Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3

Сухинина

ПЛАВНЫЕ БОРЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

УДК 532.59

Б. И. Тулеоув

Институт прикладной математики МНАН Республики Казахстан, 470055 Караганда

В работе исследуются движения типа плавного бора двухслойной жидкости со свободной границей. Так называется движение, в котором однородное состояние перед волной непрерывным образом переходит в однородное состояние за волной. Следуя [1], будем называть предельные состояния на бесконечности сопряженными потоками. Нелинейные волны в двухслойной жидкости интенсивно изучались в последние десятилетия. Наиболее полно исследована модель двухслойной жидкости под крышкой. В этом случае имеется детальное описание параметров течений типа бора на основе длинноволнового приближения [2, гл. 1; 3]. Существование таких волн подтверждено экспериментально [4] и строго доказано для точных уравнений Эйлера [5, 6]. Уединенные волны в двухслойной жидкости со свободной границей без сдвига скорости между слоями изучались в [7], а в [8] для этого случая были получены и решения типа бора в рамках модифицированного приближения Кортевега — де Фриза.

На основе законов сохранения массы, энергии и импульса в данной работе проанализированы соотношения между параметрами сопряженных кусочно-постоянных потоков со свободной границей. Показано, что имеет место явление резонанса между бором и линейной волной, отсутствующее в двухслойной жидкости под крышкой [6]: вместе с нелинейным бором возникает периодическая волна много меньшей амплитуды с той же фазовой скоростью, что и у бора. Для допустимых чисел Фруда построено приближенное решение в длинноволновом пределе, описывающее профиль бора.

Постановка задачи. Рассматриваются установившиеся потенциальные движения двухслойной идеальной несжимаемой тяжелой жидкости со свободной границей над ровным дном. Будем считать, что более тяжелая жидкость находится снизу; обозначим индексом 1 величины, характеризующие течение в нижнем слое, а 2 — в верхнем. Предположим, что при $x \to \pm\infty$ течение имеет вид кусочно-постоянного потока со скоростями $U_i^\pm$ и глубинами $h_i^\pm$ в слоях в подходящем среднем смысле, который будет уточнен позже. Основными безразмерными параметрами являются числа Фруда

$$\mathrm{Fr}_i^\pm = U_i^\pm \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_1 - \rho_2}\,\frac{1}{g h_i^\pm}} \qquad (i = 1,\ 2)$$

и отношения глубин невозмущенных слоев $r^\pm = h_2^\pm / h_1^\pm$ (ρ_i — плотность жидкости в соответствующем слое, причем $\rho_1 > \rho_2$). Удобно также ввести амплитудные параметры $a_i = (h_i^+ - h_i^-)/h_i^-$ ($i = 1,\ 2$), которые выражают относительный перепад уровней в каждом слое. В дальнейшем для определенности будем оперировать параметрами состояния, достигаемого при $x \to -\infty$, и индекс минус в обозначениях его параметров опустим. Параметры состояния при $x \to +\infty$ определяются из закона сохранения расходов в слоях. Сформулируем задачу в фиксированной области изменения независимых переменных, в качестве которых выберем переменные Мизеса (x, ψ), где ψ — функция тока. Нормируем ψ так, чтобы нижнему слою в плоскости (x, ψ) соответствовала полоса $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, а верхнему $0 \leqslant \psi \leqslant 1 + r$. Искомой является функция, выражающая форму линий тока $y(x, \psi) = \psi + w(x, \psi)$. Функция w должна удовлетворять следующей системе уравнений и граничных условий:

$$w_{xx} + w_{\psi\psi} = \operatorname{div} \mathbf{f}(\nabla w) \quad \text{при} \quad 0 < \psi < 1 \quad \text{и} \quad 1 < \psi < 1 + r; \tag{1}$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \psi = 0; \tag{2}$$

$$(w)\Big|_{\psi=1-0} = (w)\Big|_{\psi=1+0}; \tag{3}$$

$$\mathrm{Fr}_1^2(w_\psi - f_2)\Big|_{\psi=1-0} - w(x,1) = r\mathrm{Fr}_2^2(w_\psi - f_2)\Big|_{\psi=1+0}; \tag{4}$$

$$\mu r\, \mathrm{Fr}_2^2(w_\psi - f_2) - \lambda w = 0 \quad \text{при} \quad \psi = 1 + r, \tag{5}$$

а также условиям на бесконечности:

$$w \to 0, \qquad \nabla w \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty; \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} w(x,1) \to a_1, & w(x, 1+r) \to a_1 + ra_2 \\ w_x \to 0, & w_\psi \to a_i \quad \text{в} \quad i\text{-м} \quad \text{слое} \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{7}$$

Здесь $\lambda = \rho_2/\rho_1$; $\mu = 1 - \lambda$; вектор $\mathbf{f}$ имеет компоненты

$$f_1 = \frac{w_x w_\psi}{1 + w_\psi}, \qquad f_2 = \frac{1}{2}\frac{w_x^2 + 3w_\psi^2 + 2w_\psi^3}{(1 + w_\psi)^2}.$$

Пределы в (6) и (7) будем понимать следующим образом. Предполагается, что при $x \to \pm\infty$ в нижнем слое решение представимо в виде $w(x,\psi) = a_1^\pm \psi + bw_p^\pm(x,\psi) + w_e^\pm(x,\psi)$, где $a_1^+ = a_1$; $a_1^- = 0$; $w_p^\pm$ — периодическая по x функция с нулевым средним за период; b — малый амплитудный параметр периодической составляющей; функция $w_e^\pm$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Аналогичное представление подразумевается и в верхнем слое. Как будет видно в дальнейшем, необходимость учета периодической компоненты решения вытекает из структуры спектра линеаризованной задачи.

Анализ законов сохранения. Для вывода соотношений между параметрами состояний на бесконечности воспользуемся интегральным законом сохранения потока горизонтального импульса [2, гл. 1], который в нашем случае имеет вид

$$\mathrm{Fr}_1^2 \int\limits_0^1 \frac{w_x^2 - w_\psi^2}{1 + w_\psi}\, d\psi + r\mathrm{Fr}_2^2 \int\limits_1^{1+r} \frac{w_x^2 - w_\psi^2}{1 + w_\psi}\, d\psi = -w(x,1)^2 - \frac{\lambda}{\mu} w(x, 1+r)^2. \tag{8}$$

В этом интеграле, а также в граничных условиях (4) и (5), учитывающих законы сохранения массы и потоков энергии, выполняется предельный переход при $x \to +\infty$ с учетом асимптотики (7). Тогда в нулевом приближении по параметру b для чисел Фруда получаются явные выражения через амплитуды a_i :

$$\mathrm{Fr}_1^2 = \frac{2}{\mu}\frac{(1 + a_1)^2(a_1 + \lambda r a_2)}{a_1(a_1 + 2)}, \quad \mathrm{Fr}_2^2 = \frac{2}{r}\frac{\lambda}{\mu}\frac{(1 + a_2)^2(a_1 + r a_2)}{a_2(a_2 + 2)}, \tag{9}$$

а амплитуды, в свою очередь, связаны соотношением

$$F(a_1, a_2) \equiv a_1^2(a_1 + \lambda r a_2)(a_2 + 2) + \lambda r a_2^2(a_1 + r a_2)(a_1 + 2) = 0. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) определяют в плоскости чисел Фруда (Fr_1, Fr_2) геометрическое место точек, изображающих допустимые состояния жидкости при $x \to -\infty$. При этом поток при

$x \to +\infty$ имеет следующие числа Фруда:

$$|\mathrm{Fr}_1^+| = \frac{1}{1+a_1}|\mathrm{Fr}_1|, \qquad |\mathrm{Fr}_2^+| = \frac{1}{1+a_2}|\mathrm{Fr}_2|.$$

Возьмем в качестве основного малого амплитудного параметра величину a_1. Заметим, что $a_1 a_2 < 0$. Несложно установить, что $1/r < |a_2/a_1| < 1/\lambda r$, в частности, $-1 < a_1 < \lambda r$, $-1 < a_2 < 1/r$.

Уравнение (10) задает амплитуду a_2 как неявную функцию от a_1. При малых a_1 справедливо разложение

$$a_2(a_1) = -\xi_0 a_1 + \xi_1 a_1^2 + o(a_1^2), \tag{11}$$

где $-\xi_0(1/r < \xi_0 < 1/\lambda r)$ — единственный вещественный отрицательный корень кубического уравнения

$$\xi^3 + \frac{1}{r}\xi^2 + \frac{1}{r}\xi + \frac{1}{\lambda r^2} = 0,$$

а коэффициент ξ_1 имеет вид

$$\xi_1 = \frac{1}{2\lambda r}\frac{(1-\lambda r\xi_0)(1+\xi_0)}{1-2\xi_0+3r\xi_0^2}.$$

Формулы (9) с учетом (11) дают выражение

$$\mathrm{Fr}_2^2 = \beta_0 - \frac{1}{r^2\xi_0^2}(\mathrm{Fr}_1^2 - \alpha_0) + o(\mathrm{Fr}_1^2 - \alpha_0), \tag{12}$$

справедливое в окрестности точек $\mathrm{Fr}_1^2 = \alpha_0$, $a_1 = 0$, где $\alpha_0 = (1/\mu)(1-\lambda r\xi_0)$, $\beta_0 = (\lambda/\mu)(1 - 1/r\xi_0)$ — главные члены разложения по степеням a_1 квадратов чисел Фруда Fr_1^2 и Fr_2^2 соответственно.

Линейные волны. Линеаризация исходной системы на кусочно-постоянном решении с параметрами Fr_i и r дает уравнения (1)–(5) с $\mathbf{f} = 0$. Линеаризованные уравнения имеют решение в виде периодических волн $w_p(x,\psi) = W(\psi)e^{ikx}$, если только волновое число k и параметры основного потока связаны дисперсионным соотношением

$$\Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\Big)\Big(\mathrm{Fr}_2^2 - \frac{\lambda}{\mu}\frac{\operatorname{th} kr}{kr}\Big) + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\frac{\operatorname{th} k}{k}\frac{\operatorname{th} kr}{kr}\Big(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\mathrm{Fr}_2^4 k^2 r^2 - 1\Big) = 0. \tag{13}$$

При изменении $|k|$ от 0 до $+\infty$ множество точек $(\mathrm{Fr}_1, \mathrm{Fr}_2)$, координаты которых удовлетворяют (13), образует спектр линейных волн бесконечно малой амплитуды. Для выяснения структуры спектра рассмотрим дисперсионное соотношение как биквадратное уравнение относительно Fr_2. Его можно факторизовать в виде $(\mathrm{Fr}_2^2 - \mathrm{Fr}_{2/1}^2)(\mathrm{Fr}_2^2 - \mathrm{Fr}_{2/2}^2) = 0$, с корнями

$$\mathrm{Fr}_{2/1}^2 = \Big(-\Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\Big) + \sqrt{D}\Big)\Big/(2r\operatorname{th} k\operatorname{th} kr),$$

$$\mathrm{Fr}_{2/2}^2 = \Big(-2\frac{\lambda}{\mu}\frac{\operatorname{th} kr}{kr}\Big)\Big/\Big(-\Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\Big) + \sqrt{D}\Big),$$

определяющими семейства кривых, зависящих от параметра k, и с дискриминантом

$$D = \Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\Big)^2 + 4\frac{\lambda}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\operatorname{th}^2 kr\Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th} k}{k}\Big),$$

который строго положителен для всех конечных значений k. Вид представителей этих семейств на плоскости чисел Фруда $(\mathrm{Fr}_1, \mathrm{Fr}_2)$ при фиксированных k и r приведен на рис. 1:

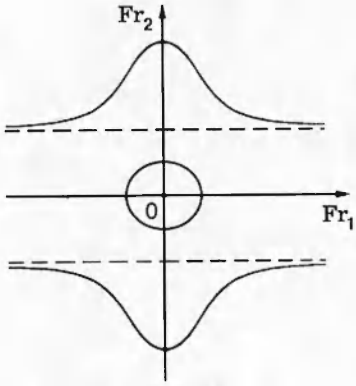

Рис. 1

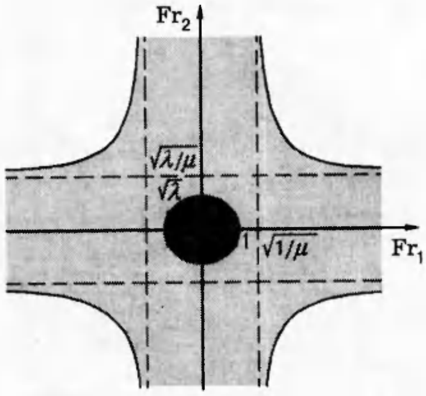

Рис. 2

кривая первого семейства есть пара δ-образных кривых, второго — овал. Так как $D \sim \mathrm{Fr}_1^2$ при $k \to \infty$, то кривые первого семейства при этом вырождаются в прямую $\mathrm{Fr}_{2/1} = 0$, а второго — в точку $(0, 0)$. Переход к пределу при $k \to 0$ в уравнении (13) задает в плоскости $(\mathrm{Fr}_1, \mathrm{Fr}_2)$ кривую четвертого порядка

$$\Big(\mathrm{Fr}_1^2 - \frac{1}{\mu}\Big)\Big(\mathrm{Fr}_2^2 - \frac{\lambda}{\mu}\Big) - \frac{\lambda^2}{\mu^2} = 0, \tag{14}$$

состоящую из вписанного в прямоугольник $[-1, 1] \times [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$ овала и четырех ветвей типа гипербол с вертикальными асимптотами $\mathrm{Fr}_1 = \pm\sqrt{1/\mu}$ и горизонтальными асимптотами $\mathrm{Fr}_2 = \pm\sqrt{\lambda/\mu}$ (рис. 2). Отметим, что в [2] кривая (14) играет важную роль при анализе характеристик квазилинейной системы уравнений двухслойной мелкой воды. Вся односвязная область, заключенная между гиперболическими ветвями (куда попадает и овал, содержащий кривые второго семейства — концентрические овалы), непрерывно заполняется двоякосимметрическими δ-образными кривыми первого семейства.

Таким образом, для любых значений Fr_1, Fr_2 из указанной области всегда существует волновая мода (точнее, две моды волн, распространяющихся в противоположных направлениях; для краткости будем их объединять), определяемая первым семейством; еще одна мода существует для Fr_1, Fr_2, попадающих внутрь овала (необходимое условие: $\mathrm{Fr}_1^2 < 1$, $\mathrm{Fr}_2^2 < \lambda$). Первая из этих мод характеризует быстрые волны с большей амплитудой на свободной поверхности, вторая описывает медленные волны с доминирующей амплитудой на границе раздела. Как и в случае двухслойной жидкости под крышкой [6], течение типа бора ответвляется от кусочно-постоянного равномерного потока в граничной точке части спектра, соответствующей моде внутренних волн.

Действительно, несложно проверить, что точки $\mathrm{Fr}_1^2 = \alpha_0$, $\mathrm{Fr}_2^2 = \beta_0$ принадлежат овалу, а из разложения (12) следует, что кривая возможных состояний для течений типа бора имеет с овалом касание первого порядка (можно показать, что касание внешнее). Однако в отличие от вышеупомянутого случая течений под крышкой ветвление происходит внутри спектра линейных волн. Другими словами, бор должен появляться в паре с прогрессивной периодической волной, период которой задается поверхностной модой согласно дисперсионному соотношению (13). Эта ситуация аналогична суперпозиции уединенной волны и быстро осциллирующей капиллярной волны на поверхности тонкого слоя жидкости при числах Бонда $\mathrm{Bo} < 1/3$ [9].

Приближенное решение. Рассмотрим значения параметров Fr_1^2 и Fr_2^2, удовлетворяющие системе (9), (10). При малых $a_1 \neq 0$ для таких чисел Фруда дисперсионное соотношение имеет относительно k только один вещественный корень, определяемый кривой первого семейства $\mathrm{Fr}_{2/1}$. Другой корень (комплексный) определяется кривой второго семейства и является чисто мнимым: $k = i\varepsilon$. Разложение всех величин в дисперсионном соотношении в ряды по степеням параметра a_1 показывает, что ε и a_1 имеют одинаковый порядок малости: $\varepsilon = \varepsilon_1 a_1 + o(a_1)$ (не приводим явное выражение для $\varepsilon_1 \neq 0$, так как конкретный его вид не играет здесь никакой роли). Малость ε при малых a_1 означает, что для соответствующих чисел Фруда течение носит длинноволновый характер. Поэтому естественно сделать преобразование в духе теории мелкой воды: $x' = \varepsilon x$ (в дальнейшем штрих опускаем). Это эквивалентно выбору в качестве характерной длины по горизонтали величины h_1/ε. Приближенное решение ищем в виде

$$y = \psi + \sum_{n=1}^{\infty} a_1^r w_n(x, \psi).$$

Тогда система (1)–(5) с учетом разложений чисел Фруда дает последовательность краевых задач для определения функций w_n; при $n = 1$ имеем

$$w_{1\psi\psi} = 0 \text{ при } 0 < \psi < 1 \text{ и } 1 < \psi < 1 + r, \qquad w_1 = 0 \text{ при } \psi = 0,$$

$$(w_1)\Big|_{\psi=1-0} = (w_1)\Big|_{\psi=1+0}, \quad \alpha_0(w_{1\psi})\Big|_{\psi=1-0} - r\beta_0(w_{1\psi})\Big|_{\psi=1+0} - w_1(x,1) = 0,$$

$\mu r\beta_0 w_{1\psi} - \lambda w_1 = 0$ при $\psi = 1 + r$. Для этого приближения условия на бесконечностях следующие:

$$w_1 \to 0, \quad \nabla w_1 \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

$$w_1 = \begin{cases} \psi, & 0 \leqslant \psi \leqslant 1, \\ 1 - \xi_0(\psi - 1), & 1 \leqslant \psi \leqslant 1 + r \end{cases} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Тогда

$$w_1(x, \psi) = A(x) \begin{cases} \psi, & 0 \leqslant \psi \leqslant 1, \\ 1 + (1 - \psi)\xi_0, & 1 \leqslant \psi \leqslant 1 + r. \end{cases}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $A(x)$ получается как условие совместности уравнений для третьего приближения: $A'' = 2A^3 - 3A^2 + A$ (штрих означает дифференцирование по x). Решение типа бора с точностью до переноса по x запишем в виде

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\right),$$

где постоянная α, принимающая значения ± 1, имеет смысл параметра, указывающего сторону обращения волны.

В заключение отметим, что четыре точки на овале с координатами $\mathrm{Fr}_1 = \pm\sqrt{\alpha_0}$, $\mathrm{Fr}_2 = \pm\sqrt{\beta_0}$ разбивают границу спектра линейных волн внутренней моды на четыре дуги. Каждая из этих дуг состоит из точек бифуркации, в которых рождаются ветви уединенных внутренних волн в паре с линейной волной поверхностной моды.

Автор выражает благодарность Н. И. Макаренко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. B.** A unified theory of conjugate flows // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1971. V. 269. P. 587–643.

2. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
3. **Funakoshi M.** Long internal waves in a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 2470–2476.
4. **Гаврилов Н. В.** Неподвижные в лабораторной системе координат внутренние уединенные волны и плавные боры // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 29–34.
5. **Amick C. J., Turner R. E. L.** Small internal waves in two-fluid systems // Arch. Rat. Mech. Anal. 1989. V. 108, N 2. P. 111–139.
6. **Makarenko N. I.** Smooth bore in a two-layer fluid // Int. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 195–204.
7. **Peters A. S., Stoker J. J.** Solitary waves in liquids having non-constant density // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 115–164.
8. **Kakutani T., Yamasaki N.** Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 674–679.
9. **Beale J. T.** Exact solitary water waves with capillary ripples at infinity // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 64. P. 211–257.

Поступила в редакцию 12/II 1996 г.