

РАСТЯЖЕНИЕ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ ПЛАСТИНКИ
С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

П. М. Витвицкий, М. Я. Леонов

(Львов)

Рассматривается одноосное однородное на бесконечности напряженное состояние тонкой пластинки, материал которой подчиняется или закону идеальной упруго-пластической деформации, или закону деформации упрощенной модели хрупкого тела [1]. При этом обнаруживается и используется некоторая общность математической формулировки задачи об упругопластической деформации и о хрупком разрушении для рассматриваемого случая.

§ 1. Исходные положения. Постановка задачи. 1. Будем считать, что деформации тела подчиняются закону Гука, если удовлетворяются следующие условия: 1) нормальные напряжения не превосходят величины сопротивления отрыву σ_0 ; 2) касательные напряжения не превосходят величины предела текучести при сдвиге τ_t .

Эти условия в некоторых областях тела при достаточно больших деформациях могут нарушаться. В деформируемых за пределом упругости областях происходят пластические деформации или образуются трещины.

Образование трещин, которое возникает при хрупком разрушении в неоднородном поле напряжений, имеет место, когда нарушается условие $\sigma_{\max} < \sigma_0$. Согласно упрощенной модели хрупкого тела [1] поверхности трещины притягиваются с напряжением, равным сопротивлению отрыва σ_0 , если интервал между ними не превосходит некоторой величины δ . Такие трещины будем называть зародышевыми. Когда интервал между поверхностями превосходит величину δ , взаимодействие поверхностей прекращается — образуется развитая трещина, т. е. начинается процесс разрушения (локального). Нагрузка, при которой это имеет место, называется критической.

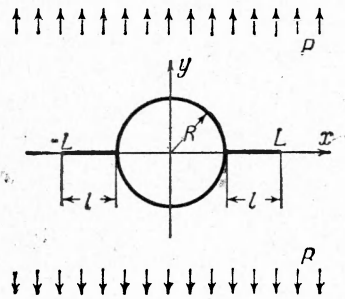
Для рассматриваемой модели хрупкого разрушения работа, затрачиваемая на образование развитой трещины единичной поверхности, равна $\delta\sigma_0$. По предположению Гриффитса [2], эта работа для идеально хрупких тел равна поверхностной энергии трещины $2T$. В этом случае $\delta = 2T / \sigma_0$.

При нарушении условия $\tau_{\max} < \tau_t$ в упругопластическом теле произойдут пластические деформации. Пластические деформации сопровождаются скольжением материала по некоторым поверхностям. В случае идеальной упругопластической деформации при неоднородном поле напряжений скольжения происходят в прослойках материала небольшой толщины. Такие прослойки описаны в работах [3,4]. Мы будем предполагать, что пластическое скольжение происходит при $\tau_{\max} = 0.5 \sigma_t$, где σ_t — предел текучести материала при растяжении.

Во многих случаях можно пренебречь толщиной прослоек материала, деформированного за пределом упругости, и заменить их действие соответствующими усилиями [5]. При этом возникает задача линейной теории упругости о деформации тела с разрывными перемещениями на некоторых поверхностях. Действующие по этим поверхностям усилия задаются, исходя из условий возникновения неупругих деформаций. Такие усилия назовем силами неупругих связей, а области, по которым они действуют, областями неупругих деформаций.

Известно [6], что разрывные (неоднозначные) перемещения точек в упругом континууме возникают при наличии линейных дислокаций типа Вольтерра. Такую дислокацию мощности λ можно получить путем вырезания (или внедрения) из неограниченного тела полубесконечного слоя постоянной толщины λ , совмещения как жесткого целого берегов выреза и их склеивания. Граница полуповерхности склеивания называется линией дислокации.

Ниже рассматривается непрерывное распределение элементарных дислокаций типа Вольтерра, вызывающее переменный разрыв перемещений в заданной области. При этом можно подобрать такое распределение дислокаций, что определенные напряжения в заданной области тела будут иметь заданные значения.



Фиг. 1

Таким образом, задача о деформации тела за пределом упругости может быть сведена к задаче линейной теории упругости о деформации тела с распределенными по некоторому закону линейными дислокациями. Закон распределения этих дислокаций и величина области их распределения определяются по заданным силам неупругих связей и требованиям сохранения условий упругости вне областей неупругих деформаций.

2. Пользуясь описанной моделью твердого тела, рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии тонкой бесконечной пластинки с круговым отверстием радиуса R при ее растяжении усилиями (фиг. 1), создающими на бесконечности напряжения $Y_y^\infty = p$.

Из упругого решения задачи о растяжении такой пластинки известно, что максимальные напряжения ($Y_y = 3p$) имеют место в точках $x = \pm R$ оси абсцисс, являющейся одной из главных осей. При определенной нагрузке здесь возникают области неупругих деформаций.

Поскольку на оси абсцисс главные напряжения $Y_y(x, 0) > X_x(x, 0) \geq 0$ и $Z_z = 0$, то $\tau_{\max} = 0.5 Y_y(x, 0)$. Условие пластичности $\tau_{\max} = 0.5 \sigma_T$ здесь примет вид $Y_y(x, 0) = \sigma_T = \text{const}$. При этом пластические сдвиги происходят по плоскостям скольжения, проходящим через ось абсцисс и наклоненным под углом 45° к плоскости пластинки.

В случае хрупкого разрушения¹ области неупругих деформаций представляют собой зародышевые трещины, распространяющиеся по траектории наибольших главных напряжений (по оси абсцисс). Поверхности этих трещин нормальны к плоскости пластинки и, согласно упрощенной модели хрупкого тела [1], притягиваются с напряжением $Y_y(x, 0) = \sigma_0 = \text{const}$.

Таким образом, как при хрупком разрушении, так и при идеальной упругопластической деформации в областях неупругих деформаций напряжения $Y_y(x, 0)$ постоянны. Поэтому определение напряженно-деформированного состояния в обоих случаях сводится к одной и той же математической задаче.

Пусть области неупругих деформаций распространились (фиг. 1) на отрезки $R \leq |x| \leq L$. Длина $l = L - R$ этих отрезков определяется из условия $\sigma_{\max} \leq \sigma_0$ или $\tau_{\max} \leq 0.5 \sigma_T$.

Согласно введенной модели, рассматриваемую деформацию за пределом упругости можно свести к чисто упругой деформации, если считать, что на отрезках оси абсцисс $R \leq |x| \leq L$ упругие перемещения $v(x, 0)$, перпендикулярные этой оси, претерпевают некоторый разрыв¹,

¹ В этом случае (в отличие от случая пластических деформаций) полученное ниже решение при соответствующей замене упругих констант применимо и для плоской деформации.

вызванный распределенными на указанных отрезках линейными дислокациями.

Напряжения и деформации в пластинке будем представлять в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от нагрузки (p), а второе от распределенных дислокаций. Первое из них будем определять по известным формулам упругого решения задачи о растяжении пластинки с отверстием. В книге [7] это решение дается функциями

$$\Phi^{\circ}(z) = \frac{1}{4} p \left(1 + 2 \frac{R^2}{z^2}\right), \quad \Psi^{\circ}(z) = \frac{1}{2} p \left(1 + \frac{R^2}{z^2} + 3 \frac{R^4}{z^4}\right) \quad (1.1)$$

где $z = x + iy = re^{i\theta}$ — точка комплексной плоскости.

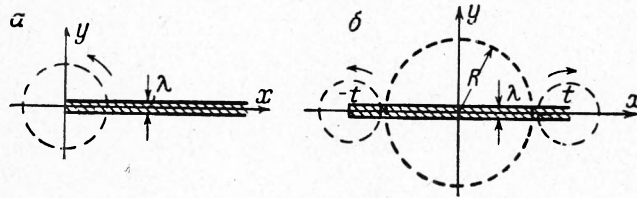
Этими функциями определяются напряжения и деформации. В частности, на действительной оси

$$Y_y^{\circ} = \frac{1}{2} p \left(2 + \frac{R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4}\right) \quad (1.2)$$

Дислокационную часть напряжений мы должны определить так, чтобы в областях неупругих деформаций суммарное напряжение основной и дислокационной частей удовлетворяло условию

$$Y_y^{\circ}(x, 0) + Y_y^s(x, 0) = \sigma_n = \text{const} \quad (R \ll |x| \ll L) \quad (1.3)$$

где σ_n равно или сопротивлению отрыва σ_0 (при хрупком разрушении), или пределу текучести σ_T (при пластической деформации).



Фиг. 2 а, б

§ 2. Некоторые задачи о линейных дислокациях в плоскости. Рассмотрим необходимые нам вспомогательные задачи о линейных дислокациях.

1. Линейную дислокацию мощности λ можно получить путем вырезания из неограниченной плоскости полубесконечной полоски $x \geq 0$, $-0,5\lambda \leq y \leq 0,5\lambda$, совмещения берегов выреза и их склеивания. При таком искажении, обходя по любому замкнутому контуру, охватывающему начало координат (линию дислокации), имеем разрыв перемещений $v(x, -0) - v(x, +0) = \lambda = \text{const}$ (фиг. 2, а).

В работе [8] получены значения функций Мусхелишвили, определяющих напряженно-деформированное состояние, вызванное линейной дислокацией в неограниченной плоскости с эллиптическим отверстием. Стягивая это отверстие в точку, получим значения функций Мусхелишвили для сплошной плоскости с дислокацией, линия которой проходит через начало координат

$$\Phi_0(z) = \Psi_0(z) = D \frac{\lambda}{z} \quad \left(D = \frac{G}{\pi(\kappa + 1)}\right) \quad (2.1)$$

где G — модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$ (в случае плоской деформации) или $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (в случае плоского напряженного состояния); ν — коэффициент Пуассона.

¹ Возникающий в случае пластических деформаций разрыв перемещений w , перпендикулярных плоскости пластинки, не учитывается, так как все вычисления делаются для срединной плоскости пластинки.

Для линейной дислокации, линия которой проходит через точку действительной оси $-t$, по формулам параллельного переноса системы координат для функций Мусхелишвили (2.1) получим

$$\Phi_1(z) = D \frac{\lambda}{z+t}, \quad \Psi_1(z) = D\lambda \left[\frac{1}{z+t} - \frac{t}{(z+t)^2} \right] \quad (2.2)$$

Аналогично для дислокации противоположного знака (с мощностью $-\lambda$), линия которой проходит через точку t , имеем

$$\Phi_2(z) = -D \frac{\lambda}{z-t}, \quad \Psi_2(z) = -D\lambda \left[\frac{1}{z-t} + \frac{t}{(z-t)^2} \right] \quad (2.3)$$

Складывая соответственно формулы (2.2) и (2.3), получим функции Мусхелишвили для плоскости с парой линейных дислокаций, дающей при обходе по замкнутому контуру (фиг. 2, б), охватывающему одну из точек t или $-t$, разрыв перемещений $v(x, -0) - v(x, +0) = \lambda = \text{const}$ для $-t < x < t$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = -2D \frac{\lambda t}{z^2 - t^2} \\ \Psi_3(z) &= \Psi_1(z) + \Psi_2(z) = -4D\lambda \frac{tz^2}{(z^2 - t^2)^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Напряжения в полярных координатах r и θ ($z = re^{i\theta}$), вызванные этой парой дислокаций, определим по формулам [7]

$$\widehat{rr} + \widehat{\theta\theta} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \widehat{\theta\theta} - \widehat{rr} + 2i\widehat{r\theta} = 2[z\overline{\Phi'(z)} + \Psi(z)] e^{2i\theta} \quad (2.5)$$

Подставляя сюда (2.4), найдем

$$\begin{aligned} \widehat{rr} + \widehat{\theta\theta} &= -4D\lambda t \left[\frac{1}{z^2 - t^2} + \frac{1}{\overline{z^2 - t^2}} \right] \\ \widehat{\theta\theta} - \widehat{rr} + 2i\widehat{r\theta} &= -8D\lambda t \frac{z(z-\overline{z})}{(z^2 - t^2)^2} e^{2i\theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вычитая из первой формулы (2.6) вторую и переходя к сопряженным величинам, получим необходимую нам формулу (2.7)

$$\widehat{rr} + i\widehat{r\theta} = -2D\lambda \left[\frac{t}{r^2\sigma^2 - t^2} + \frac{t}{r^2\overline{\sigma}^2 - t^2} \right] - 4D\lambda \frac{tr^2(\sigma - \overline{\sigma})\sigma^3}{(r^2\overline{\sigma}^2 - t^2)^2} \quad (\sigma = e^{i\theta}, \overline{\sigma} = e^{-i\theta})$$

2. Решим вспомогательную задачу для плоскости с круговым отверстием радиуса $R < t$, на контуре которого заданы нормальные N и касательные T напряжения, обратные по знаку напряжениям (2.7)

$$N + iT = -(\widehat{rr} + i\widehat{r\theta}) \quad \text{при } r = R \quad (2.8)$$

Общее решение такой задачи приведено в книге [7] в виде

$$\begin{aligned} \Phi_*(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma} \frac{(N+iT)\sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{c}{\zeta} \quad \left(\zeta = \frac{z}{R} \right) \\ \Psi_*(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma} \frac{(N-iT)\overline{\sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta^2} - \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta} + \frac{c'}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь γ — единичная окружность. Постоянные

$$c = -\frac{X + iY}{2\pi R(1 + \kappa)}, \quad c' = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi R(1 + \kappa)}$$

где X и Y — проекции на координатные оси вектора внешних усилий, приложенных к обводу отверстия. Очевидно, что в нашем случае этот вектор равен нулю, следовательно, $c = c' = 0$.

Подставляя (2.8) и (2.7) в (2.9) и применяя известные формулы для вычисления интегралов типа Коши, после упрощений находим

$$\begin{aligned}\Phi_*(z) &= \frac{2D\lambda R^4}{t} \left[\frac{1}{t^2 z^2 - R^4} - 2R^2 \frac{t^2 - R^2}{(t^2 z^2 - R^4)^2} \right] \\ \Psi_*(z) &= \frac{4D\lambda R^4}{t} \left[\frac{1}{R^2 z^2} + R^2 \frac{t^2 (2z^2 - R^2)}{z^2 (z^2 t^2 - R^4)^2} + \frac{4R^4 t^2 (R^2 - t^2)}{(z^2 t^2 - R^4)^3} \right]\end{aligned}\quad (2.10)$$

При сложении функций (2.10) и (2.4) получаем решение для плоскости с круговым отверстием при наличии в точках t и $-t$ пары линейных дислокаций, дающей на отрезках $R \leq |x| < t$ при обходе по замкнутому контуру, охватывающему одну из точек t или $-t$, разрыв перемещений

$$v(x, -0) - v(x, +0) = \lambda = \text{const}$$

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -2D\lambda \frac{t}{z^2 - t^2} + \frac{2D\lambda R^4}{t} \left[\frac{1}{t^2 z^2 - R^4} - 2R^2 \frac{t^2 - R^2}{(t^2 z^2 - R^4)^2} \right] \\ \Psi(z) &= -4D\lambda \frac{t z^2}{(z^2 - t^2)^2} + \frac{4D\lambda R^4}{t} \left[\frac{1}{R^2 z^2} + \frac{R^2 t^2 (2z^2 - R^2)}{z^2 (z^2 t^2 - R^4)^2} + \frac{4t^2 R^4 (R^2 - t^2)}{(z^2 t^2 - R^4)^3} \right]\end{aligned}\quad (2.11)$$

3. Пусть в плоскости с отверстием на отрезках действительной оси $R \leq |x| \leq L$ перемещения v при обходе по контуру, охватывающему одну из точек L или $-L$, претерпевают разрыв, величина которого зависит от точки отрезка:

$$v(x, +0) - v(x, -0) = \lambda(x) \quad (2.12)$$

Функцию $\lambda(x)$ будем считать непрерывной на заданных отрезках четной и равной нулю при $|x| = L$, т. е.

$$\lambda(x) = \lambda(-x), \quad \lambda(L) = \lambda(-L) = 0$$

Приращение величины разрыва на бесконечно малом участке dt в окрестности точки t равно $d\lambda = \lambda'(t) dt = \mu(t) dt$. Такое же приращение разрыва перемещений возникает во всех точках отрезка $(-t, t)$ при внедрении в концах этого отрезка пары линейных дислокаций мощности $d\lambda$. Функции Мусхелишвили для этой «элементарной» пары дислокаций даются формулами (2.11), если в них λ заменить на $d\lambda = \mu(t) dt$. Разрыв $\lambda(x)$ представляет собой интегральную сумму «элементарных» разрывов $d\lambda$, вызванных непрерывно распределенными парами линейных дислокаций на отрезках $R \leq |x| \leq L$

$$\lambda(x) = \int_L^x d\lambda = \int_L^x \mu(t) dt \quad (R \leq |x| \leq L) \quad (2.13)$$

Функции Мусхелишвили для непрерывно распределенных пар дислокаций получим как интегральную сумму функций для «элементарных» пар дислокаций:

$$\begin{aligned}\Phi^g(z) &= 2D \int_R^L \left\{ \frac{-t}{z^2 - t^2} + \frac{R^4}{t} \left[\frac{1}{t^2 z^2 - R^4} - \frac{2R^2 (t^2 - R^2)}{(t^2 z^2 - R^4)^2} \right] \right\} \mu(t) dt \\ \Psi^g(z) &= 4D \int_R^L \left\{ \frac{-z^2 t}{(z^2 - t^2)^2} + \frac{R^4}{t} \left[\frac{1}{R^2 z^2} + \frac{R^2 t^2 (2z^2 - R^2)}{z^2 (z^2 t^2 - R^4)^2} - \frac{4R^4 t^2 (t^2 - R^2)}{(z^2 t^2 - R^4)^3} \right] \right\} \mu(t) dt\end{aligned}\quad (2.14)$$

Величину $\mu(t) = d\lambda/dt = \lambda'(t)$ назовем плотностью распределения дислокаций ($\mu(t) = -\mu(-t)$).

§ 3. Интегральное уравнение задачи. 1. Из первого параграфа известно, что решение задачи о растяжении за пределом упругости пластинки с отверстием сводится к отысканию дислокационной части напряженно-деформированного состояния, вызванной непрерывно распределенными парами линейных дислокаций в областях неупругих деформаций. В свою очередь дислокационная часть напряженно-деформированного состояния определяется функциями (2.14), если известны плотность распределения дислокаций $\mu(t)$ и длина области неупругих деформаций (т. е. известно L). Для определения этих двух величин имеем два условия: равенство (1.3) и требование ограниченности напряжений.

Подставив (2.14) в (2.5), найдем входящее в (1.3) напряжение

$$Y_{ii}^g(x, 0) = 4D \int_R^L \left\{ \frac{t}{t^2 - x^2} + \frac{R^4}{t} \left[\frac{1}{R^2 x^2} + \frac{R^4 (x^2 - t^2)}{x^2 (t^2 x^2 - R^4)^3} + 4R^2 t^2 \frac{(t^2 - R^2)(x^2 - R^2)}{(t^2 x^2 - R^4)^3} \right] \right\} \mu(t) dt \quad (3.1)$$

На основе равенства (1.3) и формул (1.2), (3.1) получаем интегральное уравнение для определения искомой плотности $\mu(t)$ распределения дислокаций:

$$\int_R^L \left\{ \frac{t}{t^2 - x^2} + \frac{R^4}{t} \left[\frac{1}{R^2 x^2} + \frac{R^4 (x^2 - t^2)}{x^2 (t^2 x^2 - R^4)^2} + 4t^2 R^2 \frac{(t^2 - R^2)(x^2 - R^2)}{(t^2 x^2 - R^4)^3} \right] \right\} \mu(t) dt = \\ = \frac{1}{4D} \left[\sigma_H - \frac{1}{2} p \left(2 + \frac{R^2}{x^2} + 3 \frac{R^4}{x^4} \right) \right] (R \leq |x| \leq L) \quad (3.2)$$

Здесь считается, что $p \geq \frac{1}{3} \sigma_H$. Преобразуем это уравнение к более удобному для вычислений виду. Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x^2}{R^2}, \quad \eta = \frac{t^2}{R^2}$$

и полагая

$$\frac{L^2}{R^2} = \alpha, \quad \mu(t) = \mu(R\sqrt{\eta}) = \mu_0(\eta)$$

вместо (3.2) будем иметь

$$\int_1^\alpha \left[\frac{\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\xi} + \frac{\xi - \eta}{\xi(\xi\eta - 1)^2} + 4\eta \frac{(\eta - 1)(\xi - 1)}{(\xi\eta - 1)^3} \right] \frac{1}{\eta} \mu_0(\eta) d\eta = \\ = \frac{\sigma_H}{D} \left[0.5 - \frac{p}{4\sigma_H} \left(2 + \frac{1}{\xi} + \frac{3}{\xi^2} \right) \right] (1 \leq \xi \leq \alpha) \quad (3.3)$$

Величина α , характеризующая длину области неупругих деформаций, войдет в решение уравнения (3.3) как неопределенный пока что параметр.

2. Приближенное решение интегрального уравнения (3.3) будем искать в виде полинома с неизвестными коэффициентами a_n

$$\mu_0(\eta) \approx \frac{\sigma_H}{D} \sum_{n=0}^m a_n \eta^n \quad (1 \leq \eta \leq \alpha) \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в уравнение (3.3), получаем

$$\sum_{n=0}^m a_n J_n(\alpha, \xi) \approx 0.5 - \frac{p}{4\sigma_H} \left(2 + \frac{1}{\xi} + \frac{3}{\xi^2} \right) \quad (1 \leq \xi \leq \alpha) \quad (3.5)$$

где

$$J_n(\alpha, \xi) = \int_1^\alpha \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1}{\eta\xi} + \frac{\xi - \eta}{\xi\eta(\xi\eta - 1)^2} + \frac{4(\xi - 1)(\eta - 1)}{(\xi\eta - 1)^3} \right] \eta^n d\eta \quad (3.6)$$

После соответствующих вычислений находим

$$\begin{aligned}
 J_0(\alpha, \xi) &= \ln \frac{\alpha - \xi}{\xi - 1} - \ln \frac{\alpha \xi - 1}{\xi - 1} + \frac{\xi + 1}{\xi} \ln \alpha + \\
 &\quad + \frac{(\alpha - 1)(\xi + 5)}{\xi(\alpha \xi - 1)} - \frac{2(\alpha - 1)(\alpha \xi + \xi - 2)}{\xi(\alpha \xi - 1)^2} \\
 J_n(\alpha, \xi) &= \xi^n \ln \frac{\alpha - \xi}{\xi - 1} + \left[-n(2n + 3) + 4n^2 \xi + \right. \\
 &\quad \left. + (n - 1)(1 - 2n)\xi^2 \right] \xi^{-n-2} \ln \frac{\alpha \xi - 1}{\xi - 1} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \{ \xi^k + \xi^{-k-2} [-k(2k + 3) + 4k^2 \xi + (k - 1)(1 - 2k)\xi^2] \} \frac{\alpha^{n-k} - 1}{n - k} + \\
 &\quad + \frac{1 + \xi}{\xi} \frac{\alpha^n - 1}{n} + \frac{(\alpha - 1)\xi^{-n-1}}{\alpha \xi - 1} [4n + 5 - (4n - 1)\xi] - \\
 &\quad - \frac{2(\alpha - 1)\xi^{-n-1}(\alpha \xi + \xi - 2)}{(\alpha \xi - 1)^2} \quad (\text{для } n \geq 1)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Величина $J_n(\alpha, \xi)$ во всех точках $1 \leq \xi < \alpha$ ограничена, а при $\xi = \alpha$ имеет логарифмическую особенность. В равенстве (3.5) член с этой особенностью имеет вид

$$\sum_{n=0}^m a_n \xi^n \ln(\alpha - \xi)$$

Очевидно, что удовлетворение равенства (3.5) в точке $\xi = \alpha$ возможно только в случае, когда равен нулю коэффициент при логарифме, т. е.

$$a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_m \alpha^m = 0.
 \tag{3.8}$$

Это условие служит для определения α , зная которое можно найти длину областей неупругих деформаций.

Из (3.5) и (3.8) получаем $\mu_0(\alpha) = \mu(L) = 0$, т. е. плотность распределения дислокаций в конце области неупругих деформаций равна нулю. Принятые условия $\lambda(L) = 0$ и $\mu(L) = \lambda'(L) = 0$, обеспечивают плавность смыкания противоположных берегов разрыва в концах $\pm L$, что эквивалентно условию ограниченности (и непрерывности) напряжений в этих концах [9].

Для определения $(m + 1)$ -го коэффициентов a_n полинома $\mu_0(\eta)$ потребуем точного удовлетворения равенства (3.5) в $m + 1$ различных точках $1 \leq \xi_i \leq \alpha$. Тогда получим систему $m + 1$ уравнений

$$\sum_{n=0}^m a_n J_n(\alpha, \xi_i) = 0.5 - \frac{p}{\sigma_n} f(\xi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, m)
 \tag{3.9}$$

где

$$f(\xi_i) = \frac{1}{4} \left(2 + \frac{1}{\xi_i} + \frac{3}{\xi_i^2} \right)
 \tag{3.10}$$

Уравнения (3.9) совместно с условием (3.8) дают полную систему для определения неизвестных a_n и α . Однако решение этой системы при заданном отношении p/σ_n затруднительно. Проще считать заданным α , а определять отношение p/σ_n , т. е. по заданной длине области неупругих деформаций будем определять нагрузку, действующую на пластинку. Решив указанным способом систему (3.8) и (3.9), найдем зависимость между α и отношением p/σ_n , а также коэффициенты a_n полинома (3.4). Таким образом приближенное решение (3.4) интегрального уравнения будет найдено. Тогда по формулам (2.14) можно найти функции $\Phi^g(z)$ и $\Psi^g(z)$, определяющие дислокационную часть напряженно-деформированного состояния пластинки.

Пусть, для примера, приближенное решение (3.4) интегрального уравнения есть тричлен ($m = 2$)

$$\mu_0(\eta) \approx \frac{D}{\sigma_H} (a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2) \quad (1 \leq \eta \leq \alpha) \quad (3.11)$$

За точки ξ_i ($i = 0, 1, 2$) возьмем точки $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 1/2(1 + \alpha)$, $\xi_2 = \alpha$. Тогда (3.8) и (3.9) дают систему 4-х уравнений

$$a_0 J_0(\alpha, \xi_i) + a_1 J_1(\alpha, \xi_i) + a_2 J_2(\alpha, \xi_i) + \frac{p}{\sigma_H} f(\xi_i) = 0.5 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.12)$$

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 = 0$$

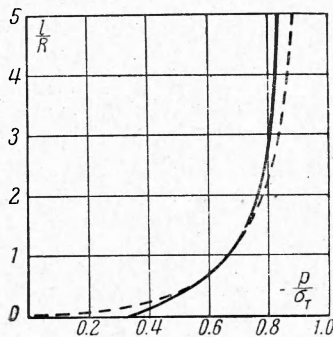
Задавая различные значения $\alpha \geq 1$, по формулам (3.7) и (3.10) вычисляем значения коэффициентов $J_0(\alpha, \xi_i)$, $J_1(\alpha, \xi_i)$, $J_2(\alpha, \xi_i)$, $f(\xi_i)$ в заданных точках ξ_i .

Таблица

α	$\frac{l}{R}$	$\frac{p}{\sigma_H}$	a_0	a_1	a_2	$\frac{\lambda(R)D}{R\sigma_0}$
1.0	0	0.3333				0
1.2	0.095	0.3780	2.0994	-3.9422	1.8272	0.0024
1.4	0.183	0.4180	0.8974	-1.6336	0.7090	0.0060
1.7	0.304	0.4702	0.4290	-0.7776	0.3090	0.0138
2.0	0.414	0.5097	0.1888	-0.3810	0.1433	0.0206
2.3	0.517	0.5411	0.1158	-0.2604	0.09136	0.0274
2.6	0.612	0.5721	0.03702	-0.1518	0.05290	0.0341
2.9	0.703	0.5972	-0.09986	-0.00198	0.03468	0.0401
3.2	0.789	0.6181	-0.02664	-0.06860	0.02404	0.0460
3.6	0.897	0.6401	-0.05254	-0.03782	0.01456	0.0519
4.0	1	0.6609	-0.06344	-0.02638	0.01056	0.0596
6.0	1.449	0.7227	-0.09138	0.001333	0.002316	0.0859
9	2	0.7665	-0.09702	0.006288	0.4990·10 ⁻³	0.1154
16	3	0.8054	-0.09336	0.005018	0.5106·10 ⁻⁴	0.1643
25	4	0.8253	-0.08758	0.003304	0.7972·10 ⁻⁵	0.2088
36	5	0.8370	-0.08270	0.002242	0.1533·10 ⁻⁵	0.2504

Решив при заданном α систему (3.12), найдем неизвестные p/σ_H , a_0 , a_1 , a_2 (см. таблицу).

В таблице приведены также значения отношения длины l области неупругих деформаций к радиусу R отверстия



Фиг. 3

$$\frac{l}{R} = \frac{L-R}{R} = \sqrt{\alpha} - 1$$

§ 4. Зависимость длины полос пластичности от нагрузки. Как сказано выше, при растяжении пластинки с отверстием из идеального упругопластического материала с пределом текучести σ_T области неупругих деформаций представляют собой узкие пластически-деформированные полосы. На фиг. 3 построен график (сплошная линия) зависимости отношения длины полосы к радиусу отверстия l/R от отношения нагрузки к пределу текучести p/σ_T . График построен на основании данных таблицы.

Для сравнения на этой же фигуре штриховой линией нанесен график зависимости длины области неупругих деформаций от нагрузки при растяжении пластинки со щелью. В работе [10] эта зависимость найдена в виде $l/R = \sec(\pi p/2\sigma_T) - 1$, где под R следует понимать полудлину щели. При $l/R \rightarrow \infty$ оба графика асимптотически приближаются к прямой $p/\sigma_T = 1$.

§ 5. Определение критической нагрузки при хрупком разрушении пластинки. В случае растяжения пластинки из хрупкого материала области неупругих деформаций представляют собой зародышевые трещины, поверхности которых притягиваются с напряжением, равным сопротивлению отрыва σ_0 , если интервал между ними не превосходит величины константы материала δ . Критическая нагрузка, при которой начинается процесс локального разрушения пластинки (прекращается взаимодействие поверхностей трещины), определяется из того условия, что максимальное значение интервала между поверхностями трещины достигает величины δ .

Интервал между поверхностями зародышевой трещины, равный разрыву перемещений $\lambda(x)$, определяется по формуле (2.13). Входящая в эту формулу плотность распределения дислокаций согласно (3.4) равна

$$\mu(t) = \mu_0 \left(\frac{t^2}{R^2} \right) = \frac{\sigma_0}{D} \sum_{n=0}^m a_n \left(\frac{t}{R} \right)^{2n} \quad (R \leq t \leq L) \quad (5.1)$$

Подставив (5.1) в (2.13), найдем

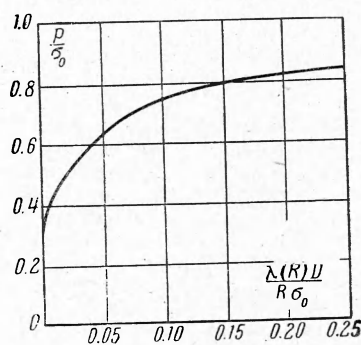
$$\lambda(x) = \frac{\sigma_0}{D} R \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{2n+1} \frac{x^{2n+1} - L^{2n+1}}{R^{2n+1}} \quad (R \leq x < L) \quad (5.2)$$

Интервал $\lambda(x)$ достигает максимальной величины на контуре отверстия

$$\lambda(R) = \frac{\sigma_0}{D} R \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{2n+1} \left[1 - \left(\frac{L}{R} \right)^{2n+1} \right] \quad (x=B) \quad (5.3)$$

В случае $m=2$ значения отношения $\lambda(R)D/R\sigma_0$ для различных α приведены в таблице. На основании данных таблицы на фиг. 4 построен график зависимости величины $\lambda(R)D/R\sigma_0$ от отношения p/σ_0 . При $\lambda(R)D/R\sigma_0 \rightarrow 0$ график асимптотически приближается к прямой $p/\sigma_0 = 1$.

Зная константу материала δ и полагая $\lambda(R) = \delta$, по этому графику легко определить критическую нагрузку (p_*). В зависимости от величины $\delta D/R\sigma_0$ критическая нагрузка p_* изменяется в пределах: $\frac{1}{3}\sigma_0 \leq p \leq \sigma_0$. При заданной константе материала $\delta D/R\sigma_0$ $p_* \rightarrow \frac{1}{3}\sigma_0$ при большом R и $p_* \rightarrow \sigma_0$ при $R \rightarrow 0$.



Фиг. 4

Поступила 26 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я., Элементы теории хрупкого разрушения, ПМТФ, 1961, № 3.
2. Griffith A. A., Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Trans. Roy. Soc., A 221, London, 1920.
3. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, М., ИИЛ, 1954.
4. Кошелев П. Ф., Ужик Г. В., Исследование пластической деформации в местах концентрации напряжений методом травления, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр., № 1, 1959.
5. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю., О разрывных деформациях твердого тела, ПМТФ, 1961, № 2.
6. Коттрелл А. Х., Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургиздат, 1958.
7. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1954.
8. Витвицкий П. М., Леонов М. Я., Дислокация в эллиптической порожниной, Доповіді АН УРСР, 1960, № 3.
9. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр., 1955, № 5.
10. Витвицкий П. М., Леонов М. Я. Про руйнування пластинки з щілиною. Прикладна механіка, 1961, т. VII, вып. 5.