

## ЗАЖИГАНИЕ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ НАКАЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПТЕРЬ

В. С. Берман

Зажиганию реагирующих веществ посвящен целый ряд работ, подробный обзор которых содержится в [1]. Некоторые исследователи приближенными аналитическими методами находят время зажигания [2—8]. В [7, 9] Вильямсом использовался метод сращиваемых асимптотических разложений для получения зависимости полей температуры и концентрации в системе от времени.

В данной работе находится зависимость времени зажигания накалиенной стенкой газовой среды при наличии теплопотерь. Рассматриваются одномерные реагирующие системы, теплопотери описываются при помощи распределенного стока тепла. Аналогичный подход применялся в теории стационарного распространения пламени [10, 11]. Показывается, что в зависимости от величины теплопотерь возможны различные режимы вынужденного зажигания. При достаточно малых теплопотерях накалиенная стенка играет важную роль только до момента обращения реагирующего вещества из стока тепла в источник, после чего в системе развивается самоподдерживающийся процесс выделения тепла. При большом теплоотводе теплопотери играют первостепенную роль в развитии процесса.

В работе найдены критические значения теплоотвода, разделяющие эти режимы. Выведено интегральное уравнение для определения концентрации реагента у поверхности накалиенной стенки. Определена зависимость полей концентрации и температуры от времени.

### Постановка задачи

При ряде упрощающих предположений задача о зажигании газа, способного к экзотермическому химическому превращению, может быть описана системой дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - mc \frac{\partial T}{\partial z} + Qk\rho^n (1-y)^n e^{-E/RT} - \rho f'(T - T_0, T), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial y}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D\rho \frac{\partial y}{\partial z} \right) - m \frac{\partial y}{\partial z} + k\rho^n (1-y)^n e^{-E/RT}, \quad (2)$$

$$\partial \rho / \partial t_* + \partial m / \partial z = 0, \quad (3)$$

$$z=0, \quad T=T_w, \quad \partial y / \partial z = 0, \quad (4)$$

$$z=\infty, \quad T=T_0, \quad y=0, \quad (5)$$

$$t_*=0, \quad T=T_0, \quad y=0, \quad (6)$$

$$f'(T - T_0, T) = \begin{cases} \geq 0 & \text{при } T \geq T_0 \\ 0 & \text{при } T \leq T_0, \end{cases}$$

где  $T$  — температура;  $y$  — концентрация;  $\rho(T)$  — плотность;  $\lambda$  — теплопроводность;  $c$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $z$  — пространственная координата;  $t_*$  — время;  $Q$  — тепловой эффект реакции;  $k$  — предэкспоненциальный множитель;  $E$  — энергия активации;

$n$  — порядок реакции;  $R$  — газовая постоянная;  $D$  — коэффициент диффузии;  $m$  — массовая скорость движения газа;  $T_w$  и  $T_0$  — соответственно температура стенки и начальная температура газа;  $f'$  — функция теплотеря. Как и в [7, 12], здесь полагается, что давление сохраняется постоянным на протяжении всего процесса зажигания. Введем функцию тока  $\psi$

$$m = -\partial\psi/\partial t_*, \quad \rho = \partial\psi/\partial z, \quad \psi(z=0, t_*) = 0.$$

После перехода от переменных  $(z, t_*)$  к  $(\psi, t_*)$  из (1) — (3) получаем

$$c \frac{\partial T}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \lambda \rho \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + Qk\rho^{n-1} (1-y)^n e^{-E/RT} - f(T - T_0, T), \quad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( D\rho^2 \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + k\rho^{n-1} (1-y)^n e^{-E/RT}. \quad (8)$$

Для простоты полагаем

$$\lambda\rho = \text{const}, \quad c = \text{const}, \quad D\rho^2 = \text{const}.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$X = \psi/\Delta x, \quad t = t_*/\Delta t,$$

$$\Delta t = E/RT_w \cdot c(T_w - T_0) Q\rho_w^{n-1} k \cdot e^{E/RT_w}, \quad \beta = E/RT_w,$$

$$\gamma = c(T_w - T_0)/Q, \quad L = \lambda/D\rho c, \quad (\Delta x)^2 = \lambda\Delta t/\rho_w c;$$

$$\sigma = T_0/(T_w - T_0), \quad \theta = (T - T_0)/(T_w - T_0), \quad \Gamma(\theta) = (\rho/\rho_w)^{n-1},$$

$$F(\theta) = \Delta t/c(T_w - T_0) \cdot f.$$

Вместо (7), (8) и условий (4) — (6) имеем

$$\partial\theta/\partial t = \partial^2\theta/\partial X^2 + \beta(1-y)^n \Gamma(\theta) e^{\beta(\theta-1)/(\theta+\sigma)} - F(\theta), \quad (9)$$

$$\partial y/\partial t = L^{-1} \cdot \partial^2 y/\partial X^2 + \beta\gamma(1-y)^n \Gamma(\theta) e^{\beta(\theta-1)/(\theta+\sigma)}, \quad (10)$$

$$X=0, \quad \theta=1, \quad \partial y/\partial X=0;$$

$$X=\infty, \quad \theta=0, \quad y=0; \quad (11)$$

$$t=0, \quad \theta=0, \quad y=0.$$

При помощи уравнений (9), (10) можно также описывать зажигание конденсированной среды без учета выгорания ( $y \equiv 0$ ), для этого в (10) необходимо формально положить  $\gamma = 0$ .

В зависимости от типа теплотеря функция  $F(\theta)$  имеет различный вид. Так, для ньютоновских теплотеря  $F(\theta) = \alpha\theta$  ( $\alpha = \text{const}$ ).

Найдем асимптотическое решение задачи до момента зажигания при  $\beta \gg 1$ . Далее полагаем, что  $L, \gamma, n, \sigma, \Gamma, d\Gamma/d\theta, F, dF/d\theta \sim 0$  (1).

### Решение задачи

Будем искать решение для  $\theta(X, t)$  в виде

$$\theta(X, t) = \theta_i(X, t) + u(X, t),$$

где  $\theta_i$  является решением задачи:

$$\partial\theta_i/\partial t = \partial^2\theta_i/\partial X^2 - F(\theta_i),$$

$$\theta_i(0, t) = 1, \quad \theta_i(\infty, t) = 0, \quad \theta_i(X, 0) = 0.$$

В частности, при  $F = \alpha\theta$  имеем

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left[ e^{-x\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{X - 2t\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}} \right) + e^{x\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{X + 2t\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}} \right) \right].$$

При  $X \rightarrow 0$  функция  $\theta_i$  имеет вид

$$\theta_i(X \rightarrow 0, t) = 1 - X\varphi(t) + O(X),$$

для ньютоновского теплообмена

$$\varphi(t) = 1\sqrt{\pi t} \cdot e^{-\alpha t} + \sqrt{\alpha}/2 \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}).$$

Задача (9) — (11) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \beta(1-y)^n \Gamma(\theta) e^{\beta \left( \frac{\theta_i + u - 1}{\theta_i + u + \sigma} \right)} = F(\theta), \quad (12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = L^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + \beta(1-y)^n \Gamma(\theta) e^{\beta \left( \frac{\theta_i + u - 1}{\theta_i + u + \sigma} \right)}, \quad (13)$$

$$u(0, t) = \partial y / \partial X \cdot (0, t) = y(\infty, t) = u(\infty, t) = 0, \\ u(X, 0) = y(X, 0) = 0.$$

Разобьем весь пространственный интервал  $X$  на две части: область пограничного слоя, прилегающую к накаливаемой поверхности, где введем переменную  $x = X\beta$ , и внешнюю область. Во внешней области член, описывающий химическую реакцию, экспоненциально мал.

В каждой из областей строится решение (12), (13) в виде асимптотических разложений, удовлетворяющих начальным и соответствующим граничным условиям во внутренней области при  $X=0$ , во внешней при  $X=\infty$ . Оба асимптотических разложения должны удовлетворять условиям сращиваемости [13, 14]. Будем искать решения во внутренней и во внешней областях соответственно в виде

$$u = u_1(x, t)/\beta + O(\beta^{-1}), \quad y = y_0(x, t) + y_1(x, t)/\beta + O(\beta^{-1}); \quad (14)$$

$$u = U_1(X, t)/\beta + O(\beta^{-1}); \quad y = Y_0(X, t) + O(\beta^{-1}). \quad (15)$$

Подставляя (14) в (12) и (13), получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (1-y_0)^n \exp \{ [u_1 - x\varphi(t)] / (1+\sigma) \} = 0, \\ u_1(0, t) = u_1(x, 0) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = 0, \quad y_0(x, 0) = \partial y_0(0, t) / \partial x = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \gamma(1-y_0)^n \exp \{ [u_1 - x\varphi(t)] / (1+\sigma) \} = 0, \\ y_1(x, 0) = \partial y_1(0, t) / \partial x = 0. \quad (18)$$

После подстановки (15) в (12) и (13) имеем

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2} - U_1 \cdot dF(\theta_i) / d\theta, \quad U_1(\infty, t) = U_1(X, 0) = 0, \\ \frac{\partial Y_0}{\partial t} = L^{-1} \cdot \frac{\partial^2 Y_0}{\partial X^2}, \quad Y_0(\infty, t) = Y_0(X, 0) = 0.$$

Из (17) следует

$$y_0(X, t) = y_0(t).$$

Тогда из (16) получаем общее решение для

$$u_1(x, t) = x\varphi(t) + (1+\sigma) [-n \ln(1-y_0) + \ln c_2 - 2 \ln \operatorname{ch}(c_1 + x\sqrt{c_2/2(1+\sigma)})], \\ c_i = c_i(t) \quad (i=1, 2).$$

Из граничного условия при  $x=0$  найдем

$$c_1 = \ln \left[ \sqrt{\frac{c_2}{(1-y_0)^n} \pm \sqrt{\frac{c_2}{(1-y_0)^n} - 1}} \right], \quad (19)$$

и из условия срашиваемости, которое в данном случае имеет вид  $u_1(x \rightarrow \infty, t) \simeq 0(1)$ , следует

$$c_2 = \varphi^2(t)/2(1+\sigma).$$

Для удовлетворения условий при  $t=0$  в (19) необходимо выбрать знак плюс.

Из срашиваемости внутренних и внешних разложений получаем недостающие граничные условия для внешних решений

$$Y(0, t) = y_0(t); \quad U(0, t) = \psi(t) = (1+\sigma) \times \\ \times [-n \ln(1-y_0) + \ln c_2 - 2c_1 + \ln 4].$$

В дальнейшем понадобится решение для  $Y_0(X, t)$ , оно дается формулой

$$Y_0(X, t) = \frac{X\sqrt{L}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y_0(t') \exp[-X^2L/4(t-t')] dt'}{(t-t')^{3/2}}. \quad (20)$$

При  $X \rightarrow 0$  из (20) имеем

$$Y_0(X \rightarrow 0, t) = y_0(t) - X \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^t \frac{\frac{d}{dt'} y_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' = y_0(t) - \\ - \frac{x}{\beta} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' + 0(\beta^{-1}). \quad (21)$$

Из (18) имеем

$$\partial y_1(x, t)/\partial x = L\gamma [\partial u_1/\partial x - \varphi(t) + \sqrt{2(1+\sigma)c_2} \operatorname{th} c_1]. \quad (22)$$

Срашивая двучленное внутреннее разложение для концентрации с односторонним внешним решением с учетом (21) и (22), получаем интегральное уравнение для определения  $y_0(t)$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' = \sqrt{\frac{L}{\pi}} \{ \varphi(t) - \sqrt{\varphi^2(t) - 2(1+\sigma)[1-y_0(t)]^n} \}, \\ y_0(0) = 0. \quad (23)$$

Величина теплового потока на накаливаемой поверхности

$$(\partial\theta/\partial X)_{x=0} = -\sqrt{\varphi^2(t) - 2(1+\sigma)[1-y_0(t)]^n}.$$

Момент зажигания находится из условия превращения газа из стока тепла в источник  $(\partial\theta/\partial X)_{x=0} = 0$ . В случае, когда возможно пренебрежение выгоранием, время зажигания  $t^*$  находится из решения трансцендентного уравнения

$$\varphi(t^*) = \sqrt{2(1+\sigma)}.$$

Уравнение  $\partial\theta/\partial X \cdot (0, t^*) = 0$  может и не иметь действительных решений. Этот случай соответствует большому теплоотводу. При достаточно малом теплоотводе значение накаливаемой стенки после обращения стока тепла на поверхности в нуль становится второстепенным, в то время как при достаточно большом теплоотводе накаливаемая стенка все время играет роль источника тепла. Так, в модели без учета выгорания реагента при ньютоновском теплообмене с окружающей средой имеем, что при  $0 \leq \alpha < 2(1+\sigma)$  зажигание происходит за конечное время, а при  $\alpha > 2(1+\sigma)$  — нет. При  $\alpha = 2(1+\sigma)$  время зажигания  $t^* = \infty$ . Такое разделение на возможные режимы в данной модели необходимо понимать условно в связи с тем, что при достаточно больших временах протекания процесса должно проявляться выгорание. В связи с этим при достаточно большом теплоотводе не будет реализовываться стационарный режим, формально описываемый уравнением

$$d^2\theta/dX^2 + \beta e^{\beta(\theta-1)/(\theta+\sigma)} - F(\theta) = 0, \theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0.$$

Однако этим уравнением можно воспользоваться для определения критических значений теплоотвода. Так как в критическом случае  $(d\theta/dX)_{x=0} = 0$ , то после интегрирования имеем

$$\int_0^1 F(z) dz - \beta \int_0^1 e^{\beta \frac{z-1}{z+\sigma}} dz = 0. \quad (25)$$

В качестве примера рассмотрим теплопотери в системе, вызванные лучистым теплообменом, при этом  $f(T - T_0, T) \simeq T^4 - T_0^4$ , или  $F(\theta) = \alpha[(\theta+\sigma)^4 - \sigma^4]$ . Из (25) следует, что критическое значение  $\alpha = \alpha^0$  определяется выражением

$$\alpha^0 = 10(1+\sigma)/(1+5\sigma+10\sigma^2+10\sigma^3) + 0(1).$$

Для вычисления времени зажигания газа в общем случае необходимо численно решить уравнения (23) и (24) при  $(\partial\theta/\partial X)_x = 0$ , например, методом, использованным в [7].

В качестве примера рассмотрим протекание реакции нулевого порядка. Скорость химической реакции равна  $k \exp(-E/RT)$  при  $0 \leq y < 1$  и обращается в нуль, если  $y \geq 1$ . Решение (23) имеет вид

$$y_0(t) = \gamma \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^t \frac{[\varphi(t') - \sqrt{\varphi^2(t') - 2(1+\sigma)}]}{\sqrt{t-t'}} dt'.$$

Химическая реакция прекращается при  $t^0$ , где  $y_0(t^0) = 1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, А. Э. Аверсон. Препринт. ИХФ АН СССР, М., 1970; *Combustion and Flame*, 1971, **16**, 1, 89.
2. Я. Б. Зельдович. Докл. АН СССР, 1963, **150**, 2.
3. Я. Б. Зельдович. *ЖЭТФ*, 1939, **9**, 2.
4. В. Н. Виллюнов. *ФГВ*, 1966, **2**, 2.
5. G. J. Rosen. *J. Chem. Phys.*, 1959, **30**, 298; 1958, **31**, 253.
6. P. H. Thomas, P. C. Bowes. *Trans. Faraday Soc.*, 1961, **57**, 2001.
7. В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев. *ПМТФ*, 1976, 4.
8. В. Н. Виллюнов, С. С. Хлевной. *ФГВ*, 1974, **10**, 4.
9. В. С. Берман. Канд. дисс. ИПМ АН СССР, 1974.
10. Д. Сполдинг. *Вопросы реактивной техники*, 1958, 2.
11. Ф. Вильямс. *Теория горения*. М., «Наука», 1971.
12. К. Г. Шкадинский, В. В. Барзыкин. *ФГВ*, 1968, **4**, 2.
13. М. Ван-Дайк. *Методы возмущений в механике жидкости*. М., «Мир», 1967.
14. Дж. Коул. *Методы возмущений в прикладной математике*. М., «Мир», 1971.

## РОЛЬ САЖИ ПРИ ГОРЕНИИ БАЛЛИСТИТНЫХ ПОРОХОВ СО СВИНЕЦСОДЕРЖАЩИМИ КАТАЛИЗАТОРАМИ

*А. П. Денисюк, А. Д. Марголин, Н. П. Токарев,  
В. Г. Хубаев, Л. А. Демидова*

Из многочисленных данных известно, что в катализе горения баллиститных порохов и ВВ большую роль играет сажа. Так, в ее присутствии эффективность действия различных катализаторов значительно увеличивается, а в случае баллиститных порохов повышенной калорийности свинецсодержащие катализаторы без сажи оказывают лишь слабое влияние на скорость горения [1, 2]. Несмотря на попытки выяснения закономерностей действия сажи [3—5], механизм ее влияния во многом не определен. При этом в первую очередь не ясен вопрос о роли сажи как компонента комбинированного катализатора. Действительно, в ряде случаев соединения свинца и сажа по отдельности почти не катализируют горение порохов, но введенные совместно, значительно повышают скорость горения, и это происходит лишь при определенном их соотношении, когда поверхность введенной в порох сажи намного превосходит поверхность свинцового катализатора [5].

В настоящей работе проведено изучение поверхности горения порохов, содержащих катализаторы и сажу. Исследования проводились с помощью растрового электронного микроскопа высокого разрешения. В качестве объекта изучения был выбран модельный двухкомпонентный

Характеристика горения образцов

Таблица 1

Катализатор	Давление, при котором загашен порох, кг/см <sup>2</sup>	u, мм/с	z	Условия горения (направление оттока газов)
Без катализатора	10	5,5	—	Вверх, вниз
0,2% PbO	10	5,5	1,0	Вверх
3% PbO	10	5,6	1,0	Вверх, вниз
	30	9,35	1,0	Вверх
10% PbO	10	5,6	1,0	Вверх
5% сажи	10	5,8	1,05	Вверх, вниз
10% PbO+5% сажи	10	9,35	1,7	Вверх, вниз
10% PbO+1% сажи	10	6,6	1,2	Вверх