

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сахновский Э. Г. Неустановившееся плоско-параллельное течение частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, № 4.
2. Сахновский Э. Г. Влияние ларморовского вращения заряженных частиц на нестационарное температурное поле в плоском канале. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
3. Сахновский Э. Г. Одножидкостные уравнения динамики частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Jagadeesan K. Heat transfer due to hydromagnetic channel flow with conducting walls AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 4.
5. Новиков И. И., Пичахчи Л. Д. Теплопередача в потоке электропроводящей жидкости при малых значениях магнитного числа Рейнольдса. ПМТФ, 1964, № 2.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА  
В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ  
С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ПРОВОДИМОСТИ

А. И. Ковалев (Ленинград)

1. Имеется ряд работ [1-3], в которых вычисляются распределение электрического потенциала и распределение плотности тока в движущейся жидкости, обладающей анизотропной проводимостью. В связи с этим представляет интерес рассмотрение возможности электрического моделирования подобных задач на материалах с соответствующим тензором проводимости. Таким проводником будет, например, поликристаллический висмут, помещенный в магнитное поле.

В дальнейшем предполагается, что магнитное поле и поле скоростей заданы, поток жидкости с тензорной проводимостью окружен стенками из изоляторов и идеальных проводников, причем последние могут быть электродами, на которые поданы определенные электрические потенциалы. Все формулы записаны в системе единиц МКСА.

Рассмотрим условия, которые должны выполняться, чтобы для неподвижной модели без распределенных источников тока распределение плотности тока было бы таким же, как и в устройстве с движущейся жидкостью.

Для модели уравнение непрерывности тока и закон Ома могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\sigma \operatorname{grad} V \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $V$  — электрический потенциал,  $\sigma$  — тензор электронной проводимости, имеющий следующий вид в системе координат с магнитным полем, направленным вдоль оси  $z$ :

$$\sigma \equiv \frac{\sigma_0}{1 + \mu^2 B^2} \begin{pmatrix} 1 - \mu B & V & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 B^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mu$  — холловская подвижность,  $\sigma_0$  — проводимость вдоль магнитного поля,  $\mu B = \omega \tau$ . Для устройства с движущейся жидкостью аналогичные уравнения имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma (-\operatorname{grad} V + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции.

Второе уравнение (1.3) можно привести к виду второго уравнения (1.1), если вектор

$$\mathbf{E}^* = -\operatorname{grad} V + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

может быть представлен как градиент некоторой величины —  $W$ , которую и следует поставить в соответствие электрическому потенциалу в модели. Это, в свою очередь, приводит к условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^* = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

При написании формулы (1.4) использовано уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Условие (1.4) налагает ограничение на конфигурации магнитных полей и полей скоростей, при которых возможно моделирование на моделях без распределенных источников тока. Наиболее простым случаем выполнения этого условия является равенство нулю каждого члена в формуле (1.4). Равенство нулю первого члена приводит к условию постоянства вектора скорости на силовой линии. Равенство нулю второго члена требует постоянства вектора магнитной индукции вдоль линий тока. Равенство нулю последнего члена приводит к условию несжимаемости жидкости.

При выполнении условия (1.4) можно в любой точке  $M$  определить потенциал  $W$  с точностью до постоянной

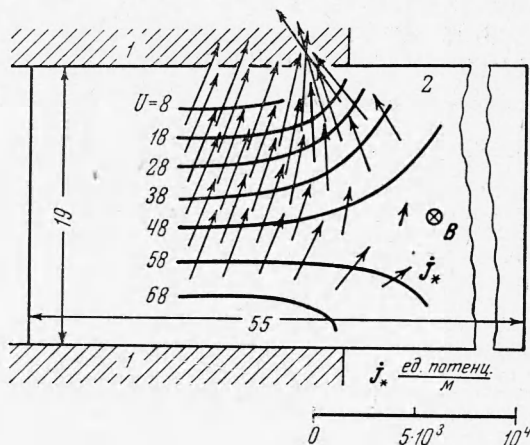
$$W(M) = V(M) - \int_{M_0}^M (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5)$$

Здесь  $d\mathbf{l}$  — элемент пути интегрирования.

Закон Ома теперь может быть записан в таком же виде, в каком он записан для модели

$$\mathbf{j} = -\sigma \text{ grad } V \quad (1.6)$$

На границе с изолятором граничные условия для потенциала  $W$  и электрического потенциала в случае модели также одинаковы, что следует из равенства нулю нормальной составляющей плотности тока и одинакового написания закона Ома (1.6). Возможны случаи, когда на хорошо проводящей поверхности вспомогательный потенциал  $W$  постоянен вместе с  $V$ .



Фиг. 1

Тогда, если задать на электродах модели электрические потенциалы, пропорциональные соответствующим значениям потенциала  $W$  для устройства с движущейся жидкостью, то распределения обоих потенциалов будут подобны. Будут подобны и распределения плотностей токов. При этом величина  $\mu B = \omega t$  должна быть одинаковой в том и другом случае.

2. Было выполнено моделирование краевых эффектов в прямоугольном канале со скрещенными полями и сплошными электродами. Магнитное поле предполагалось однородным. Из-за неравномерности поля скоростей по сечению канала

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq 0$$

(скорость изменяется вдоль силовой линии). Однако, как показано в работе [4], в данном случае трехмерная задача может быть сведена к плоской для усредненных вдоль магнитных силовых линий величин. Последняя же плоская задача решается при помощи моделирования (при условии, что равны нулю остальные два члена в формуле (1.4)). Аналогичная плоская задача моделируется в случае скалярной проводимости в работе [5].

Потенциал  $W$  для плоского случая, согласно (1.5), запишется в виде

$$W = V + B\Phi \quad (\partial\Phi / \partial y = v_x, \quad -\partial\Phi / \partial x = v_y)$$

Двум электродам соответствует разность потенциалов  $W$ , равная

$$W_0 = V_0 + B\Phi_0 \quad (2.2)$$

Здесь  $V_0$  — разность электрических потенциалов между электродами,  $\Phi_0$  — расход жидкости, отнесенный к единице высоты канала вдоль магнитного поля.

В задаче с двумя электродами все возможные распределения потенциала  $W$  и плотности тока не зависят от профиля скоростей в направлении, перпендикулярном магнитному полю.

Устройство модели ясно из фиг. 1. Жидкость моделировалась пластинкой из поликристаллического висмута с холловской подвижностью  $\mu = 4000 \text{ см}^2/\text{в сек}$  при комнатной температуре. Для того чтобы увеличить подвижность, применялось охлаждение модели до  $-20^\circ \text{C}$ . В магнитном поле порядка  $5000 \text{ гс}$  было получено значение произведения  $\mu B = 0.3-0.4$ . Последняя величина измерялась при тех же условиях, в которых находилась модель, на специальном образце из того же висмута. Electrodes были выполнены из меди достаточно большого сечения, чтобы могли имитировать поверхность равного потенциала.

Установка работала на переменном токе промышленной частоты, что позволило наиболее просто решить вопрос автоматизации получения картины поля и питания

модели. Возможность применения переменного тока следует из линейного характера уравнений (1.1) и граничных условий. Электрический потенциал в каждой точке модели будет изменяться по такому же закону, как и на электродах модели. Поэтому линии равного потенциала будут сохранять свое положение в любой момент времени.

Распределение потенциала на поверхности пластинки из висмута снималось компенсационным методом на мостиковой схеме, вполне аналогичной той, которая применяется при работе электролитической ванны. Регистрация эквипотенциалей полуавтоматическая [6]. Напряжение с поверхности модели снималось щупом. При прохождении щупа через определенную эквипотенциаль при помощи специальной схемы через щуп разряжался конденсатор, и на поверхности модели получалась отметка. Таким образом, устранялись погрешности, связанные с перенесением движения щупа и конфигурации модели на чертеж. Электронная схема регистрировала прохождение фазы сигнала со щупа через значение  $1/2\pi$  или амплитуды через нуль при пересечении эквипотенциали.

Пример снятого таким образом поля потенциала в относительных единицах и рассчитанного затем поля векторов плотности тока при  $\mu B = 0.4$  показан на фиг. 1, где 1 — медный электрод, 2 — пластинка из висмута. Плотность тока рассчитывалась при  $\sigma_0 = 1$  по формуле

$$\mathbf{j}_* = \frac{1}{1 + \mu^2 B^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu B \\ \mu B & 1 \end{pmatrix} \text{grad } V \quad (2.3)$$

Размерность  $\mathbf{j}_*$  совпадает с размерностью напряженности поля. Переход к плотности тока в устройстве с движущейся жидкостью может быть выполнен по формуле

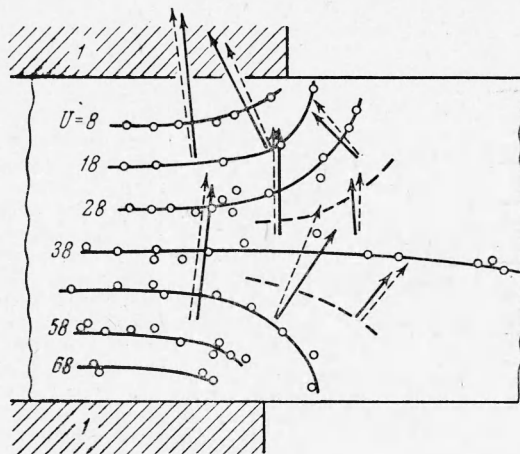
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_* \sigma_0 W_0 / U_{\text{ом}} M \quad (2.4)$$

где  $\sigma_0$  — проводимость жидкости,  $M$  — отношение размеров устройства к размерам модели.

Оценивая точность метода, следует отметить, что подобие распределений плотностей токов является точным, если выполняются оговоренные выше условия. Для того чтобы оценить точность построения картины поля, точность изготовления модели и влияние конечной длины «канала» модели, было снято поле при  $B = 0$ ; остальные условия не изменялись. Картина поля и результаты сравнения приведены на фиг. 2. Максимальный разброс отметок эквипотенциалей не превышал 3% напряжения на электродах. Область срабатывания автоматического отметчика не превышала 0.1–0.2%. Разброс опытных точек обусловлен несовершенством контакта модель — щуп и непостоянством температуры модели. Напряженность поля, найденная из распределения потенциала (сплошные стрелки) сравнивалась с вычисленной по формулам работы [7] (пунктирные стрелки). Ошибка в определении напряженности, отнесенная к ее величине в области однородного поля, составила в среднем для указанных на чертеже точек 10%. Эту величину следует принять за меру точности метода, хотя в ряде случаев точность может быть повышена.

Применение моделирования позволяет снизить трудоемкость решения задач. Кроме того, появляется возможность весьма просто решать задачи с тензором проводимости, зависящим от координат.

Фиг. 2



Поступила 22 V 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hurwitz H. Jr., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence tensor conductivity on current distribution in MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 2.
2. Podolsky B., Sherman A. Influence of tensor conductivity on end current in crossed field MHD channels with skewed electrodes. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 4.
3. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
4. Ватажин А. Б. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, № 3.
5. Назаренко В. В. О моделировании магнитогидродинамического течения в канале на электролитической ванне. ПМТФ, 1963, № 5.
6. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. Физматгиз, 1959.
7. Табакс К. К. Расчет электрического поля электромагнитного насоса. Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, вып. 21.