ПМТФ, № 5, 1967

СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко

(Новосибирск)

В последние годы получила интенсивное развитие теория слабой турбулентности, т. е. стохастическая теория нелинейных волн [1,2]. В теории слабой турбулентности нелинейность волн предполагается малой, что позволяет, используя гипотезу о случайности фаз отдельных волн, получить кинетическое уравнение для средних квадратов амплитуд волн.

Во многих случаях слабой турбулентности возникает ситуация, когда затухание существенно в области больших волновых чисел и отделено от области, где сосредоточена основная энергия волн (следствие накачки либо начальных условий) широкой областью прозрачности. В работах [3,4] высказывалась гипотеза, что слабая турбулентность в этих случаях вполне аналогична гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса в том смысле, что в области прозрачности устанавливается универсальный спектр, определяемый только потоком энергии в область больших волновых чисел. Спектр гидродинамической турбулентности $\varepsilon_k \sim k^{-5/3}$ был получен А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым [5,6] из соображений размерности. В случае слабой турбулентности спектр получается как точное решение стационарного кинетического уравнения.

Ниже рассматривается случай слабой турбулентности капиллярных волн на поверхности жидкости.

Получено кинетическое уравнение для капиллярных волн. Существенно, что в этом случае основной вклад во взаимодействие дают процессы распада волны на две и слияние двух волн в одну.

Показано, что столкновительный член кинетического уравнения обращается в нуль решением $\varepsilon_k \sim k^{-7/4}$. Высказываются соображения в пользу того, что это решение можно интерпретировать как универсальный спектр в области прозрачности.

1. Кинетическое уравнение. Как известно, закон дисперсии волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости имеет вид $\omega_k = \sqrt{\alpha k^3 + gk}$, где α — коэффициент поверхностного натяжения. Плотность жидкости положена равной единице.

Рассматривается случай $k \gg g/\alpha$. Здесь влиянием гравитационных сил можно пренебречь, и спектр приобретает вид $\omega_k = \sqrt{\alpha k^3}$.

Колебания поверхности жидкости без учета вязкости описываются следующей системой уравнений (вязкость впоследствии будет учтена феноменологически):

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = 0, \quad z < \eta, \quad \eta_t - \Phi_z = -\eta_x\Phi_x - \eta_y\Phi_y\big|_{z=\eta} \\ \Phi_t - \alpha(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = {}^1/_2(\nabla\Phi)^2\big|_{z=\eta}, \quad \Phi(x, y, z, t)\big|_{z=-\infty} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости, $\eta(x, y, t)$ — отклонение поверхности от равновесия. Ось z направлена от жидкости. Давление без ограничения общности положено равным нулю. Это уравнение имеет интеграл движения — энергию волн, которая с точностью до членов третьего порядка по $\eta(x, y, t)$ имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int \alpha\,[\eta_x^2 + \eta_y^2]\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int dx\,dy \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\Phi)^2\,dz$$

Перейдем в уравнениях (1.1) к фурье-преобразованию по x и y, использовав уравнение Лапласа и граничное условие. При этом воспользуемся малостью нелинейности, сохранив в фурье-разложениях члены до второго порядка малости по амплитуде колебаний

$$\frac{\partial\eta_k}{\partial t} - k\Psi_k = \int [(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) - |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|]\, \Psi_{k_1}\eta_{k_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2$$

$$\frac{\partial\Psi_k}{\partial t} + \alpha k^2\eta_k = \frac{1}{2}\int [(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|]\, \Psi_{\mathbf{k}_1}\Psi_{\mathbf{k}_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (1.2)$$

$$\Psi(x, y, t) = \Phi(x, y, z, t)|_{z=\eta}$$

Удобно перейти к новым переменным a_k и a_k^*, комплексным амплитудам волн

$$\eta_k = (4/\alpha k)^{1/4}(a_k + a_{-k}^*), \qquad \Psi_k = -i(4\alpha k)^{1/4}(a_k - a_k^*)$$

Здесь a_k, a_{-k}^* нормированы таким образом, что

$$\varepsilon^{(0)} = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k} \qquad (1.3)$$

где ε_0 — квадратичная часть энергии волн.

Уравнение для капиллярных волн в этих переменных имеет вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} - i\omega_k a_k = i\int V_{kk_1k_2} a_{k_1}a_{k_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + 2i\int V_{k_1kk_2} a_{k_1}a_{k_2}^*\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 +$$
$$+ i\int U_{kk_1k_2} a_{k_1}^* a_{k_2}^*\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (1.4)$$

$$V_{kk_1k_2} = \left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4}\left\{\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}_2|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2 - \mathbf{k}_2^2] +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2 - \mathbf{k}^2_1] - \left(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 - \mathbf{k}^2]\right\}$$

$$U_{kk_1k_2} = \left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4}\left\{\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}_2|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}^2_2 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2] +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}_1^2 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2] + \left(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2]\right\} \qquad (1.5)$$

Заметим, что $V_{kk_1k_2}$ и $U_{kk_1k_2}$ — однородные функции степени $^9/_4$, удовлетворяющие условиям симметрии

$$V_{kk_1k_2} = V_{kk_2k_1}, \qquad U_{kk_1k_2} = U_{kk_2k_1} = U_{k_2kk_1}$$

Функции V и U зависят только от модулей своих аргументов. Заметим, что капиллярные волны обладают «распадным законом дисперсии» [7], т. е. возможно одновременное выполнение условий

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

Из этого факта следует, что монохроматическая капиллярная волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ неустойчива относительно одновременного возбуждения пары волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ (распадная неустойчивость).

Перейдем к статистическому описанию колебаний. Будем считать систему волн статистически однородной, и, кроме того, фазы отдельных колебаний полностью хаотизованными. Согласно установившейся терминологии [1, 2], будем называть такое состояние слабой турбулентностью волн. Для описания турбулентности можно получить кинетическое уравнение для $n_k = |a_k|^2$ подобно тому, как это сделано в работе А. А. Галеева и

В. И. Карпмана [8]

$$\partial n_k / dt = St(n, n) - 2\nu k^2 n_k \tag{1.6}$$

$$St(n, n) = 4\pi \int |V_{k k_1 k_2}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) \times$$
$$\times \delta_{k-k_1-k_2} \delta_{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 +$$
$$+ 8\pi \int |V_{k_1 k k_2}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} + n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \delta_{\omega_k - \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \tag{1.7}$$

В кинетическое уравнение введен член — $2\nu k^2 n_k$, где ν — коэффициент вязкости. Этот член описывает вязкое затухание волн [9].

Согласно формуле (1.3), n_k связано со спектральной плотностью энергии соотношением $\varepsilon_k = \omega_k n_k$. Величину n_k можно интерпретировать как плотность числа волн в k-пространстве [1–4].

Уравнение (1.7) обладает законом сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \omega_k n_k \, d\mathbf{k} + 2 \int \nu k^2 \omega_k n_k \, d\mathbf{k} = 0 \tag{1.8}$$

2. Решение кинетического уравнения. Рассмотрим уравнение

$$St(n, n) = 0 \tag{2.1}$$

Будем искать цилиндрически-симметричные решения этого уравнения. Воспользуемся независимостью коэффициентной функции от углов, проведем усреднение по углам в уравнении (2.1). Для этого представим δ-функцию от волновых векторов в виде

$$\delta_{k \pm k_1 \pm k_2} = \int e^{i(\mathbf{r}, k \pm k_1 \pm k_2)} \, d\mathbf{r}$$

Проинтегрировав уравнение (2.1) по углам между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}_2$, перейдем к интегрированию по модулям векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, причем δ-функция от волновых чисел заменится выражением

$$\int_0^\infty J_0(kr) J_0(k_1 r) J_0(k_2 r) \, r \, dr = \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = {}^1/_2 \sqrt{2 [k_1^2 k_2^2 + k^2 k_1^2 + k^2 k_2^2 - k^4 - k_1^4 - k_2^4}$$

Здесь Δ — площадь треугольника, образованного векторами $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. После этого перейдем в уравнении (2.1) к переменным

$$\omega = k^{3/2}, \qquad \omega_1 = k_1^{3/2}, \qquad \omega_2 = k_2^{3/2}$$

и для сохранения симметрии ядра умножим уравнение на величину $\omega^{1/3}$. После интегрирования по переменной ω_2 получим (2.2)

$$\int_0^\omega P_{\omega, \omega_1, \omega-\omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega-\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega-\omega_1}) \, d\omega_1 +$$
$$+ 2 \int_0^\infty P_{\omega+\omega_1\, \omega, \omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega+\omega_1} + n_\omega n_{\omega+\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1}) \, d\omega_1 = 0$$

$$P_{\omega\omega_1\omega_2} = \frac{(\omega\omega_1\omega_2)^{1/3} |V_{\omega, \omega_1, \omega_2}|^2}{\sqrt{2 [\omega_1^{4/3} (\omega - \omega_1)^{4/3} + (\omega\omega_1)^{4/3} + \omega^{4/3} (\omega_1 - \omega)^{4/3} - \omega^{8/3} - \omega_1^{8/3} - (\omega - \omega_1)^{8/3}]}}$$

Здесь P_{w, w_1, w_2} — однородная положительно определенная функция степени $^8/_3$

$$P_{\omega, \omega_1, \omega-\omega_1} \sim P_{\omega+\omega_1, \omega, \omega_1} \sim \omega_1^2 \omega^{8/3} \quad \text{при } \omega_1 \ll \omega \tag{2.3}$$

Будем искать решение уравнения (2.2) в виде $n_\omega = A\omega^s$, где A — произвольная постоянная, а s — неизвестная величина.

Произведем замену переменных во втором интеграле уравнения (2.2) по формулам

$$\omega_1 \to \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}\omega_1, \qquad d\omega_1 \to -\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 d\omega_1$$

Функция $P_{\omega+\omega_1,\, \omega_1,\, \omega}$ вследствие ее однородности и симметрии (см. (1.6)) преобразуется следующим образом:

$$P_{\omega+\omega_1,\, \omega_1,\, \omega} \to P_{\omega\omega/\omega_1,\, (\omega-\omega_1)\,\omega/\omega_1,\, \omega_1\omega/\omega_1} \to (\omega/\omega_1)^{8/3} P_{\omega,\, \omega-\omega_1,\, \omega_1}$$

Теперь видно, что после такой замены два интеграла сворачиваются в один, а подынтегральное выражение легко факторизуется.

Уравнение для неизвестной величины s, таким образом, имеет вид

$$\int_0^\omega d\omega_1 \frac{P_{\omega,\, \omega_1,\, \omega-\omega_1} [\omega_1^s (\omega - \omega_1)^s - \omega^s \omega_1^s - \omega^s (\omega - \omega_1)^s]}{\omega_1^{2s+14/3} (\omega - \omega_1)^{2s+14/3}} \times$$

$$\times \int_0^\omega [\omega_1^{2s+14/3} (\omega - \omega_1)^{2s+14/3} - \omega^{2s+14/3} \omega_1^{2s+14/3} - \omega^{2s+14/3} (\omega - \omega_1)^{2s+14/3}]\, d\omega_1 = 0$$

Очевидно, что подынтегральное выражение обращается в нуль при значениях s, равных -1 и $-{}^{17}/_6$.

Вследствие положительной определенности функции P других степенных решений уравнение (2.1) не имеет.

Первому из уравнения (2.2) соответствует решение $n_\omega^{(1)} = \mathrm{const}/\omega$, т. е. распределение Релея — Джинса.

Второму корню соответствует решение $n_\omega^{(2)} = \mathrm{const}/\omega^{17/16}$.

В k-пространстве этим решениям соответствуют распределения

$$n_k^{(1)} = \mathrm{const}\, k^{-1/2}, \qquad n_k^{(2)} = \mathrm{const}\, k^{-13/4}$$

что для спектральной плотности энергии в цилиндрической нормировке дает

$$\varepsilon_k^{(1)} = \mathrm{const}\, k, \qquad \varepsilon_k^{(2)} = \mathrm{const}\, k^{-7/4}$$

Для того чтобы это решение могло иметь физический смысл, необходимо, чтобы интегралы в уравнении (2.7) сходились. Рассмотрим сначала сходимость в области малых k.

Заметим, что в первом члене уравнения (2.2) интегрирование по области $\omega - \omega_1 \ll \omega$ дает такой же вклад, как и по области $\omega_1 \ll \omega$. Учитывая это, соберем все члены, обращающиеся в бесконечность при $\omega_1 \to 0$. Получим

$$2\int \{P_{\omega_1,\, \omega_1,\, \omega-\omega_1} [n_\omega n_{\omega-\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1}] + P_{\omega+\omega_1, \omega,\, \omega_1} [n_{\omega_1} n_{\omega+\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1}]\}\, d\omega_1 \quad (2.4)$$

С учетом асимптотики (2.3) эти члены имеют порядок

$$\frac{1}{\omega^{1/3}} \frac{\partial n_\omega}{\partial \omega} \int n_{\omega_1} \omega_1^4\, d\omega_1 \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что интегралы в уравнении (2.2) сходятся для обоих полученных решений при $\omega_1 \to 0$. Рассмотрим сходимость при $\omega_1 \to \infty$.

В этом случае наиболее опасными будут члены

$$2n_\omega \int P_{\omega+\omega_1,\ \omega,\ \omega_1} (n_{\omega+\omega_1} - n_\omega)\, \omega^3 n_\omega\, d\omega_1 \sim \omega^3 n_\omega \int \omega_1^{2/3} \frac{\partial n_{\omega_1}}{\partial \omega_1}\, d\omega_1 \tag{2.5}$$

Очевидно, что и в этом предельном случае интегралы в уравнении сходятся для обоих решений.

3. Физическая интерпретация решений. Рассмотрим задачу о затухании капиллярных волн. Оценим порядки различных членов в уравнении (1.7). Пусть τ — характерное время затухания. Член $\partial n/\partial t$ имеет порядок n/τ, тогда как член $St(n, n)$ имеет порядок $\nu^2\, n^2k^2/\omega_k \sim n^2k^5$ и при достаточно больших k много больше члена $\partial n/\partial t$. Таким образом, член $\partial n/dt$ существен только на малых k.

Обозначим границу влияния члена $\partial n/\partial t$ через a. Ясно далее, что вязкость влияет только при достаточно больших k. Обозначим границу влияния вязкости через $в$. Будем рассматривать случай $в \gg a$. Попытаемся аппроксимировать решение уравнения(1.7) в области $a \ll k \ll в$ при помощи точных решений уравнения (2.1). Рассмотрим сначала распределение Релея — Джинса.

Вследствие сходимости интегралов в уравнении (2.1) для распределения Релея — Джинса главный вклад в интеграл определяется областью $k_1 \sim k$ и имеет порядок T^2k^2. С другой стороны, член $\nu\, k^2 n_k$ имеет порядок $\nu\, Tk^{1/2}$. Отсюда видно, что вязкость не может привести к обрезанию распределения Релея — Джинса при больших k и $b = \infty$. Но поскольку полная энергия для распределения Релея — Джинса расходится при больших k, это означает, что решение Релея — Джинса не может быть осуществлено в данной задаче.

Рассмотрим теперь решение $n_k = ck^{-17/4}$. Порядок столкновительного члена для этого решения есть $c^2k^{-7/2}$, а порядок вязкого члена — $\nu c\kappa^{-9/4}$. Отсюда граница влияния вязкого члена $b \sim (c/\nu)^{4/5}$.

Естественно считать, что при $k > b$ решение быстро затухает.

Решение $n_k = ck^{-17/4}$ быстро убывает при $k \gg a$, поэтому основная часть энергии заключена в области $k \sim a$, где существенна нестационарность. Пусть решение в этой области имеет порядок n_0. Из условия сшивки на границе энергосодержащей области имеем

$$n_0 \sim ca^{-17/4} \tag{3.1}$$

Таким образом, истинное решение сильно отличается от решения $n_k = ck^{-17/4}$ в областях $k \lesssim a$ и $k \gtrsim b$. Интегрирование в столкновительном члене производится по всему пространству волновых чисел, в том числе и, по этим областям. При этом вклад области $a \ll k \ll b$ имеет порядок $c^2k^{-7/2}\, (a/k)^{13/4}$.

Из формул (2.5) и (2.6) можно оценить вклады областей $k \lesssim a$ и $k \gtrsim b$. Они равны соответственно $c^2k^{-7/2}\, (a/k)^{13/4}$ и $c^2k^{-7/2}\, (\kappa/b)^{11/4}$. Очевидно, при $a \ll k \ll b$ эти вклады пренебрежительно малы.

Вычислим теперь величину энергии, диссоцируемой в единицу времени. Эта величина задается формулой (1.8). Основной вклад в интеграл определяется верхним пределом

$$p \sim c \int^{b} \frac{\nu k^2 \omega_\kappa}{k^{17/4}}\, kdk \sim \alpha^{1/2} c^2 \tag{3.2}$$

Находим, что количество диссипируемой энергии или, что то же, поток энергии в область больших k не зависит от величины коэффициента вязкости. Решение в области $a \ll k \ll b$ можно переписать в виде

$$n_k \sim p^{1/2} \alpha^{-1/4} k^{-17/4} \tag{3.3}$$

Отсюда

$$n_0 \sim p^{1/2} \alpha^{-1/4} a^{-17/4} \tag{3.4}$$

Из кинетического уравнения (1.7) можно установить, что поток энергии p пропорционален n^2, т. е. $n \sim p^{1/2}$. Легко видеть, что $n_k \sim p^{1/2}\ \alpha^{-1/4}\ k^{-17/4}$ — единственная степенная функция, удовлетворяющая этому условию по размерности. Полная энергия волн имеет порядок

$$\varepsilon \sim \omega a^2 n_0 \sim \alpha^{1/2} a^{7/2} n_0 \tag{3.5}$$