ПМТФ, № 1, 1972

УДК 534.113

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В. М. Смотров, В. М. Чернышев

(Волгоград)

Получены дифференциальные уравнения для общего случая продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней, в которых происходит отделение и присоединение масс к некоторым их частям. Дается решение некоторых частных задач о колебаниях таких стержней переменного состава.

При выводе обобщенных уравнений колебаний стержней переменного состава используются гипотеза плоских сечений, гипотеза малости деформаций и другие обычные упрощения. Упрощающим предположением является и гипотеза близкодействия, т. е. считается, что отделяющиеся и присоединяющиеся частицы взаимодействуют со стержнем только в момент непосредственного контакта. Силы внутреннего неупругого сопротивления не учитываются. Предполагается также, что в недеформированном состоянии упругая ось прямолинейна и центры тяжести поперечных сечений не смещаются из своего первоначального положения относительно поперечных сечений. Изменение массы единицы длины стержня может происходить как за счет изменения плотности, так и за счет изменения площади поперечного сечения, понимаемой как объединение начальной площади поперечного сечения и площадей отделившихся и присоединившихся частиц. Кроме того, со стержнем могут быть связаны частицы переменной массы, распределенные непрерывно или дискретно по его длине. Считается, что они не взаимодействуют между собой, а только со стержнем.

1. Уравнения продольных и крутильных колебаний стержней переменного состава. Считается, что при продольных колебаниях присоединяющиеся (отделяющиеся) частицы движутся вдоль оси стержня с равными по величине скоростями для одного и того же поперечного сечения стержня. При крутильных колебаниях главные векторы реактивных сил отделяющихся и присоединяющихся к сечению частиц равны нулю, а их моменты параллельны оси стержня. Достаточно получить уравнение продольных колебаний, потому что уравнение крутильных колебаний получается из него на основании известных аналогий.

Выведем сначала уравнение свободных колебаний стержня переменного состава со связанными с ним не взаимодействующими распределенными частицами переменной массы. Пусть $u(x, t)$ — перемещение поперечного сечения стержня; $F(x, t)$ — площадь поперечного сечения; $E(x, t)$ — модуль упругости; $m(x, t)$ — масса единицы длины стержня к моменту времени t; $m_0(x, t)$ — масса связанных с единицей длины стержня распределенных непрерывно, не взаимодействующих частиц к моменту времени t; $v^+(x, t)$, $v^-(x, t)$ — скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц стержня; $v_0^+(x, t)$, $v_0^-(x, t)$ — аналогичные скорости для связанных со стержнем частиц.

Уравнение продольных колебаний получается из необходимого условия экстремума функционала [1]

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[(m + m_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - EF\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial m^+}{\partial t} v^+ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial m^-}{\partial t} v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t} v^+_0 + \frac{\partial m_0^-}{\partial t} v_0^-\right) u\right] dx\, dt$$

и имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(m+m_0)\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial m^+}{\partial t}v^+ + \frac{\partial m}{\partial t}v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t}v_0^+ + \frac{\partial m_0^-}{\partial t}v_0^- \quad (1.1)$$

где l и x — длина стержня и координата, отсчитываемая от какого-либо его конца.

Масса единицы длины стержня m (x, t) и масса m_0 (x, t) связанных с единицей длины распределенных непрерывно, не взаимодействующих частиц к моменту времени t соответственно равны

$$m(x,t)=m^\circ(x)+m^+(x,t)+m^-(x,t)$$
$$m_0(x,t)=m_0^\circ(x)+m_0^+(x,t)+m_0^-(x,t) \quad (1.2)$$

Здесь m^+ $(x, t) \geqslant 0$, m^- $(x, t) \leqslant 0$ — массы частиц, присоединившихся и отделившихся от единицы длины стержня к моменту времени t; $m_0^+(x,t) \geqslant 0$, m_0^- $(x, t) \leqslant 0$ — массы не взаимодействующих частиц, присоединившихся и отделившихся от единицы длины стержня к моменту t; m° (x) — начальная масса единицы длины стержня; m_0° (x) — начальная масса не взаимодействующих между собой частиц, связанных с единицей длины стержня.

В начальный момент $t = 0$

$$m^+(x,0)=m^-(x,0)=0, \qquad \frac{\partial m^+}{\partial t}\geqslant 0, \qquad \frac{\partial m^-}{\partial t}\leqslant 0$$
$$m_0^+(x,0)=m_0^-(x,0)=0, \qquad \frac{\partial m_0^+}{\partial t}\geqslant 0, \qquad \frac{\partial m_0^-}{\partial t}\leqslant 0$$

Члены в правой части уравнения (1.1) представляют собой реактивные силы присоединяющихся и отделяющихся частиц в их абсолютном движении.

Уравнение (1.1) может быть представлено в виде

$$(m+m_0)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial m^+}{\partial t}\left(v^+-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{\partial m^-}{\partial t}\left(v^- - \frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial m_0^+}{\partial t}\left(v_0^+ - \frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial m_0^-}{\partial t}\left(v_0^- - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (1.3)$$

Правая часть уравнения (1.3) — реактивные силы в относительном движении присоединяющихся и отделяющихся частиц.

При действии на стержень внешних сил в правые части уравнений (1.1), (1.3) следует ввести член, учитывающий эти силы.

Если со стержнем связаны дискретные переменные массы в точках x_1, x_2, ..., x_n, то сила, с которой i-я масса действует на стержень, равна

$$N_i=-\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{du}{dt}\right)+\frac{dm_i^+}{dt}v_i^+ + \frac{dm_i^-}{dt}v_i^-$$

Здесь u (x_i, t) — перемещение поперечного сечения с координатой x_i; $v_i^+(t)$, v_i^- (t) — скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц i-й массы ($i = 1, 2, ..., n$); m_i^+ $(t) \geqslant 0$, m_i^- $(t) \leqslant 0$ — массы, присоединившиеся к частице с координатой x_i и отделившиеся от нее к моменту времени t.

В начальный момент $t = 0$

$$m_i^+(0) = m_i^-(0) = 0, \quad \frac{dm_i^+}{dt} \geqslant 0, \quad \frac{dm_i^-}{dt} \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Масса дискретно распределенных частиц к моменту времени t равна

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) = \sum_{i=1}^{n} (m_i^\circ + m_i^+ + m_i^-)$$

где $m_i^\circ = \text{const}$ — начальная масса частицы, связанной со стержнем в точке с координатой x_i.

Уравнения продольных колебаний в этом случае приобретают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[(m + m_0)\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left[m_i \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t}\right] \sigma(x - x_i) - \frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial m^+}{\partial t} v^+ + \frac{\partial m^-}{dt} v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t} v_0^+ + \frac{\partial m_0^-}{\partial t} v_0^- + \sum_{i=1}^{n} \times \\ &\times \left(\frac{dm_i^+}{dt} v_i^+ + \frac{dm_i^-}{dt} v_i^-\right) \sigma(x - x_i) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &(m + m_0)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 u}{dt^2} \sigma(x - x_i) - \frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial m^+}{\partial t}\left(v^+ - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial m^-}{\partial t}\left(v^- - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial m_0^+}{\partial t}\left(v_0^+ - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \\ &+ \frac{\partial m_0^-}{\partial t}\left(v_0^- - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{dm_i^+}{dt}\left[v_i^+ - \frac{du}{dt}\right] + \right. \\ &\left. + \frac{dm_i^-}{dt}\left[v_i^- - \frac{du}{dt}\right]\right\} \sigma(x - x_i) \end{aligned} \tag{1.5}$$

В этих уравнениях σ — импульсивная функция первого порядка.

Для получения уравнений крутильных колебаний стержня переменного состава в уравнениях (1.1), (1.3), (1.4) и (1.5) следует заменить величины, соответствующие поступательному движению поперечного сечения, аналогичными величинами во вращательном движении.

Начальные и граничные условия для этих уравнений составляются так же, как и для уравнений колебаний стержней постоянного состава, потому что реактивные силы можно рассматривать как внешнюю нагрузку.

Следует отметить случай присоединения и отделения частиц к однородному стержню с нулевыми относительными скоростями. При этом плотность и модуль упругости стержня не изменяются, а масса единицы длины стержня равна

$$m(x, t) = \rho F_0(x) f(t), \qquad f(t) > 0$$

где ρ — плотность, $F_0(x)$ — начальная площадь поперечного сечения.

Уравнение колебаний в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{F_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(F_0\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{E}{\rho} = a^2 = \text{const}$$

т. е. колебания происходят так, как если бы не было присоединения и отделения частиц. Это объясняется тем, что площади поперечных сечений изменяются во времени подобным образом.

Пример. Рассмотрим свободные колебания стержня с защемленными концами. Плотность и модуль упругости постоянны. Происходит отделение частиц с относительной скоростью

$$v^- = (2\alpha + 1)\,\partial u/\partial t \qquad (\alpha > 0)$$

Площадь поперечного сечения меняется во времени по закону $F = e^{-t}$. В начальный момент

$$u(x, 0) = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x)$$

Уравнение колебаний стержня принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad a^2 = \frac{E}{\rho} = \mathrm{const}$$

Оно полностью совпадает с уравнением свободных колебаний стержня постоянного состава с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости [2].

2. Уравнения поперечных колебаний. Скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц перпендикулярны нейтральной плоскости. Для присоединяющихся (отделяющихся) частиц за величину скорости берется среднее значение скорости частиц, присоединяющихся (отделяющихся) по обе стороны нейтральной плоскости. Для получения свободных изгибных колебаний стержня переменного состава без соединенных с ним дискретных масс составляется функционал

$$S_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_0^l \Big\{ (m + m_0) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + J_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}\right) - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - P \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 +$$
$$+ 2 \left[\frac{\partial m^+}{\partial t} v^+ + \frac{\partial m^-}{\partial t} v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t} v_0^+ + \frac{\partial m_0^-}{\partial t} v_0^-\right] y \Big\}\, dx\, dt$$

где $y(x, t)$ — поперечное смещение упругой оси стержня; $J_0(x, t)$ — момент инерции единицы длины стержня вместе со скрепленными с ним не взаимодействующими между собой частицами относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний; $J(x, t)$ — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний; $P(x, t)$ — интенсивность продольной растягивающей силы.

Уравнение поперечных колебаний стержня переменного состава представляет собой уравнение Эйлера для написанного функционала

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(m + m_0) \frac{\partial y}{\partial t}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t}\left(J_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) - \tag{2.1}$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(P \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial m^+}{\partial t} v^+ + \frac{\partial m^-}{\partial t} v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t} v_0^+ + \frac{\partial m_0^-}{\partial t} v_0^-$$

Если известными являются реактивные силы в относительном движении присоединяющихся и отделяющихся частиц, то это уравнение можно представить в форме

$$(m + m_0) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(J_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(P \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \tag{2.2}$$
$$= \frac{\partial m^+}{\partial t}\left(v^+ - \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial m^-}{\partial t}\left(v^- - \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial m_0^+}{\partial t}\left(v_0^+ - \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial m_0^-}{\partial t}\left(v_0^- - \frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Если со стержнем к тому же скреплены переменные массы, то для таких колебаний уравнения получаются аналогично (1.4) и (1.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(m+m_0)\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{dy}{dt}\right)\sigma(x-x_i)-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(J_0\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial m^+}{\partial t}v^+ + \quad (2.3)$$
$$+\frac{\partial m^-}{\partial t}v^- + \frac{\partial m_0^+}{\partial t}v_0^+ + \frac{\partial m_0^-}{\partial t}v_0^- + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dm_i^+}{dt}v_i^+ + \frac{dm_i^-}{dt}v_i^-\right)\sigma(x-x_i)$$

$$(m+m_0)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d^2y}{dt^2}\sigma(x-x_i)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(J_0\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial m^+}{\partial t}\left(v^+-\frac{\partial y}{\partial t}\right)+ \quad (2.4)$$
$$+\frac{\partial m^-}{\partial t}\left(v^--\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial m_0^+}{\partial t}\left(v_0^+-\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial m_0^-}{\partial t}\left(v_0^--\frac{\partial y}{\partial t}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{dm_i^+}{dt}\left[v_i^+-\frac{dy}{dt}\right]+\frac{dm_i^-}{dt}\left[v_i^--\frac{dy}{dt}\right]\right\}\sigma(x-x_i)$$

В стержнях, длина которых значительно превышает поперечные размеры, можно пренебречь инерцией вращения, и в уравнениях (2.1) — (2.4) опустить член, содержащий J_0.

Начальные и граничные условия для этих уравнений записываются так же, как и для уравнений поперечных колебаний стержней постоянного состава.

Пример. Рассмотрим свободные колебания однородного стержня прямоугольного сечения, шарнирно опертого по концам. Симметрично относительно нейтральной плоскости на стержень напыляется тот же материал, из которого состоит стержень. Средние относительные скорости равны нулю. В начальный момент

$$y(x,0)=f_1(x), \qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=f_2(x)$$

Толщина поперечного сечения меняется по закону $h=2\sqrt{3}e^t$. Следовательно

$$J/F=e^{2t}, \quad E/\rho=a^2=\mathrm{const}$$

Инерцией вращения пренебрегаем. Колебания такого стержня описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2e^{-2t}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$

Разделяя переменные, решение этого уравнения можно получить в форме

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_kI_0(p_ke^t)+B_kY_0(p_ke^t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$$
$$p_k=k^2\pi^2al^{-2}$$
$$A_k=\frac{2}{\Delta l}\int_0^l\left[f_2Y_1(p_k)+f_2\frac{Y_0(p_k)}{p_k}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$
$$B_k=-\frac{2}{\Delta l}\int_0^l\left[f_1I_1(p_k)+f_2\frac{I_1(p_k)}{p_k}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$
$$\Delta=I_0(p_k)Y_1(p_k)-I_1(p_k)Y_0(p_k) \quad (k=1,2,\ldots)$$

Здесь I_0, I_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода [3].