7. **Дикий Л. А.** Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1976.
8. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана. М., Мир, 1969.
9. **Moffatt H. K.** The interaction of turbulence with strong wind shear.— В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М., Наука, 1967.
10. **Владимиров В. А.** Устойчивость течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
11. **Шноль Э. Э.** О неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости.— ПММ, 1974, т. 38, № 3.

УДК 532.526.013.4

О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВНЕШНЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В. Н. Жигулев, Н. В. Сидоренко, А. М. Тумин

(*Москва*)

В настоящее время в результате многочисленных экспериментальных и теоретических исследований достаточно четко сформулированы принципы расчета критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на основе линейной теории гидродинамической устойчивости. Возможность применения линейной теории для определения «точки перехода» обусловлена тем, что при достаточно малых амплитудах возмущений, присутствующих в потоке, переход начинается с развития так называемых волн Толмина — Шлихтинга, которые описываются линеаризованными уравнениями гидродинамики. При этом значительная часть области перехода приходится именно на волны Толмина — Шлихтинга, а область нелинейного развития возмущений сравнительно мала [1]. Поэтому с достаточно хорошей точностью эволюцию возмущений в пограничном слое можно описать на основе линейной теории и приближенно определить критическое число Рейнольдса перехода по сечению, в котором возмущение впервые достигает порогового значения безразмерной амплитуды $\varepsilon_* \sim 1\%$, начиная с которой наступает сильно нелинейная область развития [1]. Однако основной проблемой в разработке соответствующей методики расчета на сегодняшний день является проблема преобразования возмущений, имеющихся в условиях эксперимента, в волны Толмина — Шлихтинга. В работе [2] предполагаются следующие возможные механизмы возбуждения волн Толмина — Шлихтинга в пограничном слое: а) непрерывная генерация по всей протяженности пограничного слоя; б) генерация в окрестности передней кромки модели; в) генерация в развитом пограничном слое путем сосредоточенного воздействия.

Наиболее изученным в настоящее время является механизм генерации волн Толмина — Шлихтинга в окрестности передней кромки модели. Однако по мере их распространения вниз по потоку до точки потери устойчивости они могут сильно затухнуть, и тем самым их влияние на переход пограничного слоя будет несущественным. Для таких моделей на первый план выходит механизм генерации по всей протяженности пограничного слоя. В работе [3] был проведен анализ взаимодействия вихревой дорожки малой интенсивности с несжимаемым пограничным слоем на плоской пластине в предположении о параллельности основного течения. Результат показал, что рассмотренные возмущения слабо проникают в пограничный слой и генерация волн Толмина — Шлихтинга отсутствует. В данной работе проведен анализ задачи, поставленной в [3] с учетом слабой непараллельности течения в пограничном слое. Показано, что имеет место взаимодействие вихревых возмущений в набегающем потоке с волнами Толмина — Шлихтинга, и получены аналитические соотношения для определения интенсивности источников волн Толмина — Шлихтинга.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о развитии возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса. При этом граничные условия будут следующие: при $y = 0$ (на поверхности пластины) выполнены условия прилипания; при $x = x_0$ (в некотором сечении на расстоянии x_0 от передней кромки пластины) заданы возмущения u, v (x и y — компоненты скорости возмущения) как функции времени; при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ накладываем условие ограниченности решения. Как обычно, перейдем к анализу отдельной гармоники с действительной частотой ω; исходные уравнения примут вид

$$(1.1)\qquad \begin{gathered} -i\omega u + U\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \\ -i\omega v + U\frac{\partial v}{\partial x} + V\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{gathered}$$

где U, V — компоненты скорости основного течения (решение Блазиуса); ν — кинематический коэффициент вязкости; Δ — лапласиан; p — возмущение давления, отнесенное к плотности. Если теперь ввести вектор $\mathbf{A} = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)$

$$A_1 = u,\ A_2 = p,\ A_3 = v,\ A_4 = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x,$$

то исходную систему уравнений (1.1) можно записать в виде

$$(1.2)\qquad H_1\mathbf{A} = H_2\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{A} + H_3\mathbf{A},$$

где оператор H_3 связан с членами, содержащими V, $\partial U/\partial x$. В данной задаче удобно перейти к переменным пограничного слоя:

$$(1.3)\qquad \xi = \frac{x}{x_0},\quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}} = \frac{y}{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}}\frac{U_0}{\nu},\quad \mathrm{R} = \frac{U_0x_0}{\nu},$$

где U_0 — скорость набегающего потока; x_0 — координата выбранного нами исходного сечения. Учитывая, что функция тока основного течения имеет вид

$$\psi = \nu\xi^{1/2}\mathrm{R}^{1/2}f(\eta) + O(\mathrm{R}^{-1/2}),$$

где $f(\eta)$ является решением уравнения Блазиуса, можно получить из (1.2) следующую систему уравнений:

$$(1.4)\qquad L_1\mathbf{D} = \frac{\xi^{1/2}}{\mathrm{R}^{1/2}}L_2\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{D} + \frac{\xi^{1/2}}{\mathrm{R}^{1/2}}L_3\mathbf{D},$$

где вектор $\mathbf{D}$ определяется как

$$D_1 = \frac{A_1}{U_0},\quad D_2 = \frac{A_2}{U_0^2},\quad D_3 = \frac{A_3}{U_0},\quad D_4 = A_4\frac{\nu\xi^{1/2}\mathrm{R}^{1/2}}{U_0^2},$$

а операторы L_1, L_2, L_3 имеют вид

$$L_1 = \begin{Vmatrix} i\beta & 0 & -f'' & \frac{1}{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\eta} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial\eta} & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial\eta} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},\quad L_2 = \begin{Vmatrix} f' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$L_3 = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{\eta}{2\xi} f'' - \dfrac{1}{2\xi} f \dfrac{\partial}{\partial\eta} & -\dfrac{\eta}{2\xi}\dfrac{\partial}{\partial\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\eta}{2\xi} f'' + \dfrac{1}{2\xi}(\eta f' - f)\dfrac{\partial}{\partial\eta} \\ -\dfrac{\eta}{2\xi}\dfrac{\partial}{\partial\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\eta}{2\xi}\dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь $\beta = \dfrac{\omega\nu}{U_0^2} \mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}$; штрих означает дифференцирование по η. Так как нас будут интересовать только члены порядка $\mathrm{R}^{-1/2}$, то в выражении для L_3 мы опустили члены следующего порядка малости. Проделанная процедура аналогична преобразованиям, использовавшимся в [4].

2. Собственные векторы. Прежде чем перейти к построению решения системы (1.4), определим задачу на построение собственного вектора $\mathbf{A}_\alpha$

$$L_1\mathbf{A}_\alpha = i\alpha L_2\mathbf{A}_\alpha, \tag{2.1}$$
$$\eta = 0 \ \ \mathrm{A}_{\alpha 1} = \mathrm{A}_{\alpha 3} = 0, \ \ \eta \to \infty \ \ |A_{\alpha i}| < \infty, \ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

и исследуем возможные классы собственных векторов. Можно показать, что система (2.1) сводится к одному уравнению Орра — Зоммерфельда для компоненты $A_{\alpha 3}$, которую обозначим через $\Phi_0(\xi,\ \eta)$

$$(\alpha f' - \beta)\left(\Phi_0'' - \alpha^2\Phi_0\right) - \alpha\Phi_0 f''' = \frac{1}{i\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}}\left(\Phi_0^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\Phi_0'' + \alpha^4\Phi_0\right) \tag{2.2}$$

с граничными условиями

$$\eta = 0 \quad \Phi_0 = \Phi_0' = 0, \quad \eta \to \infty \quad |\Phi_0| < \infty, \tag{2.3}$$

где штрих означает дифференцирование по η и Φ_0 зависит от ξ как от параметра. Остальные компоненты вектора $\mathbf{A}_\alpha$ легко выражаются через Φ_0.

При $\eta \gg 1$ (вне пограничного слоя) уравнение (2.2) переходит в уравнение с постоянными коэффициентами и его общее решение можно записать как

$$\Phi_0 = C_1 e^{\alpha\eta} + C_2 e^{-\alpha\eta} + C_3 e^{\lambda\eta} + C_4 e^{-\lambda\eta},$$

где λ удовлетворяет уравнению

$$i(\alpha - \beta) = (1/\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2})(\lambda^2 - \alpha^2).$$

Пусть теперь φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — частные решения уравнения (2.2), имеющие при $\eta \to \infty$ асимптотику $e^{\alpha\eta}$, $e^{-\alpha\eta}$, $e^{\lambda\eta}$, $e^{-\lambda\eta}$ соответственно. Эти решения линейно независимы, и общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\Phi_0 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + C_4\varphi_4.$$

Посмотрим, какие требования на величину α и на частные решения уравнения (2.2) накладывают граничные условия (2.3). Всего возможны пять различных случаев, соответствующих пяти возможным классам решений уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3).

I) α — число мнимое ($\alpha = i\gamma$, $\gamma > 0$). В силу граничных условий при $\eta \to \infty$ необходимо оставить либо φ_3, либо φ_4, соответствующую экспоненциальному затуханию при $\eta \to \infty$. Для определенности возьмем ветвь квадратного корня, на которой $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда из (2.3) вытекает, что $C_3 = 0$, и общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\Phi_0^{\mathrm{I}} = C_1^{\mathrm{I}}\varphi_1 + C_2^{\mathrm{I}}\varphi_2 + C_4^{\mathrm{I}}\varphi_4.$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям при $\eta = 0$, т. е.

$$C_1^{\mathrm{I}}\varphi_1(\eta=0) + C_2^{\mathrm{I}}\varphi_2(\eta=0) + C_4^{\mathrm{I}}\varphi_4(\eta=0) = 0,$$

$$C_1^{\mathrm{I}}\varphi_1'(\eta=0) + C_2^{\mathrm{I}}\varphi_2'(\eta=0) + C_4^{\mathrm{I}}\varphi_4'(\eta=0) = 0.$$

Из этой системы коэффициенты C_1^{I}, C_2^{I}, C_4^{I} определяются с точностью до постоянного множителя, т. е. Φ_0 определяется однозначно с точностью до нормировки. Рассмотренный класс решений (2.2) можно назвать волнами давления по классификации, аналогичной приведенной в [5], так как для них при $\eta \to \infty$ в случае плоскопараллельного приближения

$$\Phi_0^{\mathrm{I}} \sim \left(C_1^{\mathrm{I}} e^{i\gamma\eta} + C_2^{\mathrm{I}} e^{-i\gamma\eta}\right),$$

и если вычислить безразмерную завихренность D_4, то получим $D_4 = 0$, а безразмерное возмущение давления D_2 получается не равным нулю.

II) α — число мнимое ($\alpha = i\gamma$, $\gamma < 0$). Если волны I класса экспоненциально убывают от границы $x = x_0$ и соответствуют влиянию этой границы, то волны II класса соответствуют экспоненциальному росту при $x \to \infty$ и влиянию правой границы в задачах, имеющих эту границу, расположенную при конечных $x = L$. Волны этого класса распространяются влево.

III, IV) $\lambda = i\gamma$, γ — действительное, $0 < \gamma < \infty$. В этом случае α определяется как

$$i\alpha_{\mathrm{III,IV}} = \frac{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\left(\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}} - i\beta\right)}{\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2}}}\right].$$

Волнам III класса соответствует знак — в выражении для α. При $\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2} \to \infty$ $i\alpha_{\mathrm{III}} \approx -\gamma^2/\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2} + i\beta$. Волны этого класса в случае плоскопараллельного приближения соответствуют решению уравнения (1.4) в виде волны, распространяющейся вниз по потоку и слабо затухающей с расстоянием от начального сечения $x = x_0$.

Знак + в выражении для α соответствует IV классу и при $\mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2} \to \infty$ $i\alpha_{\mathrm{IV}} \approx \mathrm{R}^{1/2}\xi^{1/2} - i\beta$. В плоскопараллельном приближении IV класс соответствует решению (1.4) в виде волны, распространяющейся вверх по потоку, и соответствует влиянию границы при $x = L$ (если она имеет место в поставленной задаче).

Волны III, IV классов можно отнести к волнам, аналогичным волнам завихренности из [5], так как для них при $\eta \to \infty$ в плоскопараллельном приближении $D_2 = 0$, $D_4 \neq 0$. Волны III класса в литературе называются также сносовыми волнами.

V) α — комплексное, λ — комплексное, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$.

Для примера положим $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ (другие возможные знаки $\mathrm{Re}\,\alpha$ и $\mathrm{Re}\,\lambda$ рассматриваются аналогично).

В этом случае решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\Phi_0^{\mathrm{V}} = C_2^{\mathrm{V}}\varphi_2 + C_4^{\mathrm{V}}\varphi_4,$$

из граничных условий при $\eta = 0$ получим

$$C_2^{\mathrm{V}}\varphi_2(\eta=0) + C_4^{\mathrm{V}}\varphi_4(\eta=0) = 0,$$
$$C_2^{\mathrm{V}}\varphi_2'(\eta=0) + C_4^{\mathrm{V}}\varphi_4'(\eta=0) = 0. \tag{2.4}$$

Условием разрешимости системы (2.4) будет

$$\varphi_2(\eta = 0)\cdot\varphi_4'(\eta = 0) - \varphi_2'(\eta = 0)\cdot\varphi_4(\eta = 0) = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) есть трансцендентное уравнение для определения α и может в зависимости от величины $R\xi$ либо не иметь решений вообще, либо иметь их конечное число, либо иметь счетное множество решений. Каждому такому корню α уравнения (2.5) соответствует решение уравнения Орра — Зоммерфельда (2.2), определенное с точностью до нормировки. Вопрос о спектре решений уравнения (2.5) в случае течения в пограничном слое в настоящее время еще остается открытым и мы его здесь рассматривать не будем. Класс V соответствует волнам Толмина—Шлихтинга, которые могут либо расти, либо затухать вниз по потоку (в зависимости от знака $\mathrm{Im}\alpha$). При этом решениям уравнения (2.5) с $\mathrm{Re}\alpha < 0$ соответствовали бы волны, распространяющиеся вверх по потоку. Однако волны данного класса с $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ для течения в пограничном слое пока не обнаружены.

Определим теперь произведение двух собственных векторов $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}_\gamma$ из рассмотренных выше классов как

$$(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{A}_\gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \sum_{i=1}^4 A_{\alpha i}A_{\gamma i}\exp(-\varepsilon\eta)\,d\eta,$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда можно поставить в соответствие задаче (2.1) сопряженную задачу

$$L_1^*\mathbf{B}_\gamma = i\gamma L_2^*\mathbf{B}_\gamma,$$

$$\eta = 0\ B_{\gamma 2} = B_{\gamma 4},\ \eta\to\infty\ |B_{\gamma i}| < \infty,\ i = 1, 2, 3, 4,$$

где L_1^*, L_2^* —операторы, сопряженные с L_1 и L_2 и определяющиеся из условия $(L\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, L^*\mathbf{B})$. Легко показать, что если $\alpha \neq \gamma$, то $(L_2\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\gamma) = 0$.

3. Построение решения системы (1.4). При построении приближенных решений системы (1.4) ограничимся следующей задачей: пусть вниз по потоку распространяется волна завихренности с частотой ω и с заданной амплитудой при $x = x_0$. Вследствие неоднородности потока в x-направлении (оператор L_3 в уравнении (1.4)) в потоке возникнут волны всех описанных выше классов I—V. Они будут взаимодействовать с основной волной и между собой. Такое взаимодействие в данной работе принимается в качестве модели взаимодействия турбулентности набегающего потока, у которой всегда можно выделить волну завихренности, с волнами в пограничном слое. Для прикладных целей наибольший интерес из этих мод представляет образовавшаяся волна Толмина — Шлихтинга, которая, единственная из волн пяти классов, может расти в направлении своего распространения и в принципе может достигнуть величины амплитуды исходной волны завихренности и даже превысить ее. Вследствие малости взаимодействия мод между собой можно, следовательно, в первом приближении оставить взаимодействие только исходной волны завихренности и волны Толмина — Шлихтинга и пренебречь обратным влиянием остальных волн на эти две моды.

Построение собственного вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Ts}}$, соответствующего волне Толмина — Шлихтинга, сводится к решению уравнения Орра — Зоммерфельда (2.2) для $\mathbf{A}_{\mathrm{Ts}3}$ с граничными условиями

$$\eta = 0\quad \Phi_{0\mathrm{Ts}} = \Phi_{0\mathrm{Ts}}' = 0,\ \eta\to\infty\quad \Phi_{0\mathrm{Ts}},\quad \Phi_{0\mathrm{Ts}}'\to 0.$$

При этом собственное значение α определяется из условия разрешимости краевой задачи (уравнение (2.5)) и зависит от ξ как от параметра. Построение собственного вектора $\mathbf{A}_v$, соответствующего волне завихренности (класс III), сводится к построению трех линейно-независимых решений уравнения (2.2) с асимптотиками $e^{\pm i\gamma\eta}$, $e^{-\beta\eta}$ (так как $\alpha_{\text{III}} \approx \beta$ при $R^{1/2}\xi^{1/2} \to \infty$) и к определению коэффициентов при каждом независимом решении из условия, что общее решение уравнения (2.2) удовлетворяет граничному условию при $\eta = 0$. Если будем искать решение (1.4) в виде

$$\mathbf{D} = C_{\text{TS}}(\xi)\mathbf{A}_{\text{TS}}(\alpha, \eta, \xi) + C_v(\xi)\mathbf{A}_v(\gamma, \eta, \xi),$$

то получим для определения C_{TS} и C_v следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial C_{\text{TS}}}{\partial \xi} - \frac{i\alpha R^{1/2}}{\xi^{1/2}} C_{\text{TS}} + C_{\text{TS}} \frac{\left[\left(L_2 \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{TS}}}{\partial \xi}, \mathbf{B}_{\text{TS}}\right) + (L_3\mathbf{A}_{\text{TS}}, \mathbf{B}_{\text{TS}})\right]}{(\mathbf{A}_{\text{TS}}, \mathbf{B}_{\text{TS}})} + \frac{C_v \left[\left(L_2 \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial \xi}, \mathbf{B}_{\text{TS}}\right) + (L_3\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_{\text{TS}})\right]}{(\mathbf{A}_{\text{TS}}, \mathbf{B}_{\text{TS}})} = 0; \tag{3.1а}$$

$$\frac{\partial C_v}{\partial \xi} - i\frac{\beta R^{1/2}}{\xi^{1/2}} C_v + \frac{C_v \left[\left(L_2 \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial \xi}, \mathbf{B}_v\right) + (L_3\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v)\right]}{(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v)} + C_v \frac{\left[\left(L_2 \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{TS}}}{\partial \xi}, \mathbf{B}_v\right) + (L_3\mathbf{A}_{\text{TS}}, \mathbf{B}_v)\right]}{(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v)} = 0. \tag{3.1б}$$

Построение вектора $\mathbf{B}_{\text{TS}}$ сводится к решению сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда для компоненты $B_{\text{TS}2}$, которую обозначим через χ:

$$(\alpha f' - \beta)(\chi'' - \alpha^2\chi) + 2\alpha\chi' f'' = \frac{1}{iR^{1/2}\xi^{1/2}}(\chi^{\text{IV}} - 2\alpha^2\chi'' + \alpha^4\chi) \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$\eta = 0\ \chi = \chi' = 0,\ \eta \to \infty\ \chi,\ \chi' \to 0.$$

Построение вектора $\mathbf{B}_v$ также сводится к решению уравнения (3.2) при $\alpha = \alpha_{\text{III}}$. Для этого необходимо построить частные решения уравнения (3.2) с теми же асимптотиками, что и при построении вектора $\mathbf{A}_v$, и затем из граничных условий при $\eta = 0$ определить коэффициенты, с которыми эти частные решения входят в общее решение уравнения (3.2).

Решение уравнения (3.1а) при $C_v \equiv 0$ сводится к учету влияния слабой непараллельности течения в пограничном слое на его устойчивость и было рассмотрено в работе [4]. Члены, содержащие C_v в (3.1а), представляют собой генерацию волн Толмина — Шлихтинга турбулентностью набегающего потока, непрерывно распределенную по пограничному слою. При не слишком больших x можно пренебречь взаимодействием $C_{\text{TS}} \to C_v$ и считать, что

$$C_v(\xi) = \varepsilon_0(\omega)\, e^{i\int\limits_1^\xi \frac{R^{1/2}\beta}{\xi^{1/2}} d\xi} = \varepsilon_0(\omega)\, e^{i\frac{\omega(x - x_0)}{U_0}},$$

где $\varepsilon_0(\omega)$ соответствует амплитуде возмущения набегающего потока с частотой ω. В этом приближении можно вычислить интенсивность источников волн Толмина — Шлихтинга как

$$q_i(\omega, \xi) = -\frac{C_v(\xi)\left[\left(L_2 \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial \xi}, \mathbf{B}_{\text{TS}}\right) + (L_3\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_{\text{TS}})\right]}{(\mathbf{A}_{\text{TS}}, \mathbf{B}_{\text{TS}})}.$$

Поскольку при малых x вне области неустойчивости волны Толмина — Шлихтинга сильно затухают, их влиянием на переход пограничного слоя можно пренебречь, т. е. выбрать такое сечение x_0, в котором можно воспользоваться приближением $C_{\text{Ts}}(1) = 0$. Тогда, рассчитывая $C_{\text{Ts}}(\xi)$ из (3.1а) при известном фоне возмущений в набегающем потоке и используя тот факт, что нелинейный режим развития возмущения наступает при амплитуде пульсаций скорости порядка 1% от скорости набегающего потока [1], можно приближенно определить, на какой частоте и в каком сечении амплитуда волны Толмина — Шлихтинга достигнет критического значения ε_*, и тем самым рассчитать зависимость числа Рейнольдса перехода от фактора начальной турбулентности.

В заключение отметим, что предложенный выше механизм генерации волн Толмина — Шлихтинга турбулентностью набегающего потока имеет простой физический смысл. Поскольку линии тока основного течения проникают в пограничный слой через его внешнюю границу, происходит конвекция вихревых возмущений, распространяющихся по линиям тока, внутрь пограничного слоя, где они и преобразуются в волны Толмина — Шлихтинга. При этом механизм конвекции будет наиболее эффективным при малых числах Рейнольдса (в окрестности носика), однако связанная с ним генерация волн Толмина — Шлихтинга не будет сказываться на переходе к турбулентности из-за сильного затухания возмущеиий при малых числах Рейнольдса. С другой стороны, наибольшие коэффициенты усиления волн Толмина — Шлихтинга, наблюдающиеся для низкочастотной области спектра, имеют место лишь при больших числах Рейнольдса, где механизм конвекции внешних возмущений внутрь пограничного слоя оказывается малоэффективным. Следовательно, существует определенный интервал чисел Рейнольдса, в котором преобразование турбулентности набегающего потока в волны Толмина — Шлихтинга является определяющим на переход к турбулентности.

Следует отметить, что совершенно аналогично можно распространить вышеизложенную методику на сверхзвуковые течения, в которых для одной частоты могут существовать несколько незатухающих мод, так что необходимо будет учитывать также и взаимодействие этих мод между собой.

В данной работе взаимодействие между турбулентностью набегающего потока и волнами Толмина — Шлихтинга обусловлено непараллельностью течения. В работах [6, 7] была учтена слабая сжимаемость течения и проанализирована возможность генерации волн Толмина — Шлихтинга акустическими возмущениями на шероховатости обтекаемой поверхности.

Поступила 16 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жигулев В. Н.** Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений.—В кн.: Механика турбулентных потоков. М., Наука, 1980.
2. **Левченко В. Я., Козлов В. В.** Возникновение и развитие возмущений в пограничном слое.— В кн.: Модели в механике сплошной среды. Новосибирск, изд. ИТПМ СО АН СССР, 1977.
3. **Rogler H., Reshotko E.** Disturbances in a boundary layer introduced by a low intensity array of vortices.— SIAM J. Appl. Mech., 1975, vol. 28, N 2.
4. **Gaster M.** On the effect of boundary layer growth on flow stability.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 66, N 2.
5. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М., Мир, 1971.
6. **Айзин Л. Б., Максимов В. П.** Об устойчивости течения слабо сжимаемого газа в трубе с модельной шероховатостью.— ПММ, 1978, т. 42, № 4.
7. **Айзин Л. Б., Поляков Н. Ф.** Генерация волны Толмина — Шлихтинга звуком на отдельной поверхности, обтекаемой потоком. Препринт № 17. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1979.