

УДК 532.54:532.529.5

ВЛИЯНИЕ УЧЕТА МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕСУЩЕЙ ФАЗЫ НА СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХЖИДКОСТНОГО ПОТОКА С НЕСЖИМАЕМЫМИ ФАЗАМИ

Б. Л. Канцырев

Всероссийский научно-исследовательский институт по эксплуатации
атомных электростанций, 109507 Москва

Рассмотрено влияние пульсационных слагаемых кинетической энергии и тензора напряжений несущей фазы, полученных ранее методом ячеек, на свойства системы уравнений газожидкостного потока с несжимаемыми фазами. Показано, что характеристические свойства указанной системы, а также возможность моделирования эмпирического соотношения Зубера — Финдлея определяются тензором пульсационных напряжений несущей фазы.

Ключевые слова: двухфазный поток, пульсационные слагаемые, численное решение.

Введение. Как известно, при моделировании многофазных дисперсных потоков используются уравнения, полученные методом осреднения уравнений классической гидродинамики [1] или вариационными методами [2]. При этом окончательный вид системы уравнений еще не установлен. Как указывалось в [1], необходимы дальнейшая конкретизация и уточнение выражений для тензора напряжений, межфазных сил и т. д. В значительной степени задача конкретизации вида уравнений гетерогенных потоков связана с моделированием эффектов, обусловленных возмущениями, вносимыми в поток несущей фазы движением дисперсных частиц. В системе уравнений гидродинамики влияние таких мелкомасштабных возмущений учитывают пульсационные слагаемые, аналогичные рейнольдсовым напряжениям при моделировании турбулентного движения жидкости. При расчете пульсационных членов в качестве исходных параметров обычно принимаются параметры, характеризующие распределение дисперсных частиц в потоке.

В [3] при расчете силы взаимодействия сферических пузырьков с несущим потоком идеальной несжимаемой жидкости (с учетом взаимного влияния пузырьков) в качестве параметра использовалась бинарная функция распределения, показывающая вероятность взаимного расположения двух дисперсных частиц в жидкости. Варьируя вид указанной функции, авторы рассчитывали осредненную силу как при хаотичном, так и при упорядоченном распределении частиц.

В [1] параметрами модели являются геометрические параметры ячейки. Для сферической ячейки — это безразмерный параметр η_c , характеризующий отношение размера ячейки к протяженности зоны возмущения потока несущей фазы дисперсной частицей. Произвольное задание исходного параметра не влияет на структуру соотношений, определяющих, например, компоненты пульсационной составляющей тензора поверхностных сил, но вносит неопределенность в численное значение коэффициента η_c . Выбор указанного коэффициента учитывает влияние структуры потока на результат расчета.

Из сказанного выше следует, что сложность исследуемых объектов и процессов обуславливает не только трудность их моделирования, но и сложность получения и обработ-

ки экспериментальной информации, необходимой для правильного выбора исходных параметров модели. Действительно, экспериментальное определение такого параметра модели, как, например, бинарная функция распределения вероятности, вполне возможно, но представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому нахождение и оптимизация параметров расчетных моделей часто проводятся косвенным путем, на основе сопоставления свойств модели и результатов численного расчета с данными экспериментов, в которых измеряются массовые расходы, газосодержание, распределение давлений и т. д. (эти величины не являются параметрами моделей двухфазного потока).

Целью данной работы является анализ волновых свойств системы уравнений газожидкостного потока, полученной с учетом пульсационных слагаемых кинетической энергии и напряжений в несущей (жидкой) фазе. При этом определяется такой вид коэффициентов при пульсационных слагаемых, для которого волновые свойства модели не противоречат следствиям эмпирической закономерности Зубера — Финдлея [4, 5]. Вид системы уравнений не должен также противоречить процедуре осреднения “микроуравнений” гидродинамики [1], из которой она получается. Существенно, что представленная в [6] модель пузырькового потока обладает свойствами, учитывающими закономерность Зубера — Финдлея, но возможность получения уравнений движения с такими свойствами в [6] не обсуждалась. Поэтому представляет интерес рассмотреть процедуру получения уравнений движений хотя бы в приближении несжимаемости фаз. Построение системы уравнений с указанными выше свойствами позволяет объединить преимущества двухжидкостных моделей (возможность учета инерционности каждой фазы, эффекта присоединенной массы, более полный учет акустических процессов в потоке (см., например, [6]) по сравнению с одножидкостной моделью) с точным моделированием распространения кинематических волн, которое успешно проводится в рамках одножидкостного моделирования.

Актуальность проведенного анализа следует из того, что при моделировании гетерогенных потоков в рамках двухжидкостной системы уравнений гидродинамики гетерогенного потока (например, в расчетных кодах TRAC, CATHARE) правильный учет закономерности Зубера — Финдлея затруднителен и данная задача в практике численных расчетов часто решается в рамках одножидкостного моделирования, когда проскальзывание фаз U задается непосредственно по эмпирическим данным.

Основные допущения. Кинетическая энергия мелкомасштабных движений (которая определяется следом тензора пульсационных напряжений) и пульсационная составляющая тензора поверхностных напряжений, соответствующая пространственно одномерному осредненному уравнению движения жидкой фазы, представлены соответственно в виде

$$K_1 = \alpha_2 \chi U^2 / 2; \quad (1)$$

$$\Pi_1 = \alpha_2 \psi U^2, \quad (2)$$

где α_2 — объемное газосодержание; $U = V_2 - V_1$ — относительная скорость фаз; V_2, V_1 — соответственно макроскопические (осредненные) скорости дисперсной и несущей фаз; χ и ψ — функции объемного газосодержания; α_2, χ и ψ в данной работе рассматриваются как искомые параметры. Их выбор эффективно учитывает влияние структуры потока, возможные отклонения формы пузырька от сферической, влияние отличия давления, осредненного по поверхности пузырька, от среднего давления в жидкости. При получении уравнений (3), (4) фазовые переходы не учитываются, пузырьки представляются как твердые сферические частицы, фазы считаются несжимаемыми, теплообмен между фазами также не учитывается. Таким образом, внутренняя энергия каждой из фаз считается неизменной. Влияние вязкости учитывается впоследствии, в уравнениях (5), (6).

Система уравнений. С учетом сделанных выше предположений запишем уравнения баланса импульса и энергии для двухфазного потока в целом

$$\rho_1\alpha_1 \frac{d_1V_1}{dt} + \rho_2\alpha_2 \frac{d_2V_2}{dt} + \frac{\partial(P + \rho_1\Pi_1)}{\partial z} = F_{\text{ext}}; \quad (3)$$

$$\rho_1\alpha_1 \frac{d_1(V_1^2/2 + K_1)}{dt} + \rho_2\alpha_2 \frac{d_2(V_2^2/2)}{dt} - \frac{\partial C_1}{\partial z} = F_{\text{ext}}V. \quad (4)$$

Здесь $d_k/dt = \partial/\partial t + V_k \partial/\partial z$, $k = 1, 2$ (индекс 1 относится к жидкой (несущей) фазе, 2 — к дисперсной фазе); $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; P — давление; $W = \alpha_1V_1 + \alpha_2V_2$; $C_1 = -PW - V_2\rho_1\Pi_1$ — работа поверхностных сил [1, гл. 3]. Если фазы 1, 2 несжимаемы, то уравнения (3), (4) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1\alpha_1V_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1\alpha_1V_1^2 + \alpha_1P + \rho_1\Pi_1)}{\partial z} = \\ = -P \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} - \chi\rho_1\alpha_1\alpha_2 \left(\frac{d_1V_1}{dt} - \frac{d_2V_2}{dt} \right) + \Phi_\alpha U^2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} + \Phi_u U \frac{\partial U}{\partial z} + F_1; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_2\alpha_2V_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2\alpha_2V_2^2 + \alpha_2P)}{\partial z} = \\ = P \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} + \chi\rho_1\alpha_1\alpha_2 \left(\frac{d_1V_1}{dt} - \frac{d_2V_2}{dt} \right) - \Phi_\alpha U^2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} - \Phi_u U \frac{\partial U}{\partial z} + F_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\Phi_\alpha = \rho_1 \left\{ \frac{d(\alpha_2\psi)}{d\alpha_2} - \alpha_2\psi - \frac{\alpha_1}{2} \left[\chi(1 - 3\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 \frac{d\chi}{d\alpha_2} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\Phi_u = \rho_1 \left\{ 2\alpha_2\psi + \alpha_1\alpha_2 \left[\psi - \frac{\alpha_1}{2} \left(3\chi + \alpha_2 \frac{d\chi}{d\alpha_2} \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Из (5), (6) видно, что если пульсационные слагаемые (1) не учитываются (при $\psi = 0$ и $\chi = 0$), то эта система соотношений представляет собой уравнения импульса в форме уравнений Эйлера с учетом силы X. А. Рахматулина. Учет кинетической энергии мелко-масштабных движений в выражениях (3), (4) обеспечивает в (5), (6) учет силы присоединенных масс $\chi\rho_1\alpha_1\alpha_2(d_1V_1/dt - d_2V_2/dt)$, причем полученное в [1] значение $\chi = 1/2$ для $\alpha_2 = 0$ соответствует правильному предельному значению коэффициента присоединенных масс.

Слагаемые в правых частях (5) и (6), пропорциональные $\partial\alpha_2/\partial z$ и $\partial U/\partial z$, соответствуют межфазным силам, обусловленным мелко-масштабными движениями и коллективными взаимодействиями дисперсных частиц с несущим потоком [3]. Члены F_1, F_2 в правой части (5), (6) представляют внешние объемные силы, но в дальнейшем будем считать, что

$$F_1 = \rho_1\alpha_1g_z - F_{12}, \quad F_2 = \rho_2\alpha_2g_z + F_{12}, \quad F_{12} = -\alpha_1\alpha_2K_\mu U |U|. \quad (9)$$

Здесь F_{12} — сила межфазного взаимодействия, обусловленная вязкостью; K_μ — коэффициент сопротивления, зависящий от режима обтекания дисперсных частиц несущим потоком, объемного газосодержания, размера дисперсной частицы, плотности несущей фазы. Соотношения (5), (6) представляют собой уравнения движения для фаз пузырькового потока.

Характеристические свойства системы уравнений. Представляя скорость каждой фазы в зависимости от полного объемного расхода W и проскальзывания U , после исключения из (5), (6) слагаемых, содержащих $\partial P/\partial z$, получим уравнение для проскальзывания фаз

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (W + UK_u) \frac{\partial U}{\partial z} - U^2 K_\alpha \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} = F, \quad (10)$$

где

$$K_u = \frac{\rho_1}{R} \left(3(\psi - 0,5\alpha_1\chi) - 0,5\alpha_1\alpha_2 \frac{d\chi}{d\alpha_2} + \frac{\alpha_1\rho_2}{\rho_1} - \alpha_2 + \chi(\alpha_1 - \alpha_2) \right),$$

$$K_\alpha = \frac{\rho_1}{R} \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \frac{d[\alpha_1\alpha_2(0,5\alpha_1\chi - \psi)]}{d\alpha_2} + \frac{\rho}{\rho_1} + \chi \right),$$

$$R = \rho_1\rho_2 \frac{1 + \chi\rho_*/\rho_2}{\rho_*}, \quad \frac{1}{\rho_*} = \frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\alpha_2}{\rho_2}, \quad F = \frac{g^*(\rho_1 - \rho_2) - K_\mu U |U|}{R}, \quad g^* = \frac{dW}{dt} - g_z.$$

Рассмотрим уравнение (10) совместно с уравнениями неразрывности для жидкой и газовой фаз

$$\frac{\partial(\rho_1\alpha_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1\alpha_1V_1)}{\partial z} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho_2\alpha_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2\alpha_2V_2)}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

В случае несжимаемости фаз из (11), (12) следует условие независимости полного объемного расхода W от координаты (что позволяет рассматривать W как граничное условие — заданную функцию времени) и уравнение для объемного газосодержания

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2V_2)}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что $V_2 = W + \alpha_1U$, получим из (13)

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} + \alpha_1\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial z} + [W + (\alpha_1 - \alpha_2)U] \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (10) и (14) замкнута. Ее характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_1 = W + U[\alpha_1 - \alpha_2 + K_u + ((\alpha_1 - \alpha_2 - K_u)^2 - 4\alpha_1\alpha_2K_\alpha)^{0,5}]/2; \quad (15)$$

$$\lambda_2 = W + U[\alpha_1 - \alpha_2 + K_u - ((\alpha_1 - \alpha_2 - K_u)^2 - 4\alpha_1\alpha_2K_\alpha)^{0,5}]/2. \quad (16)$$

Потребуем, чтобы при $\alpha_2 \rightarrow 0$ выполнялось очевидное условие

$$\lambda_1 = \lambda_2 = V_2, \quad (17)$$

где V_2 — скорость дисперсной фазы. Действительно, при $\alpha_2 \rightarrow 0$ скорость распространения возмущений газосодержания в потоке должна приближаться к скорости движения пузырьков газа. Как следует из (15), (16) и определения функций K_u и K_α , условие (17) выполняется, если при $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$\alpha_1\chi/2 - \psi \sim \alpha_2^m, \quad (18)$$

где $m > 1$. При $\alpha_2 = 0$ из (18) следует $\chi/2 = \psi$, $\psi = 0,25$ при $\chi = 1/2$. Данное значение ψ отличается от полученного в [1] для сферических пузырьков и равно 0,2, что можно объяснить влиянием допущений, принятых при определении величин K_1 и Π_1 .

Как известно, из соотношения Зубера — Финдлея [4]

$$V_2 = C_0W + V_w \quad (19)$$

(C_0, V_w не зависят от W) следует уравнение дрейфа (см. [5]). Действительно, рассмотрим частный случай соотношения (19), который соответствует $C_0 = 1$. Очевидно, что в этом

случае из (19) следует соотношение, определяющее проскальзывание фаз в зависимости от объемного газосодержания:

$$U = U_0(\alpha_2). \quad (20)$$

Соотношение вида (20) является достаточно общим. Согласно [7], где приведены эмпирические данные для расчета относительной скорости фаз в подъемном двухфазном потоке, предположение $C_0 = 1$ вполне оправданно для значений $\alpha_2 \leq 0,65$. Подставляя соотношение (20) в (14), получим выражение, известное в литературе (см., например, [5, с. 295]) как уравнение дрейфа

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + V_d \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

где $V_d = W + (\alpha_1 - \alpha_2)U_0 + \alpha_1\alpha_2 dU_0/d\alpha_2$. Отметим, что при $\alpha_2 \rightarrow 0$ соотношение для V_d не противоречит условию (17).

Как указывается в [5, 8], модель дрейфа правильно описывает волновые процессы в двухфазных потоках с несжимаемыми фазами. Более того, в [5] с позиций модели дрейфа проведен анализ такого нестационарного процесса, как распад произвольного разрыва (без учета эффектов сжимаемости).

С учетом этого обстоятельства представляется целесообразным определить параметры системы уравнений (10), (14) ($\chi = \chi(\alpha_2)$, $\psi = \psi(\alpha_2)$) исходя из условия соответствия с волновыми свойствами уравнения дрейфа.

В стационарном режиме с однородным распределением газосодержания и проскальзывания фаз из соотношения (10) следует выполнение равенства $F = 0$, которое при надлежащем выборе коэффициента K_μ (как было показано в [9]) совпадает с эмпирическим соотношением (20). Требуемое соответствие волновых свойств имеет место при выполнении условия

$$\lambda_1 = \lambda_2 = V_d \quad (22)$$

для $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

Из (15), (16) следует, что (22) выполняется, если функции χ , ψ удовлетворяют системе уравнений

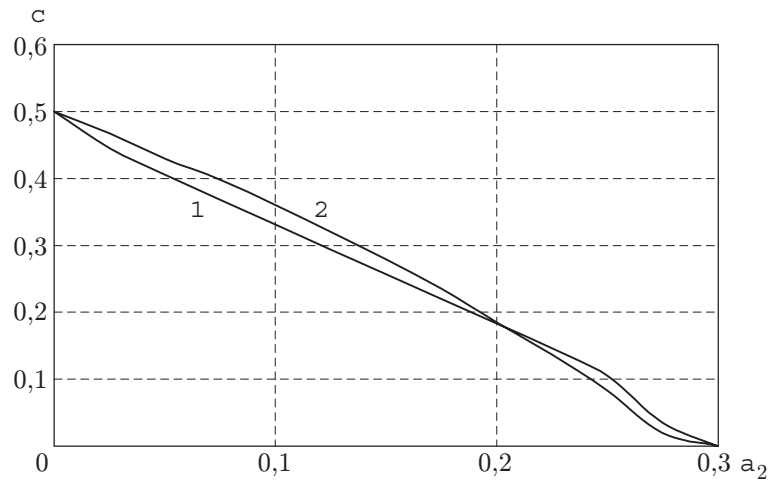
$$\begin{aligned} K_\alpha \left(\chi, \psi, \frac{d\chi}{d\alpha_2}, \frac{d\psi}{d\alpha_2} \right) &= \alpha_1\alpha_2 \left(\frac{d \ln U_0}{d\alpha_2} \right)^2, \\ K_u \left(\chi, \psi, \frac{d\chi}{d\alpha_2} \right) &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{d \ln U_0}{d\alpha_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для не слишком больших значений α_2 , при которых поток можно считать пузырьковым, решение системы уравнений (23) χ , ψ с начальными условиями $\chi(0) = 1/2$, $\psi(0) = 1/4$ представляет собой монотонно убывающие положительные функции. График зависимости $\chi = \chi(\alpha_2)$, полученной численным решением (23) в предположении, что $U_0 = \text{const}/\alpha_1$, $\rho_2 \ll \rho_1$, представлен на рис. 1 кривой 1. Кривая 2 — зависимость

$$\chi = (1 - \eta_c \alpha_2)/\alpha_1, \quad (24)$$

полученная в [1, с. 124] методом ячеек. Наилучшее соответствие решения (23) и зависимости (24) имеет место для значения параметра ячейочной модели $\eta_c = 3,5$. Данному значению η_c соответствует пульсационное мелкомасштабное движение, которое охватывает вблизи дисперсной частицы слой несущей фазы толщиной 82 % размера ячейки.

В качестве примера применения данной модели рассмотрим процесс установления противоточного течения в вертикальном канале. Данный пример соответствует представлениям о заключительной стадии аварии с потерей теплоносителя в корпусе реактора

Рис. 1. Зависимость $\chi(\alpha_2)$

ВВЭР, где происходит вскипание воды с последующим “зависанием” слоя воды на паровой “подушке” [9]. Такое “зависание” вследствие его неустойчивости нарушается. Вода перетекает вниз, а пар — вверх. В [6] показано, что если при моделировании в рамках одножидкостной модели в качестве замыкающего соотношения выбирается (19) при условии

$$C_0 = 1, \quad V_w = C(1 + (\rho_2/\rho_1)^{0,5}\alpha_2/\alpha_1), \quad (25)$$

то в результате расчета получается установившееся однородное распределение газосодержания со значением α_2^* , соответствующее в теории кинематических волн [7] формуле Уоллиса для захлебывания

$$W_1^{0,5} + (\rho_2/\rho_1)^{0,25}W_2^{0,5} = C^{0,5},$$

где W_1 , W_2 — среднеобъемные расходы потоков жидкости и газа соответственно; C — коэффициент, определяемый условиями эксперимента. То есть в рамках одножидкостной расчетной модели с замыкающим соотношением вида (19) правильный результат получается сравнительно легко. При, казалось бы, более точном и детальном двухжидкостном моделировании, когда каждой фазе соответствует “свое” дифференциальное уравнение движения, правильный выбор параметров, вообще говоря, не всегда возможен даже в том случае, когда система уравнений газожидкостного потока гиперболична. Но в рамках данной модели, как было показано выше, возможно задание требуемых волновых свойств. На рис. 2 представлены распределения параметра α_2 вдоль канала для различных моментов времени, полученные в рамках данной модели. Видно, что установление противоточного течения происходит при $\alpha_2 = \alpha_2^*$.

Заключение. Проведенный анализ показал, что учет пульсационных слагаемых в уравнениях баланса импульса и энергии позволяет получить замкнутую систему двух уравнений движения и двух уравнений неразрывности, обладающую заданными характеристическими свойствами. Использование данной методики позволяет учитывать в рамках двухжидкостной расчетной модели эмпирическую закономерность Зубера — Финдлея. При этом вид пульсационных слагаемых не противоречит результатам, полученным в рамках модели ячеек.

Следует отметить, что для решений уравнения дрейфа (21) $\alpha_2 = \alpha_2(z, t)$ соотношение (20), при выполнении условий (23) и линейном изменении объемного расхода W

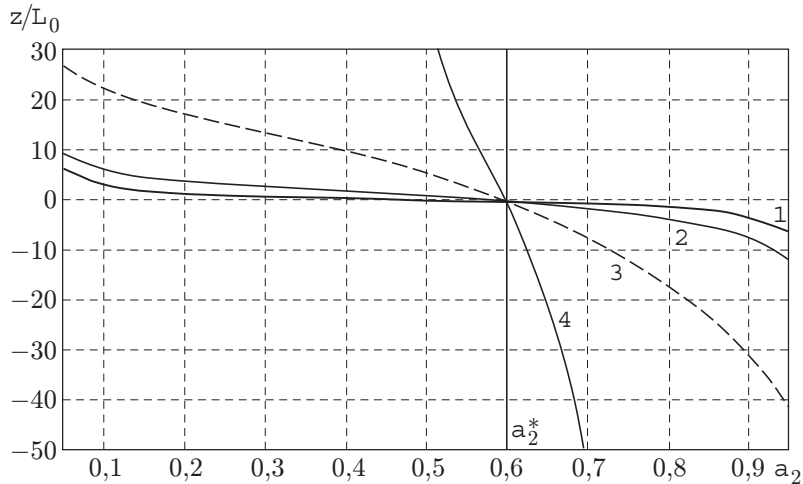


Рис. 2. Зависимость $\alpha_2(z/L_0)$:

1 — $t = 0$; 2 — $t = 3L_0/U$; 3 — $t = 20L_0/U$; 4 — $t = 100L_0/U$. L_0/U — характерное время установления процесса в модели дрейфа, определенное в соответствии с [6]

со временем, является также решением уравнения (10). Таким образом, в рамках модели (10)–(12), (23) решения уравнения дрейфа $U = U_0(\alpha_2)$, которые получаются из условия $F = 0$, могут рассматриваться как решения Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
3. Крошилин А. Е., Крошилин В. Е. Расчет межфазной силы в монодисперсной пузырьковой среде с идеальной несущей фазой и хаотическим расположением включений // ПМТФ. 1986. № 5. С. 95–103.
4. Zuber N., Findlay J. A. Average volumetric concentration in two phase flow systems // J. Heat. Transfer. 1965. N 12. P. 453–540.
5. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 2. С. 294–303.
6. Канцырев Б. Л., Ашбаев А. А. Двухжидкостная гидродинамическая модель пузырькового потока // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 64–72.
7. TRAC-P1A. An advanced best-estimate computer program for PWR LOCA analysis, NUREG/CR – 0665 LA-7777-MS. Washington, 1979.
8. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972.
9. Букринский А. Н., Фукс Р. Л. Выбор оптимальной схемы для расчета аварий при потере теплоносителя на АЭС // Теплоэнергетика. 1982. Вып. 1. С. 3–16.

Поступила в редакцию 30/І 2003 г.,
в окончательном варианте — 14/V 2003 г.