5. **Протасов Ю. И.** Теоретические основы механического разрушения горных пород.— М.: Недра, 1985.
6. **Колесников Ю. В., Морозов Е. М.** Механика контактного разрушения.— М.: Наука, 1989.
7. **Падуков В. А., Антоненко В. А., Подозерский Д. С.** Разрушение горных пород при ударе и взрыве.— Л.: Наука, 1971.
8. **Фадеев П. Я., Коробков В. В., Фадеев В. Я. и др.** Испытания бутобоя с высокоэнергетическим гидропневматическим молотом // Горн. журн.— 1986.— № 8.
9. **Астапов Н. С., Корнев В. М.** Динамическое деформирование блока упругого материала // ПМТФ.— 1991.— № 2.

г. Новосибирск *Поступила 29/I 1990 г., в окончательном варианте — 2/XI 1990 г.*

УДК 539.3

С. А. Бублик, И. Г. Кадомцев

К ВОПРОСУ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ТЕЛА ПО СТЕРЖНЮ

В квазистатической постановке рассматривается продольный упругопластический удар тела по полубесконечному стержню. Хорошо известно упругое решение этой задачи, предложенное Сирсом [1], однако оно подтверждается экспериментальными данными только для малых скоростей удара. С ростом скорости удара в области контакта появляются пластические деформации, которые заметно сказываются на основных параметрах удара: сила контактного взаимодействия P, местное смятие α, время контакта.

Задача о неупругом ударе в точной постановке приводит к динамической упругопластической задаче, которая в силу своей сложности решается либо численно, либо приближенно. Полагая, что скорость удара много меньше скорости звука в телах, можно пренебречь инерцией местного смятия и решать задачу в квазистатической постановке, т. е. считать, что зависимость $\alpha(P)$ в динамической задаче остается такой же, как и в статической. В работе принимается, что общие перемещения стержня можно считать упругими, а местные в области контакта тела и стержня — упругопластическими. Применяется построенная ранее модель местного смятия осесимметричных упругопластических тел $\alpha(P)$, которая отличается от предшествующих тем, что в ней учитывается вытекание материала в зоне контакта, а пластические деформации учитываются с момента, когда средние напряжения в зоне контакта достигают бринеллевских [2].

Поместим начало координат в точке начального касания тела и стержня. Уравнение продольных колебаний стержня имеет вид

$$\partial^2 u_1/\partial^2 t^2 = a_1 \partial^2 u_1/\partial x^2,\ a_1 = (E_1/\rho_1)^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь u_1 — продольное смещение точек стержня; E_1 — модуль Юнга; ρ_1 — плотность материала стержня.

Перемещение тела описывается уравнением

$$m\partial^2 u_2/\partial t^2 = -P(t),$$

где u_2 — перемещение тела; m — его масса; $P(t)$— сила контактного взаимодействия тела и стержня. Начальные условия следующие:

$$u_1(x,0) = 0,\ u_2(x,0) = 0,\ \partial u_1(x,0)/\partial t = 0,\ \partial u_2(x,0)/\partial t = v_0$$

(v_0 — начальная скорость соударения). Местное смятие имеет вид

$$\alpha = u_2(0,t) - u_1(0,t). \tag{2}$$

На конце стержня выполняется условие

$$E_1 F_1 \partial u_1(0,t)/\partial x = -P(t) \tag{3}$$

(F_1 — площадь поперечного сечения стержня).

Применим к (1) и (3) преобразование Лапласа:

$$\partial^2 U_1/\partial x^2 = x^2 U_1/a_1^2; \tag{4}$$

$$sU_1(0,s) = a_1 Q/(E_1 F_1), \tag{5}$$

$$U_1 = s\int_0^\infty u_1(x,t)\exp(-st)\,dt,\quad Q = s\int_0^\infty P(t)\exp(-st)\,dt$$

(s — параметр преобразования Лапласа). Из (4), (5) и условия $U_1(\infty, s) = 0$ вытекает

(6) $$u_1 = C_1 \exp(-sx/a_1),\ C_1 = Qa_1(E_1F_1s)^{-1}.$$

Обращая (6), получаем

$$\partial u_1(0, t)/\partial t = a_1P(t)/(E_1F_1).$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче Коши:

(7) $$m\partial^2 u_2(0, t)/\partial t^2 = -P(t),\ \partial u_1(0, t)/\partial t = a_1P(t)/(E_1F_1),$$
$$u_1(0, 0) = 0,\ u_2(0, 0) = 0,\ \partial u_1(0, 0)/\partial t = 0,\ \partial u_2(0, 0)/\partial t = v_0.$$

При этом должно выполняться условие (2). В теории Сирса зависимость $\alpha(P)$ упругая, т. е.

(8) $$\alpha = hP^{2/3},\ h = R^{-1/3}(3/(4E))^{2/3},\ R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1},$$
$$E = E_1E_2/[(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1].$$

Здесь R_2 и R_1 — радиусы кривизны тела и конца стержня в точке их касания; ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона для материала стержня и тела.

Для дальнейшего исследования задачи воспользуемся моделью местного смятия из [2], представив ее в безразмерном виде

(9) $$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \begin{cases} P_*^{2/3}, & P_* < 1 \\ [(1+\beta)P_*^{1/2} + (1-\beta)P_*]/2, & dP/dt > 0 \\ P_*^{2/3}P_{\max}/P_1 + (1-\beta)[P_{\max}/P_1 - P_{\max}^{1/2}P_1^{-1/2}]/2, & dP/dt < 0 \end{cases} \Bigg\} P_* > 1,$$

где $P_* = P/P^0$; P^0 и α^0 — контактная сила и местное смятие, начиная с которых учитываются пластические деформации; $P_{\max}$ — наибольшая сила, достигаемая на этапе внедрения; $P^0 = \varkappa R\alpha^0$; $\alpha^0 = R[3\varkappa/(4E)]^2$; $\varkappa = \pi k\gamma$; $k = \sigma^0/2$; $\gamma = 5{,}7$ в случае отсутствия трения между телами; β характеризует вытекание материала из-под штампа в процессе его внедрения (если вытекание не учитывается, то $\beta = 0$, при отсутствии трения для параболического штампа $\beta = 0{,}33$); k — пластическая константа.

Для развитых пластических деформаций можно получить приближенное решение исходной задачи в замкнутом виде. В зависимости (9) при $dP/dt > 0$ для развитых пластических деформаций доминирующим будет линейный член по P, и тогда можно принять

(10) $$\alpha = bP,\ b = \lambda(2R\pi k\gamma)^{-1},\ \lambda = 1 - \beta.$$

В этом случае (7) приводится к виду

$$\ddot{\alpha} + a_1\dot{\alpha}(E_1F_1)^{-1} + \alpha(bm)^{-1} = 0,\ \alpha(0) = 0,\ \dot{\alpha}(0) = v_0,$$

откуда следует

(11) $$\alpha = v_0r^{-1}\exp(-dt)\sin(rt),\ d = a_1(2bE_1F_1)^{-1},$$
$$r = [(bm)^{-1} - d^2]^{1/2}.$$

Время внедрения T определяется из условия $\dot{\alpha}(T) = 0$, значит, $\mathrm{tg}\,(rT) = 2[(d^2bm)^{-1} - 1]^{1/2}$. Так как d^2bm — малая величина, то можно считать, что $rT = \pi/2$, откуда вытекает

$$T = \pi[\lambda m(8R\pi k\gamma)^{-1}]^{1/2},\ \alpha_{\max} = v_0r^{-1}\exp(-dT)\sin(rT).$$

Здесь $\alpha_{\max}$ — максимальное местное смятие, соответствующее наибольшей силе взаимодействия $P_{\max}$. Поскольку $\sin(rT) \to 1$, то из (11) $\alpha_{\max}$ имеет вид

$$\alpha_{\max} = v_0r^{-1}\exp[-\pi(4F_1)^{-1}(mR\pi\sigma^0\gamma)^{1/2}(\lambda E_1\rho_1)^{-1/2}].$$

Из (10) $P_{\max} = \alpha_{\max}/b$.

l, м	m, кг	R, м	v_0, м/с	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
				кН					с·10^{-3}				
0,9	20	0,065	3,65	335	399	222	356	324	0,354	0,310	0,518	0,322	0,348
0,6	13,1	0,063	1,73	120	128	80	134	121	0,492	0,310	0,459	0,265	0,298
0,6	13,1	0,063	3,84	286	331	188	298	273	0.274	0,260	0,427	0,265	0,287
0,6	13,1	0,063	5,20	397	474	260	404	372	0,240	0,249	0,417	0,265	0,280
0,3	4,86	0,063	4,20	193	207	123	199	182	0,197	0,175	0,270	0,161	0,175
0,3	4,86	0,063	5,56	252	289	266	263	243	0,165	0,165	0,260	0,161	0,170
0,3	4,86	0,063	6,50	300	349	196	308	286	0,149	0,160	0,258	0,161	0,170

Окончательно получаем, что основные параметры удара в этом случае находятся по формулам

$$\alpha_{\max} = v_0(m\lambda)^{1/2}(R\pi\sigma^0\gamma)^{-1/2}, \quad P_{\max} = v_0\lambda^{-1/2}(mR\pi\sigma^0\gamma)^{1/2}, \quad T = \pi[\lambda m(8R\pi k\gamma)^{-1}]^{1/2}. \tag{12}$$

Задача (7) с зависимостью $\alpha(P)$ в виде (8), (9) и с зависимостью $\alpha(P)$ в виде [3] решалась численно методом Рунге — Кутта. При этом определялись основные параметры удара. Все исходные данные для расчетов были взяты такими же, как и для экспериментов, приведенных в [4], и результаты расчетов сравнивались с результатами экспериментов. Стальные стержни длиной l и массой m падали с начальной скоростью v_0 на основание из дуралюмина Д1-Т. Концы стержней закруглены (R — радиус кривизны закругления). Основные характеристики удара приведены в таблице. Здесь P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 — максимальное значение контактной силы, определяемое экспериментально в [4], по модели Сирса [1], по упругопластической модели Кильчевского [3], по жесткопластической и упругопластической моделям местного смятия соответственно, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 — время соударения. Сопоставляя результаты, видим, что теория Сирса, построенная на основе упругой модели Герца, дает завышенное значение $P_{\max}$ в среднем на 20—30 % по сравнению с экспериментальным и заниженное значение T. Теория, построенная на упругопластической модели Кильчевского [3], дает заниженное значение $P_{\max}$ на 30—40 % и завышенное значение T. Предлагаемая теория дает результаты, отличающиеся от экспериментальных на 2—6 %. В случае жесткопластической модели, являющейся частным случаем используемой упругопластической, основные параметры удара определяются в явном виде (12) и результаты расчета отличаются от экспериментальных на 2—12 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдсмит В.** Удар, теория и физические свойства соударяющихся тел.— М.: Стройиздат, 1965.
2. **Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б.** Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ.— 1984.— Т. 5, № 1.
3. **Кильчевский Н. А.** Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар.— Киев: Наук. думка, 1976.
4. **Батуев Г. С., Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А.** Инженерные методы исследования ударных процессов.— М.: Машиностроение, 1977.

г. Ростов-на-Дону *Поступила 6/IV 1990 г., в окончательном варианте — 12/X 1990 г.*