

ГИДРОДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПУЗЫРЕЙ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. Головин, В. Г. Левич, В. В. Толмачев

(Москва)

Исследуется влияние газосодержания и формы занимаемой системой пузырей на скорость их подъема в неограниченной среде и вертикальной цилиндрической колонне. Рассмотрены выгодные, с энергетической точки зрения, деформации системы при допущении однородного и изотропного распределения пузырей в системе.

Теоретическое описание движения системы газовых пузырей в жидкости необходимо для изучения барботажных процессов. Эта проблема неоднократно рассматривалась в случае малых чисел Рейнольдса ($Re \ll 1$) на основе так называемой модели ячеек. В работе [1] аналогичная модель использована для описания движения системы пузырей умеренных размеров ($Re < 300$). Предполагалось, что во все моменты времени каждый пузырь находится в центре воображаемой сферической ячейки жидкости, радиус которой равен среднему расстоянию между центрами пузырей в системе. Причем нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю на поверхности ячейки. Первое допущение эквивалентно предположению об однородности и изотропности системы, а второе не является физически сколько-нибудь убедительным. Для случая пузырей умеренных размеров при малом газосодержании в настоящей работе получены результаты расчета скорости подъема системы пузырей, даже качественно отличающиеся от аналогичных результатов, полученных на основе модели ячеек. Это, по-видимому, свидетельствует о неудовлетворительности модели ячеек, по крайней мере, в случае малого газосодержания.

1. Постановка задачи. Предполагается, что все пузыри имеют одинаковый радиус R и скорости подъема пузырей не зависят от времени. Как показано В. Г. Левичем [2], движение одиночного пузыря радиуса $R < 0.05$ см в жидкости с кинематической вязкостью $\nu \sim 0.01$ см²/сек в отсутствие поверхностноактивных веществ удовлетворительно описывается в приближении идеальной жидкости. Поэтому для системы газовых пузырей умеренных размеров, когда a (среднее расстояние между центрами пузырей) велико по сравнению с их размерами, принимаем в качестве первого приближения допущение о безвихревом обтекании идеальной жидкостью системы N сфер, центры которых в данный момент времени находятся в точках r_i с координатами r_i^α ($\alpha = 1, 2, 3, i = 1, \dots, N$).

Для отыскания скорости потенциального потока $v = \nabla\Phi$ требуется решить уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в области, кроме } r_i' < R \quad (1.1)$$

$$r_i' = |r_i'|, \quad r_i' = r - r_i$$

с граничными условиями, выражающими обращение в нуль радиальной составляющей скорости потока жидкости на поверхности i -й сферы в системе отсчета, связанной с i -й сферой

$$\xi_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \Phi - u_i^\alpha \right) = 0 \text{ при } \xi_i = \frac{r_i'}{R} = 1 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

где u_i^α — компонента скорости i -го пузыря. В (1.2) и далее предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам. Будем искать Φ в системе отсчета, в которой жидкость при $r \rightarrow \infty$ покоится. Очевидно, что для этого достаточно наложить условие

$$\Phi \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

2. Потенциал поля скоростей. Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде

$$\Phi = -\frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^N V_i^\alpha \frac{r_i'^\alpha}{r_i'^3}, \quad V_i^\alpha = u_i^\alpha - \frac{R^3}{2} \sum_{j=1}^N V_j^\beta A_{ji}^{\beta\alpha} \quad (2.1)$$

Если воспользоваться известным разложением в ряд Тейлора

$$\frac{r_i'^\alpha}{r_i'^3} = -\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \left(S_{ik} \frac{1}{r_{ik}} \right) - \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \left(S_{ik} \frac{1}{r_{ik}} \right) \quad (2.2)$$

записанным при помощи оператора сдвига

$$S_{ik} = \exp \left(-r_k'^\alpha \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \right) \quad \left(\begin{array}{l} r_{ik} = |r_{ik}| \\ \bar{r}_{ik} = r_i - r_k \end{array} \right) \quad (2.3)$$

то потенциал Φ можно представить в окрестности k -го пузыря следующим образом:

$$\Phi = -\frac{R^3}{2} \frac{u_k^\alpha r_k'^\alpha}{r_k'^3} + \frac{R^6}{4} \sum_{i=1}^N V_i^\alpha A_{ik}^{\alpha\beta} \frac{r_k'^\beta}{r_k'^3} - \frac{R^3}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_i^\alpha \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \left(S_{ik} \frac{1}{r_{ik}} \right) \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что при $r_k' = R$

$$\begin{aligned} \xi_k^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} &= u_k^\alpha \xi_k^\alpha + \frac{R^4}{4} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i^\alpha A_{ik}^{\alpha\beta}}{\partial r_k'} \xi_k^\beta - \frac{\bar{R}^3}{2} \sum_{i=1}^N V_i^\alpha A_{ik}^{\alpha\beta} \xi_k^\beta - \\ &- \frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i^\alpha}{\partial r_k'} \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \left(S_{ik} \frac{1}{r_{ik}} \right) + \frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^N V_i^\alpha \xi_k^\beta S_{ik} \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где тензор $\Lambda_{ik}^{\alpha\beta}$ определяется как

$$\Lambda_{ii}^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{3r_{ik}^\alpha r_{ik}^\beta}{r_{ik}^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r_{ik}^3} \quad (i \neq k), \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\alpha = \beta) \\ 0, & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (2.6)$$

Граничное условие (1.2) может быть использовано для отыскания тензора $A_{ik}^{\alpha\beta}$.

Чтобы удовлетворить (1.2) с точностью до членов порядка $(R/a)^6$ включительно, требуется выбрать $A_{ik}^{\alpha\beta}$ таким образом, чтобы выполнялось условие при $r_k' = R$

$$\frac{R}{2} \frac{\partial A_{ik}^{\alpha\beta}}{\partial r_k'} - A_{ik}^{\alpha\beta} + S_{ik} \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.7)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что этому условию удовлетворяет тензор

$$A_{ik}^{\alpha\beta} = 2\zeta_{ik}^{-2} [1 - (1 + \zeta_{ik}) e^{-\zeta_{ik}}] \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} \quad \left(\zeta_{ik} = \bar{R}^2 \frac{r_k'^\alpha}{r_k'^3} \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \right) \quad (2.8)$$

С точностью до членов порядка $(R/a)^6$ включительно на поверхности k -го пузыря потенциал и его производные могут быть представлены в виде

$$\Phi = -\frac{R}{2} u_k^\alpha \xi_k^\alpha + \frac{R^3}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{v_i^\alpha r_{ik}^\alpha}{r_{ik}^3} + \frac{\bar{R}^3}{2} \sum_{i=1}^N v_i^\alpha B_{ik}^{\alpha\beta} \xi_k^\beta \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} = \frac{3}{2} u_k^\beta \xi_k^\beta \xi_k^\alpha - \frac{1}{2} u_k^\alpha + \frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^N v_i^\beta C_{ik}^{\alpha\gamma} \Lambda_{ik}^{\beta\gamma} \quad (2.10)$$

$$r_k'^\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} = -\frac{9}{2} \bar{u}_k^\beta \bar{\xi}_k^\beta \bar{\xi}_k^\alpha + \frac{3}{2} \bar{u}_k^\alpha - \frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^N v_i^\beta D_{ik}^{\alpha\gamma} \Lambda_{ik}^{\beta\gamma} \quad (2.11)$$

$$v_i^\alpha = u_i^\alpha - \frac{R^3}{2} \sum_{j=1}^N v_j^\beta \Lambda_{ji}^{\beta\alpha}$$

$$B_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_{ik}^{\alpha\beta} - \zeta_{ik}^{-1} (e^{-\gamma_{ik}} - 1) \Lambda_{ik}^{\alpha\beta}$$

$$C_{ik}^{\alpha\gamma} = \frac{\partial}{\partial r_k'^\alpha} \sum_{n=0}^3 \frac{2n+3}{(n+2)!} \left(\frac{R}{r_k'}\right)^{n+1} r_k'^\gamma \left(-r_k'^\lambda \frac{\partial}{\partial r_k'^\lambda}\right)^n$$

$$D_{ik}^{\alpha\gamma} = \frac{\partial}{\partial r_k'^\alpha} \sum_{n=0}^3 \frac{2n+3}{(n+2)!} \left(\frac{R}{r_k'}\right)^{(n+1)(n+3)} r_k'^\gamma \left(-r_k'^\lambda \frac{\partial}{\partial r_k'^\lambda}\right)^n$$

3. Кинетическая энергия жидкости и силы, действующие на сферу.

По известному потенциалу поля скоростей можно рассчитать кинетическую энергию жидкости как интеграл по всему пространству, занимаемому жидкостью с плотностью ρ

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\nabla\Phi)^2 d^3r, \text{ или } T = -\frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \int \Phi u_k^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha dS_k \quad (3.1)$$

Здесь интегрирование происходит по поверхности каждой сферы. Знак минус появился вследствие того, что нормаль к поверхности S_k , ограничивающей объем жидкости, противоположна по направлению $\bar{\xi}_k$ — единичному вектору внешней нормали к поверхности k -й сферы.

Таким образом, получаем, что с точностью до членов порядка $(R/a)^6$

$$T = \frac{\pi\rho R^3}{3} \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 - \frac{3R^3}{2} \sum_{i,k=1}^N v_i^\alpha \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} u_k^\beta \right) \quad (3.2)$$

В монографии Г. Ламба [3] вычисляется с той же точностью кинетическая энергия жидкости, в которой две сферы произвольных радиусов движутся перпендикулярно и вдоль линии центров. Результаты согласуются с формулой (3.2).

Полная энергия всей системы совпадает с кинетической энергией жидкости, которую можно представить в виде интеграла по пространству, занимаемому жидкостью, или как полную энергию системы взаимодействующих сфер с присоединенными массами, движущимися в пустоте.

Заметим, что эти две интерпретации энергии системы аналогичны известному в электростатике описанию энергии системы через энергию поля и на основе теории дальнего действия.

Энергию системы сфер можно трактовать как сумму их кинетической энергии и энергии взаимодействия. Однако подразделение энергии на кинетическую и потенциальную также не является однозначным. Можно считать, что первая сумма в (3.2) описывает кинетическую энергию сфер, движущихся со скоростями u_k с присоединенными массами, равными половине массы жидкости в объеме пузыря. Тогда энергия взаимодействия может рассматриваться как сумма диполь-дипольных взаимодействий между парами сфер, движущихся со скоростями u_i и u_k , из которых одна обладает тем же дипольным моментом, что и изолированная сфера, движущаяся со скоростью u_k в неограниченной среде, а другая — как изолированная сфера, движущаяся с эффективной скоростью v_i .

Можно было бы включить в кинетическую энергию те члены из второй суммы в (3.2), которые содержат квадраты скоростей. При такой трактовке присоединенные массы будут зависеть от расположения всех пузырей в системе.

Используя вариационный метод, Брейквелл доказал [4], что система сфер в идеальной жидкости является лагранжевой. Поэтому, если на k -й пузырь действует внешняя сила \mathbf{F}_k^* , то система уравнений, описывающих движение сфер, должна иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_k} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{F}_k^* \quad (3.3)$$

Для отыскания силы, действующей на k -й пузырь \mathbf{F}_k , возникающей в результате гидродинамического взаимодействия пузырей, движущихся с заданными скоростями в потоке идеальной жидкости, предполагается, что внешняя сила \mathbf{F}_k^* точно уравновешивает силу \mathbf{F}_k . Отсюда следует, что

$$F_k^\alpha = \frac{\partial T}{\partial r_k^\alpha} - \sum_{n=1}^N u_n^\beta \frac{\partial}{\partial r_n^\beta} \frac{\partial T}{\partial u_k^\alpha} \quad (3.4)$$

В справедливости этого результата можно убедиться непосредственными вычислениями. Обозначим через $\Phi_0 = \Phi - u_k^\alpha r^\alpha$ потенциал поля скоростей в системе, связанной с k -м пузырем. Пользуясь теоремой Бернулли, можно написать

$$\mathbf{F}_k = \frac{\rho}{2} \int [(\nabla \Phi_0)^2 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}] \xi_k dS_k \quad (3.5)$$

В системе отсчета, связанной с k -м пузырем, полная энергия жидкости T_0 равна

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\rho}{2} \int (\nabla \Phi_0)^2 d^3r = T + \rho \sum_{n=1}^N \int \Phi u_k^\alpha \xi_n^\alpha dS_n + \text{const} = \\ &= -T - \rho \sum_{n=1}^N \int \Phi u_{nk}^\alpha \xi_n^\alpha dS_n + \text{const} \quad (u_{nk}^\alpha = u_n^\alpha - u_k^\alpha) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Члены, не зависящие от координат центров пузырей, включены в const. Из (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r_k^\alpha} &= -\frac{\partial T_0}{\partial r_k^\alpha} - \rho \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial r_k^\alpha} \int \Phi u_{nk}^\beta \xi_n^\beta dS_n = \frac{\rho}{2} \int (\nabla \Phi_0)^2 \xi_k^\alpha dS_k - \\ &- \rho \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial r^\beta} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r_k^\alpha \partial r^\beta} d^3r - \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^N \int \frac{\partial \Phi}{\partial r_k^\alpha} u_{nk}^\beta \xi_k^\beta dS_n = \frac{\rho}{2} \int (\nabla \Phi_0)^2 \xi_k^\alpha dS_k \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь, воспользовавшись (3.2), можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \xi_k^\alpha dS_k + \sum_{n=1}^N u_n^\beta \frac{\partial}{\partial r_n^\beta} \frac{\partial T}{\partial u_k^\alpha} &= \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^N u_{nk}^\beta \frac{\partial}{\partial r_n^\beta} \int \Phi \xi_k^\alpha dS_k - \\ - \pi \rho R^6 \sum_{n,m=1}^N u_n^\beta \frac{\partial}{\partial r_n^\beta} v_m^\gamma \Lambda_{mk}^{\gamma\alpha} &= -\pi \rho R^6 \sum_{n,m=1}^N u_k^\beta \frac{\partial}{\partial r_n^\beta} v_m^\gamma \Lambda_{mk}^{\gamma\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Равенства (3.7) и (3.8) подтверждают соотношение (3.4), позволяющее рассчитать \mathbf{F}_k при известной кинетической энергии системы. Таким образом, приходим к следующему результату:

$$F_k^\alpha = \pi \rho R^6 \left(\sum_{i=1}^N v_i^\beta \frac{\partial \Lambda_{ik}^{\beta\gamma}}{\partial r_{ik}^\alpha} v_k^\gamma + \sum_{i,j=1}^N u_i^\beta \frac{\partial v_j^\gamma \Lambda_{jk}^{\gamma\alpha}}{\partial r_i^\beta} \right) \quad (3.9)$$

Первый член разложения (3.9) в ряд по степеням $(R/a)^3$ имеет вид

$$F_k^\alpha = \pi \rho R^6 \sum_{i=1}^N u_i^\beta \frac{\partial \Lambda_{ik}^{\beta\gamma}}{\partial r_{ik}^\alpha} u_i^\gamma \quad (3.10)$$

Этот результат согласуется с формулой Бьеркнесса [5] для силы взаимодействия двух сфер различных радиусов, движущихся с одинаковыми скоростями, и с выражением для силы, когда два шара движутся в направлении их центров с произвольными скоростями ([3], § 138).

Рассмотрим движение сфер с одинаковыми скоростями при условии, что расстояние между центрами сфер сравнимо с их размерами. Тогда, как следует из (3.9), сила парного взаимодействия между пузырями, движущимися со скоростями u , будет определяться формулой, аналогичной формуле Бьеркнесса с заменой фактических скоростей u на эффективные скорости v . В этом случае

$$F_k = \partial T / \partial r_k \quad (3.11)$$

Такой характер связи между силой, действующей на пузырь, и энергией системы в случае, когда пузыри движутся с одинаковыми скоростями, позволяет сделать вывод, что система стремится к состоянию, отвечающему максимуму полной энергии T , вычисляемой в системе отсчета, где жидкость покоится на бесконечности.

В жидкости малой вязкости на k -ю сферу, кроме силы F_k , действует сила трения Q_k , которая может быть рассчитана через величину скорости диссипации энергии.

$$Q_k = \frac{v_k}{v_k^2} \frac{d}{dt} T_k \quad (3.12)$$

где скорость диссипации энергии при обтекании k -й сферы определяется интегралом по поверхности k -й сферы

$$-\frac{d}{dt} T_k = -2\mu \int \xi_k^\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial r^\beta} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} dS_k \quad (3.13)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Воспользовавшись (2.10) и (2.11), результат можно записать в виде

$$-\frac{d}{dt} T_k = 12\mu R v_k^2 \quad (3.14)$$

Отсюда

$$Q_k = -12\mu R v_k \quad (3.15)$$

Таким образом, пузырь, движущийся относительно покоящейся на бесконечности жидкости со скоростью u_k при наличии системы пузырей, испытывает ту же силу сопротивления, что и изолированный пузырь, движущийся относительно среды с эффективной скоростью v_k .

Движение пузырей предполагается стационарным. Следовательно, сумма сил (включая архимедову), действующих на пузырь, должна равняться нулю

$$F_k + Q_k - \frac{4\pi}{3} \rho R^3 g = 0 \quad (3.16)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Это уравнение позволяет рассчитать скорость подъема пузыря в зависимости от его размеров и расположения других пузырей.

4. Метод Лоренца. Расчет сумм, входящий в выражение для эффективной скорости, может быть выполнен по методу Лоренца [6], если ввести следующие дополнительные предположения: а) скорости подъема всех пузырей в системе одинаковы по величине и направлению; б) среднее расстояние между центрами пузырей постоянно для всей системы, т. е. средняя концентрация пузырей в системе $c = \frac{4}{3}\pi R^3/a^3$ постоянна; в) система имеет форму эллипсоида или форму, являющуюся предельным случаем эллипсоида (сфера, тонкая пластинка, длинный круговой цилиндр).

Если центры пузырей находятся в узлах кубической решетки, то

$$R^3 \sum_{i=1}^N u_i^\alpha \Lambda_{ik}^{\alpha\beta} = (1 - 3n_z) c u_k^\beta \quad (4.1)$$

где n_z — коэффициент деполаризации эллипсоида (предполагается, что ось z направлена вдоль вектора \mathbf{u}_k). Известно, что для вытянутого вдоль оси z сфероида с полуосями $l_x = l_y < l_z$

$$n_z = \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon^3} \left(\ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - 2\varepsilon \right) \leq \frac{1}{3} \quad \left(\varepsilon^2 = 1 - \frac{l_x^2}{l_z^2} \right) \quad (4.2)$$

для сплюснутого вдоль оси z сфероида с полуосями $l_x = l_y > l_z$

$$n_z = \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} (\varepsilon - \arctg \varepsilon) \geq \frac{1}{3} \quad \left(\varepsilon^2 = \frac{l_x^2}{l_z^2} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Результат (4.1) остается справедливым, как показали Кирквуд и Ивон (см., например, [7]), и для пространственно однородного и изотропного распределения диполей, как первый член разложения в ряд по степеням концентрации.

5. Система пузырей в неограниченной жидкости. При выполнении условий, перечисленных в предыдущем разделе, сила гидродинамического взаимодействия пузырей \mathbf{F}_k , выражаемая формулой (3.9), оказывается равной нулю для любого пузыря, кроме расположенных вблизи поверхности системы. Для пузырей, находящихся в объеме системы, диссипативная сила \mathbf{Q}_k уравнивается архимедовой, а поэтому эффективная скорость движения пузыря \mathbf{v}_k будет совпадать со скоростью подъема изолированного пузыря \mathbf{u}_0 .

Соотношение (3.16) и метод Лоренца позволяют выразить скорость подъема k -го пузыря, принадлежащего системе пузырей, через \mathbf{u}_0

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 [1 + \frac{1}{2} (1 - 3n_z)c] \quad (5.1)$$

Заметим, что для пузырей умеренных размеров скорость подъема зависит от радиуса следующим образом [2]:

$$\mathbf{u}_0 = -\frac{1}{9} R^2 \mathbf{g} / \nu \quad (5.2)$$

Таким образом, если система пузырей имеет форму длинного кругового цилиндра ($n_z = 0$), то при той же концентрации пузырей она будет подниматься быстрее, чем в случае, когда система имеет форму шара ($n_z = 1/3$) или тонкой пластины ($n_z = 1$).

Для случая подъема системы пузырей, имеющей форму тонкой пластины, результат (5.1) можно пояснить следующим образом: по мере подъема пузырей со скоростью \mathbf{u}_k их место занимает жидкость, что и приводит в области, занимаемой пузырями, к образованию нисходящего потока жидкости, движущейся со средней скоростью $-\mathbf{u}_k c / (1 - c)$. Относительно жидкости, движущейся со средней скоростью $-\mathbf{u}_k c / (1 - c)$, пузырь всплывает со скоростью \mathbf{u}_0 , т. е. относительно покоящейся на бесконечности жидкости пузырь всплывает со скоростью $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 (1 - c)$, что согласуется с частным случаем формулы (5.1).

Представляется очевидным, что справедливость этого частного случая не связана с допущениями о том, что пузыри имеют умеренные размеры,

сферическую форму, что пузыри находятся на расстояниях, больших, по сравнению с их размерами. Существенно лишь то, что усредненное движение жидкости оказалось одномерным, а газосодержание — постоянным в области, занимаемой пузырями.

В работе [1] расчет, выполненный с использованием модели ячеек, приводит к следующему результату:

$$u_k = u_0 \frac{(1 - 3c/4\pi)^2}{1 - (3c/4\pi)^{2/3}} \quad (5.3)$$

Этот результат не учитывает зависимости скорости подъема системы пузырей от формы, занимаемой системой. В области малых концентраций (5.3) качественно согласуется с (5.2) лишь при $n_z > 1/3$.

Поскольку эффективная скорость v_k оказалась совпадающей со скоростью подъема одиночного изолированного пузыря u_0 , то из формулы (3.12) следует, что скорость диссипации энергии при движении пузыря в системе такая же, как и при движении одиночного пузыря. Таким образом, с точки зрения принципа минимума скорости диссипации энергии [4], нельзя сделать каких-либо выводов о конфигурации системы.

Диссипируемая кинетическая энергия жидкости при стационарном движении полностью компенсируется работой внешней (архимедовой) силы. Поэтому кинетическая энергия жидкости, совпадающая с ее полной энергией, оказывается не зависящей от времени и равной, с учетом (3.2), (4.1) и (5.1),

$$T = T_0 (1 - 1/2\eta c - 1/2\eta^2 c^2) \quad (5.4)$$

$(T_0 = 1/3 \rho \pi R^3 N u_0^2, \eta = 1 - 3n_z)$

На фигуре на плоскости с координатами n_z, c сплошными линиями изображено семейство $T/T_0 = \text{const}$, а семейство ортогональных кривых — пунктирными.

Энергия жидкости достигает максимума вдоль кривой $c(n_z)$ в области $n_z > 1/2$, определяемой соотношением

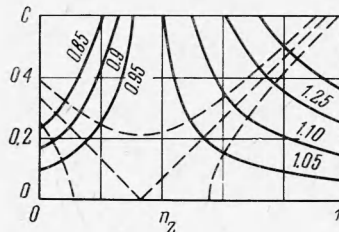
$$c(n_z) = \frac{1}{2(3n_z - 1)} \quad (5.5)$$

Деформация системы осуществляется вдоль направления ∇T , т. е. вдоль соответствующей пунктирной кривой, проходящей через начальное состояние в сторону увеличения энергии, как об этом уже говорилось при обсуждении формулы (3.11).

При этом, если начальное состояние системы попадает на плоскости n_z, c в область $c < 1/3 - n_z$, т. е. система представляет вытянутый вдоль направления своего движения сфероид с малой концентрацией, то пузыри, входящие в систему, будут стремиться к разбеганию, а форма системы будет несколько приближаться к форме шара.

Если же начальное состояние лежит в области $1/3 - n_z < c < 1/3$ (вытянутый сфероид при высокой концентрации пузырей), то система начинает разбегаться, деформируясь при этом к форме шара, а затем, достигнув шаровой формы, будет стремиться к состоянию с более высокой концентрацией, деформируясь при этом к форме сплюснутого сфероида. Деформация закончится, когда система окажется в состоянии, которое изобразится на фигуре точкой пересечения соответствующей пунктирной кривой с линией $c(n_z)$, отвечающей состоянию с наибольшей энергией.

Для начального состояния в области $n_z > 1/3$ при $c < c(n_z)$ система стремится к состоянию с более высокой концентрацией, а по форме — к более сплюсненному сфероиду; при $c > c(n_z)$ деформация системы про-



исходит к менее сплюсненному сфероиду, сопровождаясь некоторым уменьшением концентрации пузырей.

Столь различный характер деформации возникает из-за конкуренции при этом процессе изменения скорости движения системы и энергии диполь-дипольного взаимодействия.

Такие выводы о поведении системы справедливы, если при деформации системы распределение пузырей остается однородным и изотропным.

6. Учет конечных размеров области, занимаемой жидкостью. Рассмотрим движение пузырей в вертикальной колонне конечных размеров с жидкостью. До тех пор, пока размеры области, занимаемой пузырями, малы по сравнению с линейными размерами колонны, скорость подъема системы пузырей будет зависеть от формы системы и концентрации так, как это определяется выражением (5.1). Но если размеры области, занимаемой пузырями, сравнимы с размерами области, занимаемой жидкостью, то уже нельзя использовать соотношение (5.1), а потребуется решать уравнение (1.1) с условиями (1.2) и (1.3) и дополнительным условием обращения в нуль нормальной составляющей скорости движения жидкости на боковой поверхности колонны.

Наиболее просто получить решение в случае, когда выполнены следующие требования: 1) распределение пузырей в системе является однородным и изотропным; 2) поперечное сечение колонны представляет прямоугольник; 3) пузыри занимают область между двумя поперечными сечениями колонны.

Очевидно, чтобы удовлетворить уравнению Лапласа и всем граничным условиям, требуется при записи потенциала добавить к полю, создаваемому диполями, находящимися в колонне, поле изображений, являющихся диполями, расположенными с той же плотностью, что и пузыри в системе, вне колонны в области, занимаемой бесконечным слоем между поперечными сечениями колонны.

Таким образом, возникает задача о движении пузырей, занимающих область, имеющую форму тонкой пластины, в неограниченной жидкой среде. Поэтому, независимо от размеров колонны и толщины слоя, занимаемого пузырями, абсолютная скорость подъема пузырей, с одинаковой концентрацией заполняющих пространств между двумя поперечными сечениями колонны, будет равна

$$u_k = u_0 (1 - c) \quad (6.1)$$

Этот результат справедлив для цилиндрической колонны с любым поперечным сечением, поскольку важно, чтобы только усредненное движение жидкости оставалось вертикальным, а тогда (6.1) будет следствием рассуждений, приведенных при обсуждении формулы (5.1). Полная энергия системы равна в соответствии с (5.4)

$$T = T_0 (1 + c - 2c^2) \quad (6.2)$$

Эта функция имеет максимум при $c = 0.25$. Система должна стремиться к состоянию с такой концентрацией, если только в процессе деформации сохраняется однородность и изотропность распределения пузырей в системе.

7. Непрерывный поток пузырей. Особого рассмотрения требует случай подъема системы пузырей в вертикальной трубе с жидкостью, когда создается непрерывный поток пузырей в результате постоянной подачи воздуха в ее основание. При таком режиме средняя скорость жидкости в любом сечении колонны равна нулю, а поэтому абсолютная скорость подъема пузырей, обозначаемая через u_k^* , будет равна u_0 и не будет зависеть от концентрации пузырей в системе.

Дэвидсон и Харрисон [8] считают, что когда создается непрерывный поток воздуха через колонну, то абсолютная скорость подъема пузырей будет превышать скорость, с которой каждый отдельный пузырь поднимается в неподвижной жидкости. В принятых нами обозначениях их результат имеет вид

$$u_k^* = u_0 + \frac{G}{A} = \frac{u_0}{1-c} \quad \left(\frac{G}{A} = cu_k^* \right) \quad (7.1)$$

Здесь G/A — средняя скорость газа в свободном сечении колонны.

Формула (7.1) справедлива за времена, достаточно малые, когда пузыри не успевают еще дойти до верхней границы раздела фаз. Тогда, действительно, средняя скорость жидкости в сечении над пузырями равна G/A , и поскольку относительная скорость постоянна, отсюда и следует (7.2). Однако, если непрерывный поток пузырей в колонне создается более длительное время, то, поскольку средняя скорость жидкости в любом сечении колонны равна нулю, формула (7.2) окажется неправильной.

Никлин [9] указал на связь абсолютных скоростей подъема пузырей, создаваемых в результате непрерывного потока воздуха, и пузырей, занимающих пространство в жидкости между двумя поперечными сечениями

$$u_k = u_k^* - G/A \quad (7.2)$$

что, очевидно, согласуется с результатами настоящей работы.

Полная энергия системы при непрерывном пропускании газа через колонну будет равна

$$T^* = T_0 (1 + 2c) \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что при соблюдении однородности и изотропности распределения пузырей система стремится к состоянию с более высокой концентрацией, что может привести к сужению поперечных размеров области, занимаемой пузырями, по мере их подъема. Неоднородность в газосодержании может привести к возникновению конвективного движения в системе.

Эксперименты [10, 11] явно указывают на рост скорости подъема пузырей с увеличением газосодержания. Причиной тому может быть усиление коагуляции пузырей, что приводит к увеличению среднего размера пузырей, а следовательно — и скорости подъема; конвективное движение жидкости в колонне; образование «роев», т. е. скоплений пузырей, всплывающих приблизительно как единое твердое тело, со скоростью, значительно превосходящей скорость отдельного изолированного пузыря. Жидкость при этом будет обтекать не каждый пузырь в отдельности, а весь «рой».

Попытки объяснить экспериментальные результаты [10, 11] на основании формулы (7.1), не имеющей отношения к делу, несостоятельны.

Поступила 13 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Marucci G. Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. *Industr. and Engng. Chem.* 1965, May, p. 224.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
4. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. иностр. лит., 1963.
5. Vjerkness V. *Physicalische Hydrodynamic. S.*, 1933.
6. Лоренц Г. А. Теория электронов. Изд. иностр. лит., 1934.
7. Браун В. Диэлектрики. Изд. иностр. лит., 1961.
8. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц. 1965.
9. Nicklin D. J. Two-phase bubble flow. *Chem. Engng. Sci.*, 1962, vol. 17, p. 693.
10. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидравлика газо-жидкостных систем. Госэнергоиздат, 1958.
11. Nicklin D. J., Wilkes J. O., Davidson J. E. Two-phase flow in vertical tube. *Trans. Instn. Chem. Engrs.* 1962, vol. 40, p. 61.