УДК 622.011.4 : 622.023

ПАРАМЕТРЫ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИЛАТАНСИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ГЕОМАТЕРИАЛОВ

С. М. КАПУСТЯНСКИЙ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

(*Ленинград, Москва*)

По данным трехосных испытаний образцов геоматериалов на сжатие подобраны прочностные и дилатансионные коэффициенты в функции от параметра упрочнения (разупрочнения). Выявлено существенное изменение сцепления, внутреннего трения и скорости дилатансии с давлением и начальной пористостью. Полученные результаты позволяют проводить численные расчеты геодинамических процессов с внутренним множественным разрушением.

1. Замкнутая математическая модель упругопластического деформирования геоматериалов включает в себя уравнение баланса количества движения

$$\rho dv_i/dt = \partial S_{ij}/\partial x_j - \partial p/\partial x_i + F_i,$$

где ρ — плотность; v_i — массовая скорость; S_{ij} — тензор-девиатор напряжений; p — давление; F_i — массовые силы, а также определяющие связи, характерные для геоматериалов. Существенным элементом последних является одновременный учет внутреннего трения и дилатансии.

Используемые ниже законы течения с упрочнением [1] представим в виде

$$\tilde{d}S_{ij}/dt = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}/3 - \xi S_{ij}),\ \tilde{d}p/dt = -K(\varepsilon - 2\xi\Lambda\tau),$$

где $\tilde{d}/dt$ — производная Яуманна; $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ — тензор скорости деформаций; $\varepsilon = \partial v_i/\partial x_i$;

$$\frac{d\lambda}{dt} = \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{3G}{4}\frac{S_{ij}\varepsilon_{ij}}{\tau^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - K\frac{\varepsilon}{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)\Big/\Delta,$$

$$\Delta = G\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \Lambda K\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{1}{2\tau}\frac{d\varkappa_i}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa_i}.$$

Здесь $\varkappa_i$ — параметр упрочнения (разупрочнения) геоматериала; τ — интенсивность напряжений сдвига; напряжение

$$\frac{4}{3}\tau^2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij},\ S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij},\ p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}.$$

Для единственности решения необходимо выполнение условия $\Delta > 0$. При $\Delta \leqslant 0$ непрерывное развитие пластического течения невозможно.

Условие пластического нагружения будем искать в виде

$$\varphi(\tau, p, \varkappa_i) = \tau - \tau_i(p) - f_i(p)\varkappa_i = 0,$$

где индекс $i = 1$ — процесс пластического упрочнения, $i = 2$ — разупрочнения, $i = 3$ — остаточной прочности; $\tau_i(p)$, $f_i(p)$ — соответствующие функции давления. Пластическое течение имеет место, если $\varphi = 0$, $d\varphi = 0$ и $\xi \geqslant 0$. Если $\varphi < 0$ или $\xi < 0$, то происходит упругая разгрузка.

Использованные выше объемный K и сдвиговый G модули зависят от p и $\varkappa_i$. Модуль K может зависеть еще и от знака dp, что позволяет учесть необратимую объемную деформацию при всестороннем сжатии. Скорость дилатансии $\Lambda = de^p/|d\gamma^p|$ определяется как пластическое приращение объема, обусловленное единичным пластическим приращением сдвига:

$$d\gamma^p = \frac{1}{2}dE^p_{ij}dE^p_{ij},\ de^p = de^p_{ii},\ dE^p_{ij} = de^p_{ij} - \frac{1}{3}de^p_{ij}\delta_{ij}.$$

2. В соответствии с общим видом поверхностей предела упругости ($i = 1$), максимальной прочности ($i = 2$) и остаточной прочности ($i = 3$) выберем функции $\tau_i(p)$ в виде ($i = 1, 2, 3$)

$$\tau_i = (Y_i + \alpha_i p)^{S_i} \quad \left(p \leqslant p_i^{(m)}\right),$$
$$\tau_i = \tau_i^{(m)} = \text{const} \quad \left(p > p_i^{(m)}\right),$$
$$\alpha_i = (Z_i - Y_i)/\tau_i^0, \quad Z_i = \left(\tau_i^0\right)^{1/S_i},$$
$$\tau_1^0 = \tau_y^0/\tau_f^0,\ \tau_2^0 = 1, \quad \tau_3^0 = \tau_r^0/\tau_f^0,$$

$$p_1^{(m)} \approx \left(2{,}3\alpha_1^{S_1}\right)^{\zeta}, \quad \zeta = (1 - S_1)^{-1},$$

$$p_2^{(m)} = p_3^{(m)} \approx \left(\alpha_2^{S_2}/\alpha_3^{S_3}\right)^{\nu}, \quad \nu = (S_3 - S_2)^{-1},$$

где τ и p — обезразмеренные величины (в качестве параметров обезразмеривания используются τ_j^0 и $p_f^0 = (2/3)\tau_f^0$); α_i, S_i — постоянные для каждого геоматериала. Числа τ_y^0, τ_f^0, τ_r^0 — значения пределов упругости, прочности (максимальной и остаточной) при одноосном сжатии. Давления $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)} = p_3^{(m)}$ характеризуют переход от кулоновых пластических состояний к состояниям Треска — Мизеса соответственно в начальной стадии дилатансионного деформирования и за пределом прочности. При выводе выражения для $p_1^{(m)}$ использован экспериментальный результат [2] о приближенной независимости конкретного значения отношения $C^m = \sigma_1/\sigma_3 \approx 0{,}3$, характеризующего указанный переход, от типа геоматериала. Заметим, что минимальное значение давления $p = p_0$, при котором еще может происходить течение материала, определяется на участке упрочнения из условия $\tau_1(p_0) = \tau_2(p_0)$.

Параметр упрочнения вычисляется по формуле

$$\varkappa_1 = p_y^{n} \sqrt{(2\gamma^p - e^p)/3},$$

где p_y — давление отсчета, соответствующее точке A пересечения пути деформирования с пределом упругости (см. рисунок);

$$n = n_1 = \frac{S_1}{2\left(\tau_2/\tau_1 - 1\right)} \quad \left(p_y \leqslant p_1^{(m)}\right); \quad n = 0 \quad \left(p_y \geqslant p_2^{(m)}\right);$$

$$n = n_1\left(p_2^{(m)} - p_y\right)/\left(p_2^{(m)} - p_1^{(m)}\right) \quad \left(p_1^{(m)} < p_y < p_2^{(m)}\right).$$

Параметр разупрочнения определяется в виде

$$\varkappa_2 = M p_f^{-q} \frac{\Delta\left(2\gamma^p - e^p\right)}{3}, \quad q = \frac{S_2}{2\left(1 - \tau_3/\tau_2\right)},$$

где p_f — давление отсчета, соответствующее точке B пересечения пути деформирования с пределом прочности; $\Delta(2\gamma^p - e^p)$ — приращение величины $(2\gamma^p - e^p)$, отсчитанное от ее значения на пределе прочности. Модуль спада M вычисляется по формуле

$$M = M^0\left(p_2^{(m)} - p_f\right)^2/\left(p_2^{m} - 1\right)^2 \quad \left(p_f \leqslant p_2^{(m)}\right),$$

$$M = 0 \quad \left(p_f > p_2^{(m)}\right),$$

где M^0 — модуль спада при одноосном сжатии, нормированный на τ_f^0. Функции $f_i(p)$ представим степенными выражениями $f_i(p) = A_i p^{-m_i}$; $A_2 = -1$, $A_3 = 0$,

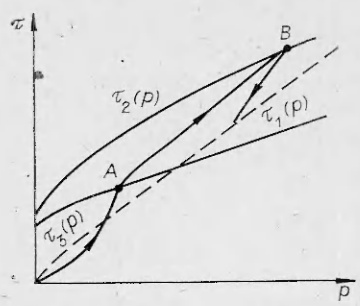
$$m_1 \approx n, m_2 \approx -q.$$

Инвариантный вид скорости дилатансии на участках упрочнения и разупрочнения определяется формулой

$$\Lambda = \Lambda^0 \exp\ \{-a_0 \operatorname{sign}(R)\sqrt{|R|}\}\ (R \geqslant b \text{ или } R < b \text{ и } \tau \leqslant \tau_2),$$

$$\Lambda = \Lambda_*^0 \exp\{-a_1 \operatorname{sign}(R)\sqrt{|R|}\} \quad (R < b \text{ и } \tau \geqslant \tau_2).$$

Здесь $R = (p - \tau)/3$ (в частности, если $\sigma_2 = \sigma_1$, то $R = -\sigma_1/\tau_f^0$); $a_1 = a_0 + \ln\left(\Lambda_*^0/\Lambda^0\right)/\sqrt{b}$; Λ^0 и Λ_*^0 — значения скоростей дилатансии при одноосном сжатии слева и справа от предела прочности. При $R \geqslant b$ скорость дилатансии не испытывает скачка при переходе через предел прочности. Параметр b близок к нулю ($b > 0$), однако экспериментальных значений его пока нет.



Выражение для скорости дилатансии получено путем обработки экспериментальных данных [2, 3]. При постоянном боковом давлении σ_1 величина Λ не меняется в процессе деформирования вплоть до остаточной прочности, где Λ резко уменьшается до нуля. При малых значениях $|\sigma_1|$ для некоторых геоматериалов имеет место скачкообразное увеличение Λ при переходе через предел прочности.

Модули упругости K и G можно вычислить следующим образом. На участке упрочнения модули практически не меняются в процессе деформирования

Таблица 1

Шифр	m_0, %	τ_f^0, МПа	$K_1\cdot10^{-2}$	$G_1\cdot10^{-2}$	$\gamma_1\cdot10^3$	s_1	s_2	s_3
Песчаники								
П-0	0,36	120	4,1	2,1	23	0,56	0,66	—
Д-9	1	143	2,0	2,0	31	0,56	0,62	—
П-4	1,3	146	3,2	1,5	—	—	0,69	—
П-03	1,5	143	2,0	1,7	19	0,61	0,67	—
П-01	1,7	126	2,5	1,7	—	0,62	0,66	—
П-02	2	159	2,0	1,6	12	0,65	0,70	—
П-5	4	202	1,6	1,6	—	—	0,58	—
П-026	5,3	74	3,1	1,5	—	0,67	0,69	—
П-021	5,7	46	—	—	—	—	0,69	—
ВО	6	65	1,2	1,3	4	0,71	0,75	—
НВО	6	71	0,7	0,8	10	0,68	0,71	0,85
Nugget	6	150	—	—	—	—	0,80	—
Д-8	7,4	66	1,7	1,3	11	0,60	0,69	—
П-04	18,6	39	2,8	2,4	4	0,71	0,75	—
Д-12	—	79	1,6	1,2	—	—	0,74	—
Граниты								
Биотитовый	0,6	90	3,1	2,6	2	0,74	0,77	0,87
Гранодиорит Climax	0,7	150	—	—	—	0,58	0,75	—
Westerly	0,8	110	—	—	80	—	—	—
Гранодиорит Hoggar	—	105	—	—	—	—	0,80	—
Плагиогранит биотитовый	1,6	145	2,5	1,6	—	—	—	—
Плагиогранит	2,2	167	1,9	1,5	—	—	—	—
Алевролиты								
Из скважины 328	1,2	91	2,3	1,9	30	0,43	0,48	—
П-4	1,3	137	—	—	—	—	0,69	—
Из скважины 322	1,67	79	1,7	1,5	—	0,41	0,48	—
» 330	2	76	—	—	—	0,38	0,45	—
П-3	2,1	122	1,7	1,4	—	—	0,70	—
П-2	2,2	168	2,6	1,6	—	—	0,64	—
П-6	2,6	53	5,9	4,4	—	—	0,64	—
П-1	3,6	104	3,6	2,1	—	—	0,70	—
Д-19	—	90	2,2	1,5	—	0,65	0,70	—
Мраморы								
Мрамор II	0,11	38	12,4	6,4	0	0,54	0,59	—
Мрамор I	0,92	60	5,6	2,6	0	0,64	0,69	0,84
Известняки								
Д-6	1	92	5,1	2,9	0	0,61	0,65	—
Эстонский сланец	—	40	3,0	2,2	0	0,50	0,55	—
КМА	17,4	33	7,2	4,5	—	—	0,60	—
Диабазы								
№ 5	0,58	84	4,9	3,1	18	0,63	0,65	—
Братская ГЭС	0,98	150	3,7	2,3	19	0,61	0,64	—
Диориты								
№ 11	0,15	208	2,1	1,5	14	0,52	0,56	—
Кварцевый	0,36	125	—	—	3	0,72	0,76	—

Таблица 2

Шифр	τ_f^0, МПа	τ_1^0	τ_3^0	A_1	$M^0 \cdot 10^{-3}$	Λ^0	Λ_*^0	a_0	$R_1 \cdot 10^3$
Песчаники									
П-0	120	0,74	—	20	—	1,44	—	0,63	61
Д-9	143	0,70	—	19	—	0,71	—	0,93	51
П-4	146	0,34	—	—	—	—	—	—	—
П-03	143	0,73	—	21	—	1,20	—	1,60	49
П-01	126	0,85	—	19	—	1,27	—	1,29	59
П-02	159	0,85	—	13	—	1,07	—	0,23	51
П-5	202	0,74	—	6,4	—	—	—	—	—
П-026	74	0,78	—	20	—	1,10	—	0,64	30
П-021	46	0,72	—	40	—	1,22	—	0,80	47
ВО	65	0,78	0,09	35	5,0	1,50	—	1,14	32
НВО	71	0,85	0,07	32	2,1	1,40	1,6	1,31	—
Nugget	150	—	—	—	—	1,85	—	2,30	40
Д-8	66	0,77	—	26	—	1,58	—	0,76	51
П-04	39	0,62	—	33	—	1,90	—	1,20	32
Д-12	79	0,71	—	—	—	0,94	—	0,54	—
Arcose	34	—	—	—	1,0	—	—	—	—
Граниты									
Биотитовый	87	0,80	0,07	39	0,9	1,5	1,6	1,4	
Гранодиорит Climax	150	0,20	—	—	—	—	—	—	—
Westerly	110	—	—	—	—	1,42	—	0,93	—
Плагиогранит биотитовый	145	0,85	0,02	—	1,4	—	—	—	—
Плагиогранит	167	0,86	0,02	—	2,4	—	—	—	—
Алевролиты									
Из скважины 328	91	0,75	—	30	—	1,17	—	0,77	—
» 322	79	0,76	—	—	—	1,0	—	0,70	—
» 330	76	0,82	—	—	—	1,08	—	0,35	—
Д-19	90	0,76	—	—	—	0,74	—	1,11	—
Мраморы									
Мрамор II	38	0,80	0,05	25	0,3	1,2	1,3	1,15	—
Мрамор I	60	0,56	—	—	—	0,87	—	0,50	—
Каррарский	38	—	0,13	—	0,3	—	—	—	—
Tenesse	16	—	0,16	—	18	—	—	—	—
Известняки									
Д-6	92	0,85	—	20	—	0,64	—	0,30	—
Эстонский сланец	40	0,72	—	—	—	0,28	—	2,15	—
КМА	33	0,45	—	—	—	—	—	—	—
d'Fuville	16	—	0,32	—	9,0	—	—	—	—
Диабазы									
№ 5	84	0,92	—	32	—	1,10	—	1,27	54
Братская ГЭС	150	0,88	0,01	39	4,5	0,92	—	1,00	59
Диориты									
№ 11	208	0,86	—	12	—	0,77	—	1,19	83
Кварцевый	125	0,64	—	24	—	0,81	—	0,44	32

Таблица 3

Коэффициенты	Песчаники								Алевролиты		
	Y_1	S_1	S_2	τ_1^0	A_1	Λ^0	a_0	R_1	S_2	Λ^0	a_0
M_i	0,02	0,61	0,66	0,80	20	1,03	0,79	0,05	0,46	1,31	1,43
$N_i \cdot 10^3$	—1,1	6,3	5,6	—7,4	1100	50	51	—1,4	65	—140	—510
K, %	—	58	86	—	69	86	85	70	46	84	93

[4]. По-видимому, это же наблюдается и на участке остаточной прочности. В первом приближении упругие модули на последнем участке можно найти путем линейной интерполяции по значениям остаточных модулей, определяемых [5] из опытов на одноосное сжатие, и значениям модулей при $p \geqslant p_2^{(m)}$ (последние совпадают с модулями неразрушенного материала [6]). На участке разупрочнения упругие модули уменьшаются в процессе деформирования и могут быть приближенно определены путем линейной интерполяции по значениям остаточных модулей и значениям модулей неразрушенного материала (на пределе максимальной прочности).

3. Для получения постоянных, входящих в уравнения поверхности текучести и в дилатансионное условие, обработаны результаты статических испытаний [2, 3, 7], проведенных в условиях постоянного бокового давления или в условиях простого нагружения: табл. 1 и 2 (m_0 — пористость, $Y_1 \approx Y_2$, $Y_3 \approx 0$, $K_1 = K/\tau_f^0$, $G_1 = G/\tau_f^0$, $R_1 = R_p/\tau_f^0$, R_p — прочность на отрыв, $R_c = 2\tau_f^0$). Испытания гранита Hoggar [7] проведены для весьма больших давлений ($p < 72$). Оказалось, что даже при таких значительных давлениях не наблюдалось перехода от кулоновых состояний к состоянию Треска. Для гранита Hoggar параметр S_2 вообще зависит от p: $S_2 = 0{,}8$ ($p \leqslant 19$); $S_2 = (0{,}8(71 - p) + 0{,}65(p-19))/52$ $(19 < p \leqslant 71)$.

Для исследованных геоматериалов коэффициент вариации прочностных свойств менялся от 50 до 75%, а коэффициент корреляции находился в пределах 97—99,9%. Для песчаников и алевролитов имеется достаточное количество данных. Поэтому для этих материалов можно получить корреляционные связи параметров модели с пористостью: $W_i = M_i + N_i m_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где значения коэффициентов M_i, N_i и соответствующие коэффициенты корреляции приведены в табл. 3 (при обработке песчаник Nugget исключался).

Таблица 4

Параметры	Геоматериалы							
	1	2	3	4	5	6	7	8
m_0, %	0,25	0,6	1,2	0,8	1,6	5	9	2,6
τ_f^0, МПа	167	45	128	117	98	85	53	99
$K_1 \cdot 10^{-2}$	2,1	9	2,5	4,3	2,9	2,1	5,1	4,0
$G_1 \cdot 10^{-2}$	1,5	4,5	1,9	2,7	1,8	1,6	3,2	2,5
$Y_1 \cdot 10^3$	25	14	40	18	—	14	—	22
S_1	0,62	0,59	0,66	0,62	0,47	0,64	0,56	0,59
S_2	0,66	0,64	0,76	0,65	0,61	0,69	0,60	0,66
S_3	—	0,84	0,87	—	—	0,85	—	0,85
τ_1^0	0,75	0,68	0,84	0,87	0,77	0,73	0,65	0,75
τ_3^0	—	0,11	0,04	0,005	—	0,085	0,32	0,11
A_1	18	20	39	35	20	24	20	25
$M^0 \cdot 10^{-3}$	—	0,3	1,6	4,5	—	2,7	9,0	3,6
Λ^0	0,8	1,0	1,5	1,0	1,0	1,3	0,5	1,0
Λ_*^0	—	1,2	1,6	—	—	1,6	—	1,5
a_0	0,8	0,8	1,2	1,1	0,7	0,9	1,2	1,0
$R_1 \cdot 10^3$	58	—	50	56	—	46	—	53

Примечание. 1 — диориты, 2 — мраморы, 3 — граниты, 4—диабазы, 5— алевролиты, 6 — песчаники, 7 — известняки, 8 — значения параметров, усредненные по всем изученным геоматериалам.

Таблица 5

Источник	Геоматериалы								
	1	2	3	4	5	6	7	7′	8
[2]	66	64	76	65	61	69	60	—	66
[9]	73	59	78	73	65	71	59	65	68
[10]	—	—	79	—	—	74	67	66	72

Примечание. Обозначения те же, что и в табл. 4 (7′ — аргиллиты).

В табл. 4 показаны усредненные по каждой группе геоматериалов параметры модели. Этими данными можно пользоваться для ориентировочных расчетов, если тип материала неизвестен.

Эксперименты, выполненные в [8], позволяют оценить влияние скорости деформирования ε_3 на параметры τ_j^0, τ_3^0, M^0, Λ^0, Λ_*^0. Оказалось, что модуль M^0 значительно снижается, а прочность несколько возрастает с ростом ε_3. Скорость дилатансии слабо зависит от ε_3.

Некоторые авторы [9, 10] предложили уравнения поверхностей максимальной прочности записывать через наибольшее и наименьшее главные напряжения. При этом влияние промежуточного главного напряжения не учитывается вовсе. Зависимости, рекомендованные в [9, 10], перестроены к инвариантному виду, и найденные значения показателя степени $S_2 \cdot 10^2$ ($Y_2 \approx 0$) даны в табл. 5, откуда видно, что эти результаты удовлетворительно согласуются друг с другом и с измерениями [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капустянский С. М., Николаевский В. Н.** Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника).— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4.
2. **Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.** Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979.
3. **Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. и др.** Прочность и деформация горных пород в допредельной и запредельной областях.— ФТПРПИ, 1981, № 6.
4. **Senseny P. E., Fossum A. F., Pfeile T. W.** Non-associative constitutive laws for low porosity rocks.— Int. J. Numer. Anal. Math., 1983, v. 7, p. 101.
5. **Wawersik W., Fairhurst Ch.** A study of brittle fracture in laboratory compression experiments.— Int. J. Rock Mech., 1970, v. 7, p. 561.
6. **Stephens D. R., Lilley E. M., Louis H.** Pressure-volume equation of state of consolidated and fractured rocks to 40 kb.— Int. J. Rock Mech., 1969, v. 7, p. 257.
7. **Николаевский В. Н., Лившиц Л. Д., Сизов И. А.** Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение.— Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела, т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978.
8. **Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Певзнер Е. Д.** Влияние скорости деформирования на запредельные характеристики горных пород.— ФТПРПИ, 1982, № 5.
9. **Hoek E.** Strength of jointed rock masses.— Geotechnique, 1983, v. 33, N 3.
10. **Brook N.** Estimating the triaxial strength of rocks.— Int. J. Rock. Mech., 1979, v. 16, p. 261.

Поступила 4/VI 1984 г.

УДК 539.3 : 534.1

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В. В. ЛАРЧЕНКО

(*Новосибирск*)

Рассматривается явление ветвления форм равновесия тонкой оболочки без хлопка. В технике часто ставится задача о выведении оболочечной конструкции из искомого устойчивого состояния, когда она имеет несколько положений равновесия. В инженерной практике такие требования характерны, например, при использовании оболочки в качестве предохранительной хлопающей мембраны, в системах пневмоавтоматики, содержащих оболочечный элемент, и т. д. Трудности анализа этого типа задач имеют прямое отношение к одной из центральных проблем нелинейной теории оболочек — существованию многих устойчивых форм равновесия при одном значении параметра нагружения.