

**ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА  
О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕИСТОЧНИКА  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД**

УДК 532.59

С. И. Горлов

Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН,  
644077 Омск

Задача о движении вихреисточника вблизи границы раздела сред является классической задачей гидродинамики. Первые фундаментальные результаты в этой области принадлежат Н. Е. Кочину. В [1] получено решение задачи о движении вихреисточника под свободной поверхностью тяжелой жидкости, приведены формулы для подъемной силы, волнового сопротивления и формы свободной поверхности. Позднее результаты [1] были распространены на случай границы раздела двух сред [2].

Некоторые вопросы в этой области недостаточно изучены, в частности задача о движении вихреисточника над границей раздела сред, в среде с меньшей плотностью. Кроме того, мало данных по расчету гидродинамических реакций, действующих на вихреисточник. Решению этих вопросов и посвящена настоящая работа. В ней для задачи о движении вихреисточника под и над границей раздела двух сред получены формулы для комплексных скоростей, гидродинамических реакций и формы границы раздела сред. Разработан высокоэффективный метод вычисления волновых интегралов. На основании разработанного алгоритма решения задачи проведен обширный численный эксперимент по оценке влияния границы раздела сред на гидродинамические характеристики вихреисточника. Кроме того, исследована асимптотика решения задачи в дальнем поле за вихреисточником.

1. Пусть вихреисточник интенсивности  $C = \Gamma + iQ$  движется с постоянной скоростью вблизи границы раздела двух сред. Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, тяжелая и однородная в слоях  $D_1$  и  $D_2$ . Введем инерциальную систему координат, связанную с вихреисточником, располагая ось  $Ox$  вдоль невозмущенной границы раздела сред. Задачу будем рассматривать в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ . Обозначим через  $g$  ускорение силы тяжести,  $\rho_k$  — плотность жидкости в  $k$ -м слое,  $V_{k\infty}$  — скорость жидкости на бесконечности перед вихреисточником в слое  $D_k$  ( $k = 1, 2$ ). Пусть вихреисточник расположен в точке  $z_0 = x_0 - ih$  слоя  $D_1$  (движение под границей раздела сред, рис. 1, а). Для движения над границей раздела сред вихреисточник расположен в точке  $z_0 = x_0 + ih$  слоя  $D_2$  (рис. 1, б).

Для описания возмущенного движения жидкости в слое  $D_k$  ( $k = 1, 2$ ) введем комплексные скорости  $\bar{V}_k(z)$ . Потребуем, чтобы функции  $V_k(z)$  были аналитичны в области  $D_k$ , за исключением точки  $z_0$  при  $k = 1$  (движение под границей раздела),  $k = 2$  (движение над границей раздела), и удовлетворяли следующим граничным условиям: непрерывно-

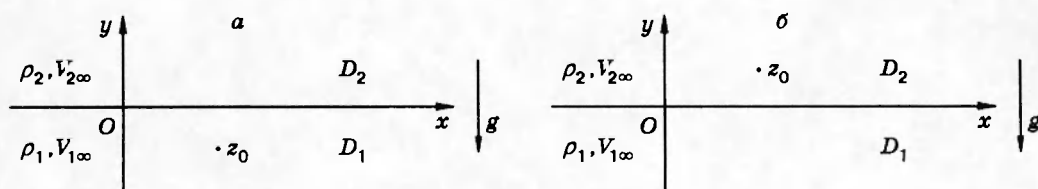


Рис. 1

сти нормальной составляющей скорости и давления при переходе через границу раздела областей  $D_1$  и  $D_2$ , а также затухания возмущенных скоростей в бесконечности перед вихреисточником.

Решение поставленной задачи для движения под границей раздела сред, полученное на основе общего метода, изложенного в [3], имеет вид

$$\bar{V}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{C}{z - z_0} + \frac{m_{12}}{2\pi i} \frac{\bar{C}}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{C}\nu_1 m_{12}^1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda(z-\bar{z}_0)}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - \bar{C}\nu_1 m_{12}^1 e^{-i\nu_1(z-\bar{z}_0)}; \quad (1.1)$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{V_{2\infty}}{V_{1\infty}} \left\{ \frac{m_{12}^1}{\pi i} \frac{C}{z - z_0} - \frac{C\nu_1 m_{12}^1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda(z-z_0)}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - C\nu_1 m_{12}^1 e^{i\nu_1(z-z_0)} \right\}, \quad (1.2)$$

где

$$m_{12}^1 = \frac{\rho_1 V_{1\infty}^2}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}; \quad m_{12}^2 = \frac{\rho_2 V_{2\infty}^2}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}; \quad \nu_1 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}; \quad m_{12} = m_{12}^1 - m_{12}^2.$$

Воспользовавшись методом [4], получим формулы для волнового сопротивления  $R_x$  и подъемной силы  $R_y$  вихреисточника:

$$R_x = -\rho_1 Q V_{1\infty} + \Delta R_x, \quad \Delta R_x = \rho_1 \nu_1 m_{12}^1 (\Gamma^2 + Q^2) e^{-2\nu_1 h}. \quad (1.3)$$

$$R_y = -\rho_1 \Gamma V_{1\infty} + \Delta R_y, \quad \Delta R_y = -\frac{\rho_1}{\pi} (\Gamma^2 + Q^2) m_{12}^1 \nu_1 \int_0^\infty \frac{e^{-2\lambda h}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - \frac{\rho_1}{4\pi h} (\Gamma^2 + Q^2) m_{12}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\Delta R_x$  и  $\Delta R_y$  — добавочные силы к обобщенной силе Жуковского, действующей на вихреисточник.

Форма границы раздела определяется функцией

$$f(x) = -\frac{1}{\nu_1 \bar{V}_{1\infty}} \operatorname{Re} \left\{ m_{12}^1 \bar{V}_1(z) - \frac{V_{1\infty}}{V_{2\infty}} m_{12}^2 \bar{V}_2(z) \right\} \text{ при } z = x. \quad (1.5)$$

Аналогичным образом, применяя общий метод работы [3], получим решение задачи о движении вихреисточника над границей раздела сред:

$$\bar{V}_1(z) = \frac{V_{1\infty}}{V_{2\infty}} \left\{ \frac{m_{12}^2}{\pi i} \frac{C}{z - z_0} - \frac{\bar{C}\nu_1 m_{12}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda(z-z_0)}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - \bar{C}\nu_1 m_{12}^2 e^{-i\nu_1(z-z_0)} \right\}; \quad (1.6)$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{C}{z - z_0} - \frac{m_{12}}{2\pi i} \frac{\bar{C}}{z - \bar{z}_0} - \frac{\bar{C}\nu_1 m_{12}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda(z-\bar{z}_0)}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - \bar{C}\nu_1 m_{12}^2 e^{i\nu_1(z-\bar{z}_0)}; \quad (1.7)$$

$$R_x = -\rho_2 Q V_{2\infty} + \Delta R_x, \quad \Delta R_x = \rho_2 \nu_1 m_{12}^2 (\Gamma^2 + Q^2) e^{-2\nu_1 h}; \quad (1.8)$$

$$R_y = -\rho_1 \Gamma V_{1\infty} + \Delta R_y, \quad \Delta R_y = \frac{\rho_2}{\pi} (\Gamma^2 + Q^2) m_{12}^2 \nu_1 \int_0^\infty \frac{e^{-2\lambda h}}{\lambda - \nu_1} d\lambda - \frac{\rho_2}{4\pi h} (\Gamma^2 + Q^2) m_{12}. \quad (1.9)$$

Граница раздела сред также определяется формулой (1.5).

2. Представляет интерес рассмотреть асимптотику решения задачи о движении вихреисточника под границей раздела сред (1.1), (1.2) и над границей раздела сред (1.6), (1.7), а также асимптотику выражения (1.5) для формы границы раздела сред в дальнем поле за вихреисточником.

Применяя к интегралам в выражениях (1.1), (1.2) асимптотические оценки для

интегрально-показательной функции, приведенные в [5], при  $\text{Re } z \gg |z_0|$  имеем

$$\bar{V}_1(z) = -2\bar{C}\nu_1 m_{12}^1 e^{-i\nu_1(z-\bar{z}_0)} + O\left(\frac{z_0}{z}\right), \quad \bar{V}_2(z) = \frac{V_{2\infty}}{V_{1\infty}} \left\{ -2C\nu_1 m_{12}^1 e^{i\nu_1(z-z_0)} \right\} + O\left(\frac{z_0}{z}\right).$$

Подставляя эти асимптотические выражения для комплексных скоростей в (1.5), получим асимптотическое выражение для границы раздела сред в дальнем поле:

$$f(x) = 2m_{12}^1 e^{-\nu_1 h} \left\{ \frac{\Gamma}{V_{1\infty}} \sin \nu_1(x-x_0) + \frac{Q}{V_{1\infty}} \cos \nu_1(x-x_0) \right\}.$$

Отсюда видно, что амплитуды волны для вихря  $A_\Gamma$  и источника  $A_Q$  в дальнем поле выражаются формулами

$$A_\Gamma = 2m_{12}^1 e^{-\nu_1 h} (|\Gamma|/V_{1\infty}), \quad A_Q = 2m_{12}^1 e^{-\nu_1 h} (|Q|/V_{1\infty}), \quad (2.1)$$

а длина волны  $\lambda = 2\pi/\nu_1$ .

Следует отметить, что полученная асимптотика решения задачи о движении вихреисточника под границей раздела двух сред полностью совпадает с результатами [2].

Аналогичным образом находится асимптотика выражений (1.5)–(1.7) для задачи о движении вихреисточника над границей раздела сред:

$$V_1(z) = \frac{V_{1\infty}}{V_{2\infty}} \left\{ -2C\nu_1 m_{12}^2 e^{-i\nu_1(z-z_0)} \right\} + O\left(\frac{z_0}{z}\right), \quad V_2(z) = -2\bar{C}\nu_1 m_{12}^2 e^{i\nu_1(z-\bar{z}_0)} + O\left(\frac{z_0}{z}\right),$$

$$f(x) = 2m_{12}^2 e^{-\nu_1 h} \left\{ \frac{\Gamma}{V_{2\infty}} \sin \nu_1(x-x_0) + \frac{Q}{V_{2\infty}} \cos \nu_1(x-x_0) \right\}, \quad (2.2)$$

$$A_\Gamma = 2m_{12}^2 e^{-\nu_1 h} (|\Gamma|/V_{2\infty}), \quad A_Q = 2m_{12}^2 e^{-\nu_1 h} (|Q|/V_{2\infty}), \quad \lambda = 2\pi/\nu_1.$$

**3.** Для определения комплексных скоростей (1.1), (1.2) и (1.6), (1.7) необходимо вычислить интегралы вида

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda z}}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (\text{Im } z > 0), \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda z}}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (\text{Im } z < 0).$$

Основные трудности связаны с тем, что под знаком интеграла стоит осциллирующая функция. При помощи замены переменной  $u = -iz(\lambda - \lambda_0)$  ( $\text{Im } z > 0$ ) и  $u = iz(\lambda - \lambda_0)$  ( $\text{Im } z < 0$ ) можно перейти к интегральной показательной функции комплексного аргумента:  $I_1 = e^{i\lambda_0 z} E_1(i\lambda_0 z) - \text{sign}(\text{Re } z) \pi i e^{i\lambda_0 z}$  ( $\text{Im } z > 0$ ),  $I_2 = e^{-i\lambda_0 z} E_1(-i\lambda_0 z) - \text{sign}(\text{Re } z) \pi i e^{-i\lambda_0 z}$  ( $\text{Im } z < 0$ ). Появление второго слагаемого в правой части этих выражений обусловлено наличием у подынтегральной функции особенности в точке  $\lambda = \lambda_0$ .

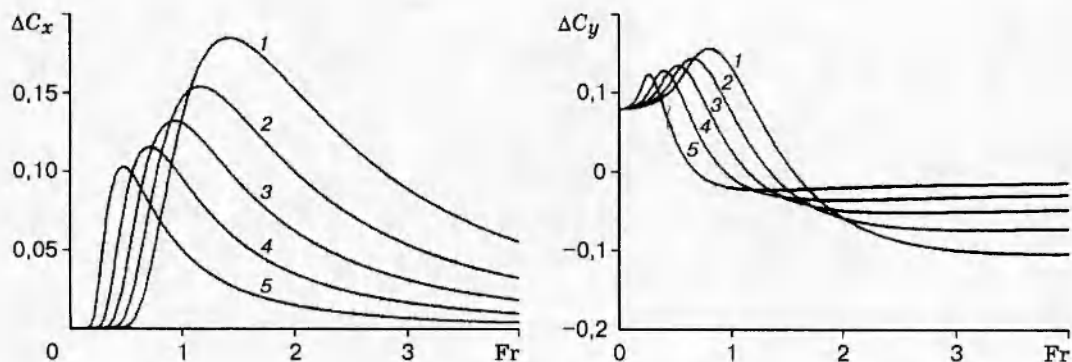


Рис. 2

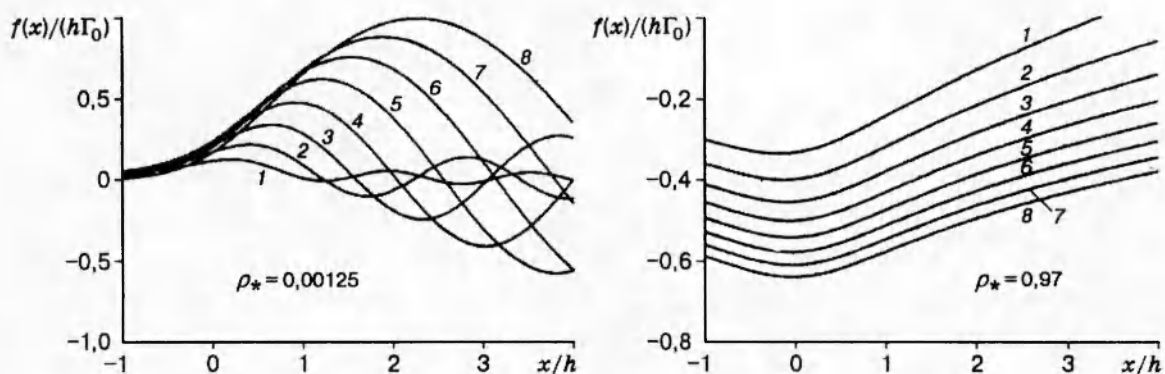


Рис. 3

Для вычисления интегральной показательной функции комплексного аргумента  $E_1(\xi)$  разработан алгоритм, обладающий высокой точностью расчета. При  $|\xi| \leq 1$  использовались квадратурные формулы Лагерра [6], а при  $|\xi| > 1$  — метод рациональных приближений [7, 8].

4. На основе (1.1)–(1.9), (2.1), (2.2) составлен алгоритм решения задачи, обладающий высокой точностью. Для задачи о движении вихреисточника под границей раздела двух сред проведен обширный численный эксперимент по вычислению коэффициентов добавочного волнового сопротивления  $\Delta C_x = \Delta R_x h / (\rho_1(\Gamma^2 + Q^2))$ , добавочной подъемной силы  $\Delta C_y = \Delta R_y h / (\rho_1(\Gamma^2 + Q^2))$ , формы границы раздела сред в ближнем и дальнем поле за вихрем. Решение задачи зависит от следующих безразмерных параметров:  $Fr = V_{1\infty} / \sqrt{gh}$  — число Фруда,  $\rho_* = \rho_2 / \rho_1$  — отношение плотностей,  $v_* = V_{2\infty} / V_{1\infty}$  — отношение скоростей набегающих потоков,  $\Gamma_0 = \Gamma / (V_{1\infty} h)$  — безразмерная интенсивность вихря. В расчетах полагалось  $x_0 = 0$ .

На рис. 2 показана зависимость коэффициентов  $\Delta C_x$  и  $\Delta C_y$  от  $Fr$  для  $\rho_* = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$  (линии 1–5) при  $v_* = 1$ . Обнаружен следующий эффект: с увеличением  $\rho_*$  максимум волнового сопротивления и подъемной силы убывает и смещается в сторону меньших значений  $Fr$ .

При изучении волновых задач представляет интерес расчет формы границы раздела сред  $f(x)/(h\Gamma_0)$ . Такие расчеты были проведены для  $Fr = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2$  (линии 1–8) при  $\rho_* = 0,00125; 0,97$  (граница раздела водной и воздушной сред, а также морской и пресной воды),  $v_* = 1$  (рис. 3). С увеличением отношения плотностей и числа Фруда растет длина волны.

Для задачи о движении вихреисточника в менее плотной жидкости также была рассмотрена форма границы раздела двух сред  $f(x)/(h\Gamma_0)$  для  $Fr = V_{2\infty} / \sqrt{gh} =$

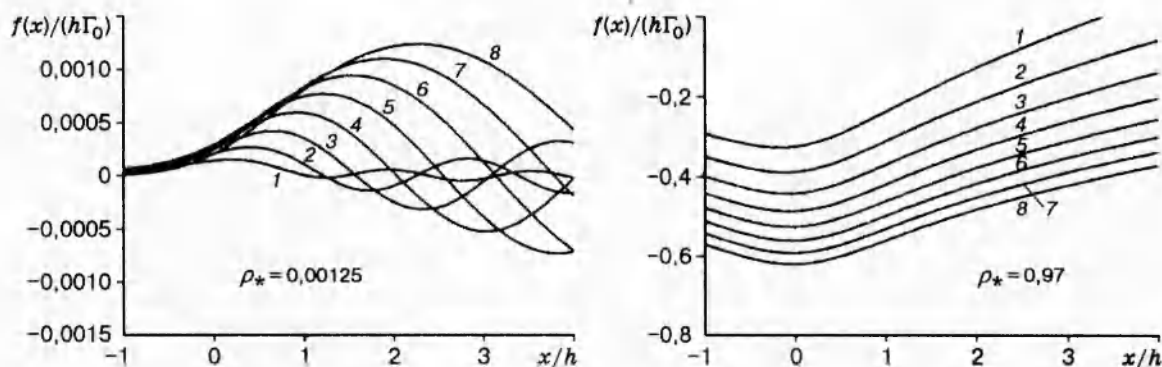


Рис. 4

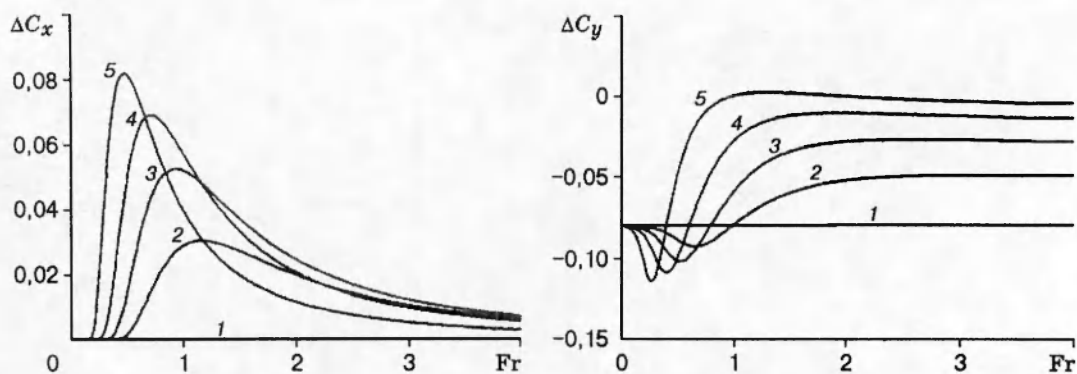


Рис. 5

0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2 (линии 1–8) при  $\rho_* = 0,00125; 0,97, v_* = 1$  (рис. 4). Следует отметить малую величину амплитуды волны, генерируемой вихрем, движущимся над границей раздела водной и воздушной сред по сравнению с амплитудой волны, генерируемой вихрем, движущимся в более плотной жидкости.

На рис. 5 приведена зависимость коэффициентов добавочного волнового сопротивления  $\Delta C_x = \Delta R_x h / (\rho_2(\Gamma^2 + Q^2))$  и подъемной силы  $\Delta C_y = \Delta R_y h / (\rho_2(\Gamma^2 + Q^2))$  от числа Фруда для  $\rho_* = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$  (линии 1–5) при  $v_* = 1$ . Характер поведения коэффициента  $\Delta C_x$  такой же, как и для движения под границей раздела сред, а для коэффициента  $\Delta C_y$  с увеличением  $\rho_*$  его минимум уменьшается и смещается в сторону меньших значений Fr.

На основании данных расчетов можно сделать следующий вывод: внутренние волны, генерируемые погруженным в жидкость вихреисточником, оказывают существенное влияние на его гидродинамические характеристики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 105–182.
2. Кочин Н. Е. О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности (статья 2). Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 1. С. 467–477.
3. Горлов С. И. Решение линейных задач о движении вихреисточника в многослойной тяжелой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 127–132.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
6. Крылов В. И., Шульгина А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. М.: Мир, 1980.
8. Hung-Tao Shen, Cesar Farell. Numerical calculation of the wave integrals in the linearized theory of water waves // J. Ship. Res. 1977. V. 21, N 1. P. 1–10.

Поступила в редакцию 27/III 1995 г.,  
в окончательном варианте — 29/XII 1995 г.