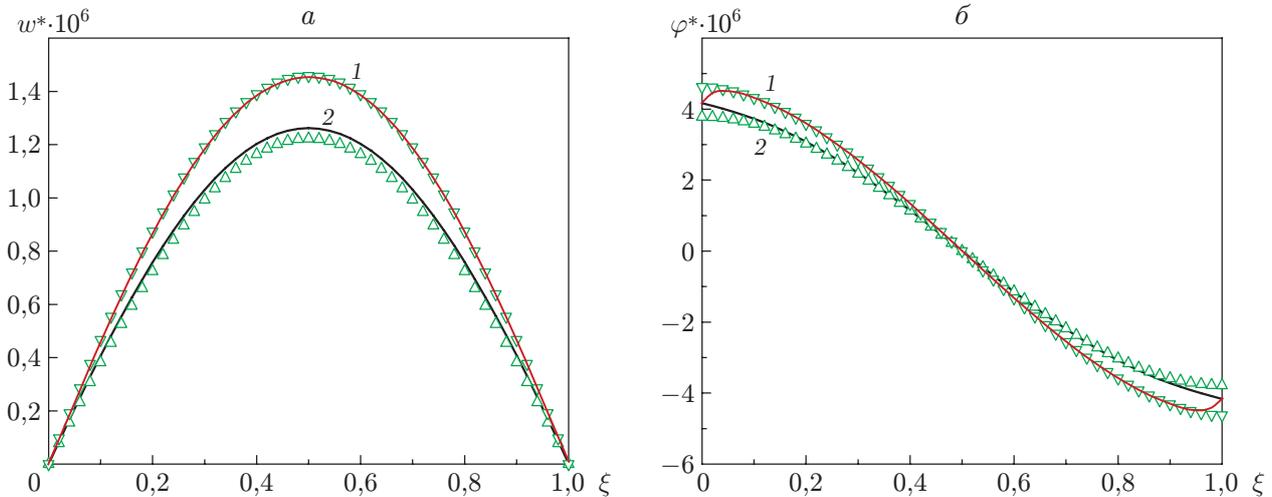


Рис. 1. Распределения безразмерного прогиба w^* (а) и угла поворота φ^* (б) по координате ξ для неповрежденной балки: линии — данные настоящей работы, точки — данные работы [9]; 1 — $l_1 = 1/50$, $l_2 = 1/10$, 2 — $l_1 = 1/10$, $l_2 = 1/50$

На рис. 1 приведены распределения по длине балки безразмерного прогиба w^* и угла поворота поперечного сечения φ^* неповрежденной балки при $k_1 \rightarrow +\infty$. Видно, что результаты, полученные в данной работе и работе [9], хорошо согласуются.

На рис. 2, 3 приведены распределения безразмерного прогиба $w^*(\xi)$ и угла поворота поперечного сечения $\varphi^*(\xi)$ по длине балки с трещиной, полученные с использованием нелокальной градиентной теории упругости. При $l_1 < l_2$ безразмерный прогиб увеличивается с увеличением нелокального параметра l_2 , что свидетельствует о наличии разупрочнения, при $l_1 > l_2$ — уменьшается с увеличением параметра l_1 , что свидетельствует об упрочнении. Эти выводы совпадают с выводами, полученными для неповрежденной микробалки [7, 8].

Из рис. 2, 3 следует, что кривые, полученные на основе нелокальной градиентной теории упругости, более гладкие, чем кривые, полученные на основе классической теории упругости. В частности, для трещины, расположенной в сечении $\xi_1 = 0,5$, на кривой зависимости $w^*(\xi)$, полученной на основе нелокальной градиентной теории, отсутствует излом, а на кривой зависимости $\varphi^*(\xi)$ отсутствует разрыв. Таким образом, наличие в модели масштабов l_1 и l_2 сглаживает соответствующие зависимости. Для исследования влияния параметров l_1 и l_2 на степень сглаживания кривых зависимостей, приведенных на рис. 2, 3, рассмотрим выражение для безразмерного угла поворота (23). Влияние наличия трещины на угол поворота учитывается только последними двумя слагаемыми в выражении (23). Поскольку при $0 < l_2 < 0,2$ и $\xi_1 = 0,5$ слагаемое $(1 - \xi_1)\xi_1/2$ много больше величины l_2^2 , в последних двух слагаемых выражения (23) можно пренебречь величиной l_2^2 . Следовательно, наличие в модели линейного характерного масштаба материала l_1 сглаживает скачок на кривой зависимости угла поворота $\varphi^*(\xi)$. Скачок на кривой зависимости $\varphi^*(\xi)$, полученной на основе нелокальной градиентной теории упругости, менее выражен, поскольку последние два слагаемых в выражении (23) имеют противоположные знаки и последнее слагаемое соответствует скачку на кривой зависимости $\varphi^*(\xi)$, полученной на основе классической теории упругости.

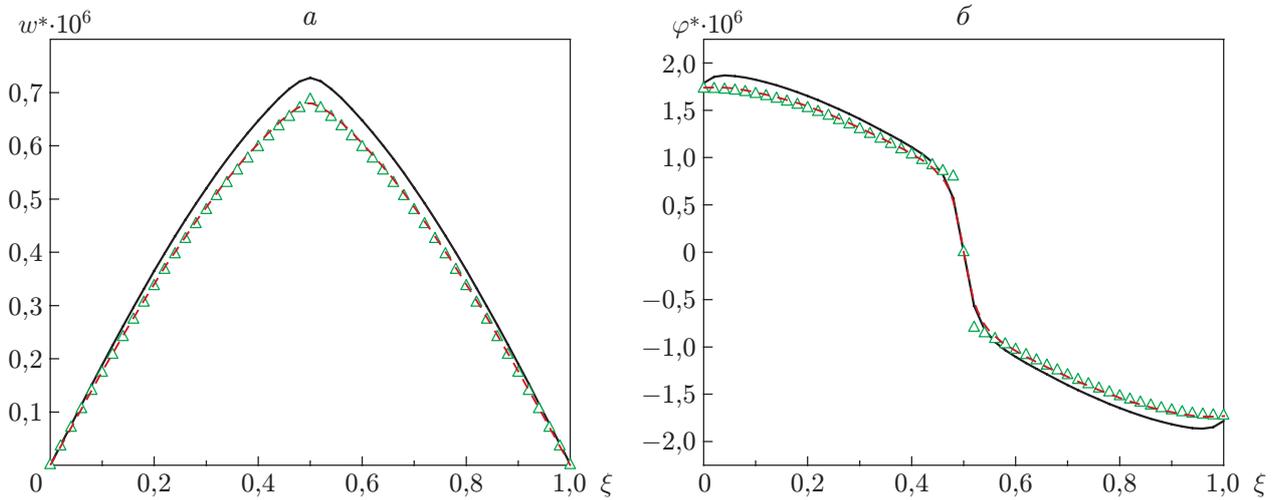


Рис. 2. Распределения безразмерного прогиба w^* (а) и угла поворота φ^* (б) по координате ξ для балки с трещиной при $l_1 < l_2$:
 линии — данные настоящей работы (сплошные — $l_1 = 1/50, l_2 = 1/10$, штриховые — $l_1 = 1/50, l_2 = 1/25$), точки — классическое решение

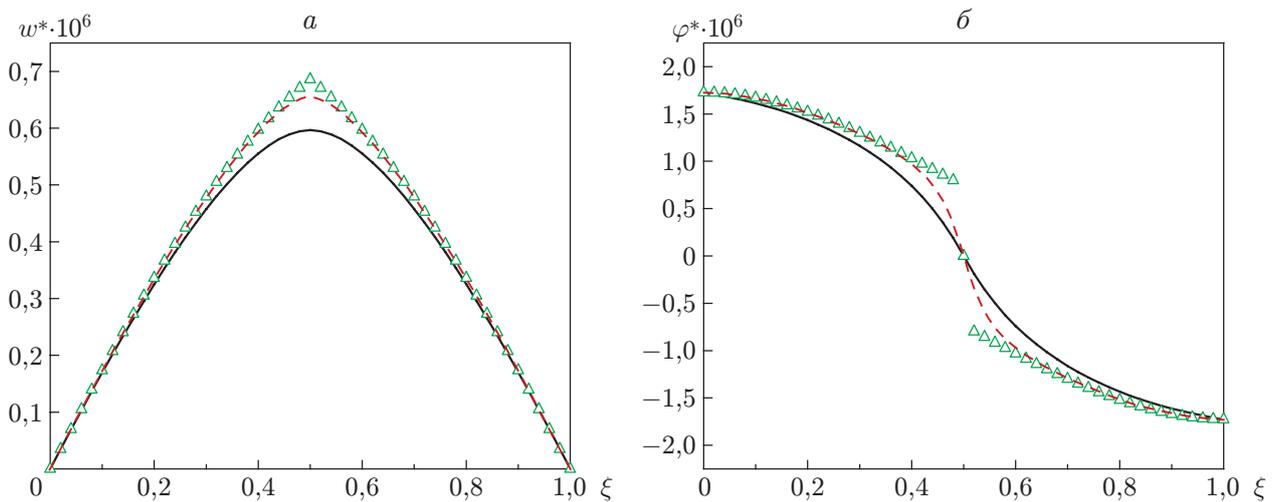


Рис. 3. Распределения безразмерного прогиба w^* (а) и угла поворота φ^* (б) по координате ξ для балки с трещиной при $l_1 > l_2$:
 линии — данные настоящей работы (сплошные — $l_1 = 1/10, l_2 = 1/50$, штриховые — $l_1 = 1/25, l_2 = 1/50$), точки — классическое решение

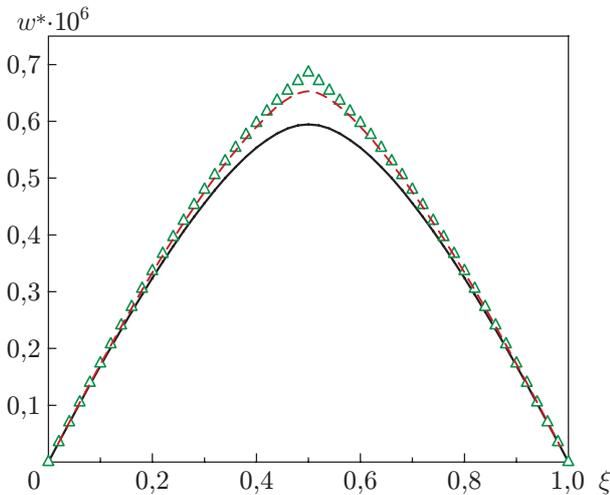


Рис. 4

Рис. 4. Распределение безразмерного прогиба w^* по координате ξ для балки с трещиной при $l_1 \neq 0, l_2 = 0$:

линии — данные настоящей работы (сплошная — $l_1 = 1/10, l_2 = 0$, штриховая — $l_1 = 1/25, l_2 = 0$), точки — классическое решение

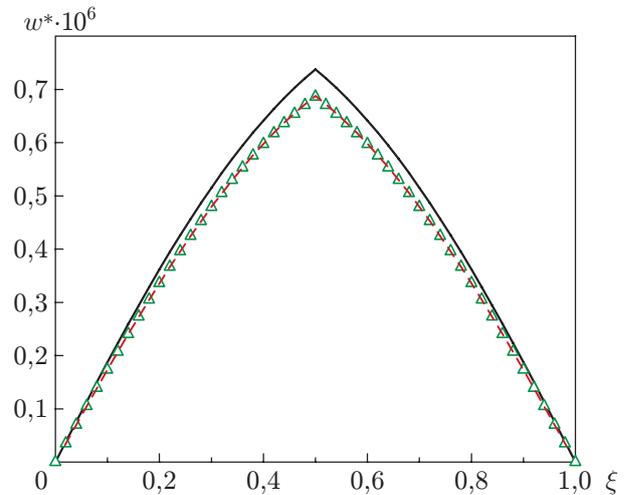


Рис. 5

Рис. 5. Распределение безразмерного прогиба w^* по координате ξ для балки с трещиной при $l_1 = 0, l_2 \neq 0$:

линии — данные настоящей работы (сплошная — $l_1 = 0, l_2 = 1/10$, штриховая — $l_1 = 0, l_2 = 1/25$), точки — классическое решение

Пусть $l_2 = 0, l_1 \neq 0$. В этом случае выражение (24) является решением задачи об изгибе, сформулированной с использованием градиентной теории упругости [4]. Соответствующее этому решению распределение прогиба $w^*(\xi)$ приведено на рис. 4. Величина прогиба уменьшается с увеличением параметра l_1 . На рис. 5 представлено распределение прогиба $w^*(\xi)$, соответствующее нелокальной теории упругости ($l_1 = 0, l_2 \neq 0$) [3]. В этом случае прогиб увеличивается с увеличением параметра l_1 , кроме того, на кривой $w^*(\xi)$ имеется излом, а на кривой $\varphi^*(\xi)$ — скачок.

На рис. 6 представлены зависимости $w^*(\xi)$ для балки с трещиной при $l_1 = l_2 \neq 0$. Как следует из приведенных зависимостей, прогиб балки при ее изгибе в окрестности трещины, определенный с использованием нелокальной градиентной теории, существенно отличается от прогиба, полученного с использованием классической теории упругости. В случае если оба масштабных параметра не равны нулю, наиболее существенно масштабный эффект проявляется в окрестности трещины.

На рис. 7 приведена зависимость безразмерного прогиба w^* от координаты ξ для балки с трещиной при различных значениях гибкости $\eta = L/h$. Как при $l_1 > l_2$, так и при $l_1 < l_2$ прогиб балки увеличивается с увеличением ее гибкости.

Заключение. С использованием нелокальной градиентной теории упругости и модели вычисления изгибающей жесткости трещины исследован изгиб микробалки Тимошенко с трещиной. Получены выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы высших порядков и соответствующие им краевые условия для балки Тимошенко. Найдено аналитическое решение задачи об изгибе свободно опертой микробалки Тимошенко, находящейся под действием поперечной нагрузки. Исследовано влияние на прогиб балки двух масштабных параметров: линейного масштаба материала и характерной длины ма-

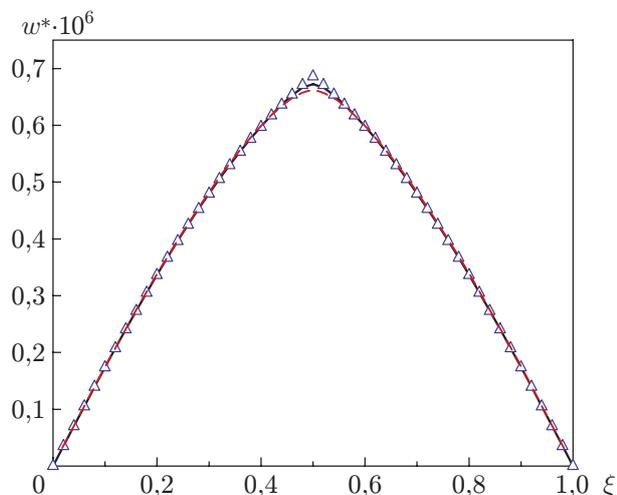


Рис. 6

Рис. 6. Распределение безразмерного прогиба w^* по координате ξ для балки с трещиной при $l_1 = l_2 \neq 0$:

линии — данные настоящей работы (сплошная линия — $l_1 = l_2 = 1/50$, штриховая — $l_1 = l_2 = 1/25$), точки — классическое решение

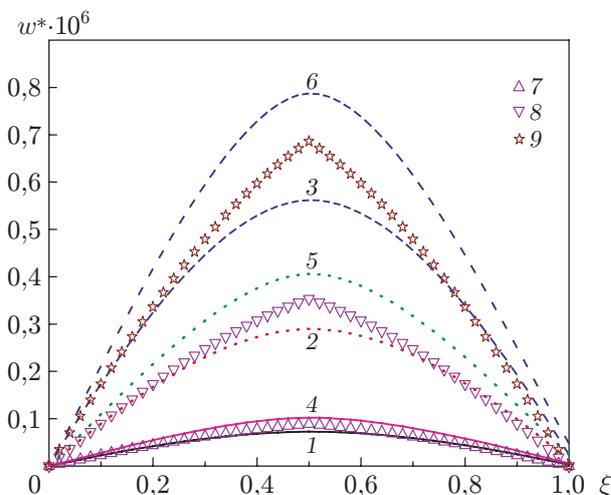


Рис. 7

Рис. 7. Распределение безразмерного прогиба w^* по координате ξ для балки с трещиной при различных значениях гибкости балки:

линии — данные настоящей работы (1 — $l_1 = 0,2$, $l_2 = 0,1$, $\eta = 5$, 2 — $l_1 = 0,2$, $l_2 = 0,1$, $\eta = 8$, 3 — $l_1 = 0,2$, $l_2 = 0,1$, $\eta = 10$, 4 — $l_1 = 0,1$, $l_2 = 0,2$, $\eta = 5$, 5 — $l_1 = 0,1$, $l_2 = 0,2$, $\eta = 8$, 6 — $l_1 = 0,1$, $l_2 = 0,2$, $\eta = 10$), точки — классическое решение (7 — $\eta = 5$, 8 — $\eta = 8$, 9 — $\eta = 10$)

териальных внутренних (атомных) связей. Проведено сравнение полученных решений с решением, найденным на основе классической теории упругости. Установлено, что масштабный эффект проявляется наиболее существенно в окрестности трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Srinivasa A. R., Reddy J. N.** A model for a constrained, finitely deforming, elastic solid with rotation gradient dependent strain energy, and its specialization to von Kármán plates and beams // *J. Mech. Phys. Solids*. 2013. V. 61. P. 873–885.
2. **Lim C. W., Zhang G., Reddy J. N.** A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation // *J. Mech. Phys. Solids*. 2015. V. 78. P. 298–313.
3. **Eringen A. C.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // *J. Appl. Phys.* 1983. V. 54. P. 4703–4710.
4. **Aifantis E. C.** On the role of gradients in the localization of deformation and fracture // *Intern. J. Engng Sci.* 1992. V. 30. P. 1279–1299.
5. **Askes H., Aifantis E. C.** Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *Intern. J. Solids Structures*. 2011. V. 48. P. 1962–1990.
6. **Li Y. S., Ma P., Wang W.** Bending, buckling, and free vibration of magneto-electro-elastic nanobeam based on nonlocal theory // *J. Intelligent Material Systems Structures*. 2016. V. 27. P. 1139–1149.

7. **Li X. B., Li L., Hu Y., et al.** Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory // Composite Structures. 2017. V. 165. P. 250–265.
8. **Xu X. J., Wang X. C., Zheng M. L., Ma Z.** Bending and buckling of nonlocal strain gradient elastic beams // Composite Structures. 2017. V. 160. P. 366–377.
9. **Lu L., Guo X., Zhao J.** A unified nonlocal strain gradient model for nanobeams and the importance of higher order terms // Intern. J. Engng Sci. 2017. V. 119. P. 265–277.
10. **Li L., Hu Y., Li X.** Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory // Intern. J. Mech. Sci. 2016. V. 115/116. P. 135–144.
11. **Loya J., Lopez-Puente J., Zaera R., Fernandez-Saez J.** Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model // J. Appl. Phys. 2009. V. 105. 044309.
12. **Akbarzadeh Khorshidi M., Shariati M.** Buckling and postbuckling of size-dependent cracked microbeams based on a modified couple stress theory // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 4. P. 717–724.
13. **Donà M., Palmeri A., Lombardo M.** Exact closed-form solutions for the static analysis of multi-cracked gradient-elastic beams in bending // Intern. J. Solids Structures. 2014. V. 51. P. 2744–2753.
14. **Palmeri A., Cicirello A.** Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler — Bernoulli and Timoshenko beams // Intern. J. Solids Structures. 2011. V. 48. P. 2184–2195.
15. **Xiao Y., Jin H., Yu O.** Bending of Timoshenko beam with effect of crack gap based on equivalent spring model // Appl. Math. Mech. 2016. V. 37. P. 513–528.
16. **Park S. K., Gao X. L.** Bernoulli — Euler beam model based on a modified couple stress theory // J. Micromech. Microengng. 2006. V. 16. P. 2355–2359.

*Поступила в редакцию 22/VIII 2018 г.,
после доработки — 16/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*
