

О ВЫПУЧИВАНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ ПАНЕЛИ  
ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ

Т. Я. Герт

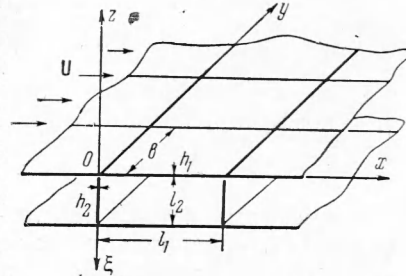
(Москва)

Рассматривается прямоугольная панель бесконечной ширины, обтекаемая с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. Вследствие торможения в пограничном слое панель нагревается и в ней возникают температурные напряжения, способные вызвать выпучивание панели [1].

Избыточное давление газа учтено по линеаризированной теории [2].

Уравнение задачи удалось свести к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами. Критические скорости потока получены методом Галеркина [3]. Задача была поставлена Л. А. Галиным.

1. Температурные напряжения в панели. Пусть горизонтальная бесконечная в направлении оси  $y$  панель (фиг. 1) жестко закреплена по краям  $x = 0$  и  $x = l_1$  при помощи балок с вертикальными стенками и укреплена посредством ребер  $y = 0, y = \pm b, y = \pm 2b, \dots$ , на которые она свободно опирается. Такая панель может служить частью обшивки обтекаемого тела. Скорость набегающего потока  $U$  больше, чем скорость звука  $c$  и направлена вдоль оси  $x$ . Примем следующие допущения.



Фиг. 1

1) Панель нагревается равномерно по всей поверхности, а по краям происходит отток тепла в балки.

2) Балки нагреваются только за счет притока тепла с краев.

3) По толщине панели температура не меняется.

4) Температурный режим установившийся, т. е. не меняется с течением времени, что достигается при постоянном притоке тепла извне специальными охладительными устройствами.

5) В середине панели температура равна температуре пограничного слоя  $T$ , а в середине балки — более низкая температура  $T_0$ .

6) Вдоль оси  $y$  температура не меняется. Условимся в дальнейшем индексами 1 и 2 обозначать величины, относящиеся соответственно к панели и балке.

Тогда получаем следующие граничные условия для температур:

$$T_1(l_1/2) = T, \quad T_2(l_2/2) = T_0, \quad T_1(0) = T_2(0), \quad T_1(l_1) = T_1(0) \quad (1.1)$$

$$k_1 \left( \frac{dT_1}{dx} \right)_{x=0} h_1 = -k_2 \left( \frac{dT_2}{d\xi} \right)_{\xi=0} \frac{h_2}{2}$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты теплопроводности материалов панели и балки. Дифференциальные уравнения теплопроводности для панели и балки

принимают простой вид благодаря четвертому допущению

$$a_1^2 \frac{d^2 T_1}{dx^2} = H, \quad a_2^2 \frac{d^2 T_2}{d\xi^2} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты температуропроводности,  $H$  — величина, пропорциональная притоку тепла.

Полагая  $T_0 = 0$ , из уравнений (1.2) с учетом условий (1.1) получаем

$$T_1 = T \left[ 1 - \frac{4p}{l_1^2} \left( x - \frac{l_1}{2} \right)^2 \right] \quad \left( \frac{1}{p} = 1 + \frac{4k_1 h_1 l_2}{k_2 h_2 l_1} \right) \quad (1.3)$$

$$T_2 = T (1 - p) \left( 1 - \frac{2}{l_2} \xi \right) \quad (1.4)$$

В дальнейшем аэродинамический нагрев будем учитывать по формуле, данной Эккертом в [4]

$$T = \frac{0.84U^2}{2gc_p} = \frac{0.84c^2 M^2}{2gc_p} \quad \left( M = \frac{U}{c} \right) \quad (1.5)$$

Здесь  $g$  — ускорение земного притяжения,  $c_p$  — удельная теплоемкость газа, равная для воздуха  $102.5 \text{ ккал/кг}^\circ\text{C}$ .

Для нахождения температурных напряжений воспользуемся уравнениями связи между компонентами напряжений и компонентами деформаций термоупругости

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{xx} - \beta T, & X_y &= \mu \varepsilon_{xy} \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{yy} - \beta T, & Y_z &= \mu \varepsilon_{yz} \\ Z_z &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{zz} - \beta T, & Z_x &= \mu \varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Лямэ

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad \beta = \alpha (3\lambda + 2\mu)$$

Рассмотрим систему панель — балка. Будем при этом считать балку пластинкой, срединная плоскость которой перпендикулярна к срединной плоскости панели. Далее предположим, что сечения балки и панели, перпендикулярные к координатным осям в результате деформации, смещаются только параллельно самим себе и, кроме того, расстояние между балками  $x = 0$  и  $x = l_1$  остается неизменным. Тогда для перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в балке и панели получаем условия

$$\begin{aligned} u_2 &= u_2(x), & v_2 &= v_2(y), & w_2 &= w_2(\xi) \\ u_1 &= u_1(x), & v_1 &= v_1(y), & w_1 &= w_1(z) \\ u_1(0) &= u_1(l_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из последних трех уравнений (1.6) при этом следует, что все касательные напряжения в панели и балке обращаются в нуль.

Нормальные напряжения

$$\xi_{\xi 2} = X_{x2} = Z_{z1} = 0 \quad (1.8)$$

так как перемещения в балке вдоль осей  $x$  и  $\xi$  и в панели вдоль оси  $z$  ничем не связаны.

Заметим, что из шестого допущения для температур следует

$$\varepsilon_{yy} = \text{const} \quad (1.9)$$

Учитывая условия (1.7), (1.8) и (1.9) и удовлетворяя уравнениям равновесия и условием совместности деформаций, из (1.6) без труда

можно получить

$$Y_{y2} = E_2 \left[ \varepsilon_{yy} - \alpha_2 T (1-p) \left( 1 - \frac{2}{l_2} \xi \right) \right] \quad (1.10)$$

$$X_{x1} = E_1 \left[ \sigma_1 \frac{\varepsilon_{yy}}{1 - \sigma_1^2} - \alpha_1 T \frac{1}{1 - \sigma_1} \left( 1 - \frac{p}{3} \right) \right] \quad (1.11)$$

$$Y_{y1} = E_1 \left[ \frac{\varepsilon_{yy}}{1 - \sigma_1^2} - \frac{\alpha_1 T}{1 - \sigma_1} \left( 1 - \frac{\sigma_1 p}{3} \right) + \frac{4p}{l_1^2} \alpha_1 T \left( x - \frac{l_1}{2} \right)^2 \right] \quad (1.12)$$

Здесь  $E_2$  и  $E_1$  — модули Юнга и  $\sigma_1$  — коэффициент Пуассона.

Предположим, что край панели, который считается бесконечно удаленным от рассматриваемого участка, свободен от нагрузки. Тогда условие равновесия усилий в проекции на ось  $y$  имеет вид

$$\int_0^{l_2/2} Y_{y2} \frac{h_2}{2} d\xi + \int_0^{l_1/2} Y_{y1} h_1 dx = 0 \quad (1.13)$$

Отсюда

$$\varepsilon_{yy} = T \frac{\alpha_2 (1-p) (1 - \sigma_1^2) + 4\alpha_1 (1 - 1/3 p) (1 + \sigma_1) \nu \kappa}{2(1 - \sigma_1^2) + 4\nu \kappa} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\nu = E_1 / E_2, \quad \kappa = h_1 l_1 / h_2 l_2$$

В дальнейшем будем считать, что балка и панель изготовлены из одинаковых материалов

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad E_1 = E_2 = E$$

В этом случае

$$\varepsilon_{yy} = \alpha T \frac{(1-p) (1 - \sigma^2) + 4(1 - 1/3 p) (1 + \sigma) \kappa}{2(1 - \sigma^2) + 4\kappa} \quad (1.15)$$

Для напряжений в панели получаем формулы

$$X_{x1} = E\alpha T X_x^*, \quad Y_{y1} = E\alpha T \left[ Y_y^* + \frac{4p}{l_1^2} \left( x - \frac{l_1}{2} \right)^2 \right] \quad (1.16)$$

Здесь через  $X_x^*$  и  $Y_y^*$  обозначены безразмерные постоянные величины.

**2. Условия выпучивания панели.** Если напряжения в срединной плоскости панели превысят определенные значения, станут возможными потеря устойчивости плоской формы равновесия и появление прогиба  $w(x, y)$ , удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\left( D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} \right)$$

с граничными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, l_1; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \pm b, \pm 2b, \dots \quad (2.2)$$

Здесь  $q$  — поперечное избыточное аэродинамическое давление

$$N_x = X_{x1} h_1, \quad N_y = Y_{y1} h_1 \quad (2.3)$$

Зададим форму прогиба в виде

$$w(x, y) = Af(x) \sin \frac{\pi n y}{b} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где  $A$  — постоянный коэффициент и

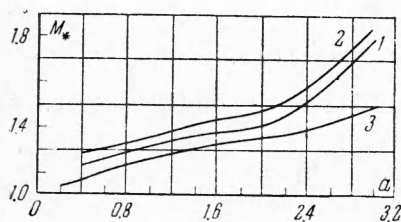
$$f(0) = f(l_1) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=l_1} = 0 \quad (2.5)$$

Тогда по линеаризированной теории формула для избыточного аэродинамического давления имеет вид

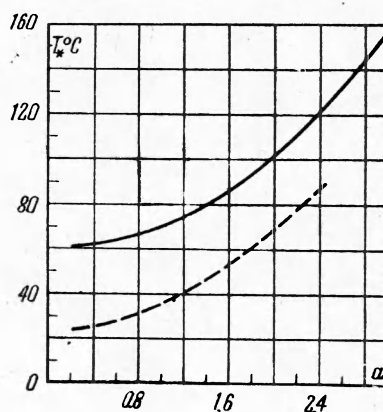
$$q(x, y) = A \frac{\rho U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin \frac{\pi n y}{b} \int_0^x \frac{d^2 f}{d\xi^2} J_0 \left[ \frac{\pi n (x - \xi)}{b \sqrt{M^2 - 1}} \right] d\xi \quad (2.6)$$

При больших сверхзвуковых скоростях, когда  $M \rightarrow \infty$ , эта формула совпадает с формулой поршневой теории.

Подстановка (2.3), (2.4) и (2.6) в (2.1) приводит к интегродифференциальному уравнению для прогиба при выпучивании.



Фиг. 2



Фиг. 3

Разложим функцию Бесселя  $J_0$  под знаком интеграла (2.6) в ряд

$$J_0(\eta) = 1 - \frac{\eta^2}{2^2} + \frac{\eta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\eta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (2.7)$$

и ограничимся конечным числом членов ряда, например, тремя. Так как ряд для функции Бесселя быстро сходится, то такое приближение допустимо.

Далее, интегрируя по частям полученное под интегралом выражение, учитывая граничные условия и вводя обозначение

$$\int_0^x \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_1} f(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = g(x) \quad (2.8)$$

где  $g(x)$  — функция, удовлетворяющая условиям

$$g(0) = \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^3g}{dx^3}\right)_{x=0, l_1} = \left(\frac{d^4g}{dx^4}\right)_{x=0, l_1} = 0 \quad (2.9)$$

получаем возможность заменить интегродифференциальное уравнение задачи обыкновенным дифференциальным уравнением более высокого порядка.

Перейдем к безразмерным величинам

$$x_1 = \frac{x}{l_1}, \quad a = \frac{l_1}{b}, \quad t = \frac{l_1}{h_1}, \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1} \\ S = 0.84 \frac{12(1 - \sigma^2) \alpha c^2 t^2}{2gc_p}, \quad r = \frac{12(1 - \sigma^2) \rho c^2 t^3}{E} \quad (2.10)$$

и будем в дальнейшем опускать индекс при  $x_1$ . Тогда при  $n = 1$  уравнение принимает вид

$$\frac{d^7 g}{dx^7} - 2a^2 \pi^2 \frac{d^5 g}{dx^5} + a^4 \pi^4 \frac{d^3 g}{dx^3} + s(\beta^2 + 1) \left\{ a^2 \pi^2 \left[ Y_y^* + 4p \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \frac{d^3 g}{dx^3} - X_x^* \frac{d^5 g}{dx^5} \right\} - r \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \left( \frac{d^4 g}{dx^4} - \frac{a^2 \pi^2}{2\beta^2} \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{3}{8} \frac{a^4 \pi^4}{\beta^4} g \right) = 0 \quad (2.11)$$

Искомая критическая скорость набегающего потока при выпучивании входит в уравнение (2.11) через величину  $\beta$ , которая является собственным значением этого обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами при граничных условиях (2.9).

Задачу о собственных значениях такого уравнения можно решать приближенными методами. На фиг. 2 и 3 показаны результаты счета по методу Галеркина с тремя функциями, полученные на машине «Стрела» в МГУ.

Рассматривалась алюминиевая панель, укрепленная по краям алюминиевыми балками

$$\sigma = 1/3, \quad \alpha = 24 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}, \quad E = 0.8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad c = 340 \text{ м/сек}$$

$$g = 9.81 \text{ м/сек}^2, \quad \rho = 0.12 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4, \quad l_1 = 300 \text{ мм}, \quad h_1 = 3 \text{ мм}$$

$$l_2 = 200 \text{ мм}, \quad h_2 = 1.5 \text{ мм}$$

На фиг. 2 графически показана зависимость критической скорости потока  $M_*$  от геометрического параметра  $a = l_1/b$ . Были взяты последовательно 1, 2 и 3 члена ряда для приближенного представления функции Бесселя в (2.6). Соответствующие кривые обозначены цифрами 3, 2 и 1.

На фиг. 3 температура, соответствующая критической скорости потока при трех членах ряда для функции Бесселя (непрерывная линия), сравнивается с критической температурой выпучивания панели при нагреве без учета давления потока (пунктир). Критическая температура при наличии давления потока оказывается больше соответствующей температуры при отсутствии этого давления, что отмечалось в [5].

Поступила 29 VI 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff N. J. Thermal buckling of supersonic wing panels. JAS, 1956, 23, No. 11.
2. Красилицкова Е. А. Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1947, т. XI, вып. 1.
3. П р а т у с е в и ч Я. А. Вариационные методы в строительной механике. Гостехиздат, 1948.
4. Э к к е р т С. Введение в теорию теплообмена и массообмена. Госэнергоиздат, 1957.
5. О в ч а н А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.