УДК 539.3

М. И. Карякин

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ С КЛИНОВОЙ ДИСКЛИНАЦИЕЙ

Для физики твердого тела оказалось важным изучение дислокаций и дисклинаций не только в трехмерных телах, но и в двумерных — пластинках, пленках и т. п. Методы анализа задач такого рода и конкретные решения приведены, например, в [1—3]. Один из этих дефектов возникает при рассмотрении введенной в [4] клиновой диспланации — напряженно-деформированного состояния цилиндра, который набирается из большого числа тонких дисков, содержащих дисклинации. При этом диски не остаются плоскими, а превращаются либо в конусообразные воронки, либо в сложно изогнутые поверхности седловой конфигурации, которые были обнаружены при численном моделировании дисклинаций методами молекулярной динамики [4]. Сказанным определяется интерес к изучению подобных моделей методами теории упругости. Линейная теория дислокаций в оболочках освещена в [5], нелинейные ее аспекты — в [6].

В настоящей работе изучается задача о равновесии и устойчивости нелинейно-упругой пластинки с клиновой дисклинацией. Анализ основывается на нелинейных уравнениях теории пластин и оболочек типа Лява, сформулированных в [7]. В рамках безмоментной теории установлено, что в случае положительной дисклинации возможны две осесимметричные формы равновесия: равновесная поверхность плоская или коническая. Найдена неосесимметричная неплоская форма равновесия безмоментной пластинки с отрицательной дисклинацией. Уравнения равновесия нелинейной моментной теории при всех значениях параметра дисклинации допускают «плоское» решение (прогиб тождественно равен нулю), совпадающее с решением безмоментной теории. Проведено численное исследование его устойчивости.

1. Рассматривается пластинка толщины h, имеющая форму кольца $c \leqslant r \leqslant d$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-h/2 \leqslant \zeta \leqslant h/2$ (r, φ, ζ — цилиндрические координаты). Примем гипотезы Кирхгофа — Лява и далее под пластинкой будем понимать ее срединную поверхность. Образование в пластинке дисклинации зададим соотношениями

$$R = R(r),\ \Phi = \varkappa\varphi,\ Z = Z(r). \tag{1.1}$$

Относящиеся к деформированному состоянию величины R, Φ и Z описывают соответственно расстояние от оси до точки срединной поверхности пластинки, полярный угол и вертикальное смещение. Случаю $\varkappa < 1$ (отрицательная дисклинация) отвечает деформация кольца, возникающая после разрезания его вдоль линии $\varphi = 0$ и введения в разрез клина с углом раствора $2\pi(1-\varkappa)$, а $\varkappa > 1$ (положительная дисклинация)— удаление из кольца сектора $2\pi\varkappa^{-1} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ с последующим соединением краев. Согласно (1.1), срединная поверхность пластинки после деформации представляет собой поверхность вращения.

Уравнения равновесия пластинки при отсутствии поверхностной нагрузки имеют вид [7]

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = 0,\ \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla'\mathbf{N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla'\mathbf{r}\mathbf{N}, \tag{1.2}$$

где $\nabla = \mathbf{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ — двумерный набла-оператор недеформированного состояния; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\zeta$ — орты цилиндрических координат в этом состоянии ($\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{n}$ — нормаль к недеформированной поверхности пластинки); $\boldsymbol{\sigma} = \partial W/\partial\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$ — тензор мембранных усилий (типа Пиолы); $\boldsymbol{\mu} = -\partial W/\partial\mathbf{K} \cdot \nabla\mathbf{P}$ — тензор изгибающих моментов (типа Пиолы); $\mathbf{P} =$

$= R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z$ — радиус-вектор точки пластинки в деформированном состоянии; $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{e}_Z$ — орты цилиндрических координат этого состояния; $\mathbf{N}$ — нормаль к деформированной поверхности пластинки; $\mathbf{K} = -\nabla'\mathbf{N}\cdot(\nabla\mathbf{P})^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{U} = [\nabla\mathbf{P}\cdot(\nabla\mathbf{P})^{\mathrm{T}}]^{1/2}$; $\mathbf{A}$ — тензор поворота ($\nabla\mathbf{P} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}$): $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пластинки в недеформированном состоянии; ∇' — двумерный набла-оператор деформированного состояния. Функцию удельной потенциальной энергии деформации пластинки $W(\mathbf{U}, \mathbf{K})$ примем заданной в форме

$$W = \frac{1}{2}E_1[\nu\,\mathrm{tr}^2\boldsymbol{\varepsilon} + (1-\nu)\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}^2] + \frac{1}{2}E_2[\nu\,\mathrm{tr}^2\mathbf{K} + (1-\nu)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{K}^2]. \tag{1.3}$$

Здесь $E_1 = Eh/(1-\nu^2)$; $E_2 = Eh^3/12(1-\nu^2)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона материала пластинки; $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U} - \mathbf{g}$; $\mathbf{g} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ — двумерный единичный тензор. Выражение (1.3) совпадает с функцией энергии в линейной теории пластин, если в качестве $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{K}$ взять соответствующие линейные тензоры $(1/2)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})$ и $\nabla\nabla w$ (этим и объясняются приведенные выше названия констант E и ν).

Ненулевые компоненты тензоров усилий и моментов, отвечающих (1.1), запишем как

$$\sigma_{rR} = E_1\left[R' + \nu\frac{\varkappa R}{r}\frac{R'}{\psi} - (\nu+1)\frac{R'}{\psi}\right], \tag{1.4}$$

$$\sigma_{\varphi\Phi} = E_1[\varkappa R/r + \nu\psi - \nu - 1],\quad \sigma_{rZ} = \frac{Z'}{R'}\sigma_{rR};$$

$$\mu_{rR} = -\frac{E_2}{\psi}\left(\eta R' + \nu\frac{\varkappa^2}{r^2}R'Z'R\right), \tag{1.5}$$

$$\mu_{\varphi\Phi} = -\frac{E_2}{\psi}\left(\frac{\varkappa^3}{r^3}R^2Z' + \nu\frac{\varkappa}{r}\eta R\right),\quad \mu_{rZ} = \frac{Z'}{R'}\mu_{rR},$$

где $\psi = \sqrt{R'^2 + Z'^2}$; $\eta = R'Z'' - Z'R''$; штрихом обозначено дифференцирование по переменной r.

Тензор $\mathbf{S}$ имеет следующее представление:

$$\mathbf{S} = S_{rR}(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + S_{rZ}(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_Z + S_{\varphi\Phi}(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.2), получаем систему уравнений равновесия:

$$S'_{rR} + (S_{rR} - \varkappa S_{\varphi\Phi})/r = 0; \tag{1.7}$$

$$S'_{rZ} + S_{rZ}/r = 0. \tag{1.8}$$

Считая края пластинки свободными, запишем граничные условия в форме [7]

$$S_{rR}(r) = 0,\ r = c, d; \tag{1.9}$$

$$S_{rZ}(r) = 0,\ r = c, d; \tag{1.10}$$

$$\mu_{rR}(r) = 0,\ r = c, d. \tag{1.11}$$

Из (1.8) с учетом (1.10) немедленно вытекает

$$S_{rZ}(r) \equiv 0. \tag{1.12}$$

Рассмотрим сначала безмоментный случай, для чего константу E_2 в (1.3) формально положим равной нулю. Тогда $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}$ и условие (1.12) принимает вид

$$Z'\left[1 + \frac{1}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}\left(\nu\varkappa\frac{R}{r} - \nu - 1\right)\right] = 0.$$

Возможны два варианта.

1. $Z' \equiv 0$. Учитывая это в выражениях (1.4) для σ_{rR} и $\sigma_{\varphi\Phi}$ и подставляя последние в (1.7) и (1.9), придем к краевой задаче для определения функции $R(r)$:

$$\begin{gathered} R'' + R'/r - \varkappa^2 R/r = (1-\varkappa)(1-\nu)/r, \\ R' + \nu\varkappa R/r = 1+\nu,\ r = c,\ d. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Решение ее представим как

$$R(r) = \frac{d}{1+\varkappa}\left[(1-\nu)C_1\rho^{\varkappa} + (1+\nu)C_2\rho^{-\varkappa} + (1+\nu)\rho\right], \tag{1.14}$$

где

$$C_1 = \frac{1-\rho_0^{\varkappa+1}}{1-\rho_0^{2\varkappa}};\ C_2 = \frac{\rho_0^{2\varkappa}-\rho_0^{\varkappa+1}}{1-\rho_0^{2\varkappa}};\ \rho = \frac{r}{d};\ \rho_0 = \frac{c}{d}.$$

В частности, в случае сплошного диска ($\rho_0 = 0$) соответствующие (1.14) главные напряжения (осредненные по толщине пластинки главные усилия), выражающиеся через тензор $\boldsymbol{\sigma}$ соотношениями [7] $\sigma_R = \mathbf{e}_R \cdot J^{-1}|(\nabla\mathbf{P})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_R$, $\sigma_\Phi = \mathbf{e}_\Phi \cdot J^{-1}(\nabla\mathbf{P})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\Phi$ ($J = \det(\nabla\mathbf{P} + \mathbf{nN})$), с учетом (1.4) принимают вид

$$\sigma_R = E_1\frac{(1-\nu^2)(\rho^{\varkappa-1}-1)}{(1-\nu)\rho^{\varkappa-1}+(1+\nu)},\ \sigma_\Phi = E_1\frac{(1-\nu^2)(\varkappa\rho^{\varkappa-1}-1)}{(1-\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1}+(1+\nu)}.$$

Можно проверить, что если в полученном «плоском» решении произвести известную замену постоянных, связанную с переходом от плоского напряженного состояния к плоской деформации ($\nu \to \nu/(1-\nu)$), то придем к найденному в [8] решению задачи о дисклинации в цилиндре из полулинейного материала. Аналогично [8] в случае сплошного диска главные напряжения не имеют сингулярности на оси дисклинации, в то время как в линейной теории у них есть логарифмическая особенность [3].

2. $1 + (\nu\varkappa R/r - \nu - 1)/\sqrt{R'^2 + Z'^2} \equiv 0$. В этом случае σ_{rR} тоже равно нулю, а следовательно, в силу (1.7) и $\sigma_{\varphi\Phi} \equiv 0$. Для определения функций $R(r)$ и $Z(r)$ получаем систему уравнений вида

$\sqrt{R'^2 + Z'^2} + \nu\varkappa R/r = 1+\nu,\ \nu\sqrt{R'^2 + Z'^2} + \varkappa R/r = 1+\nu$, откуда

$$R(r) = r/\varkappa,\ Z(r) = \sqrt{\varkappa^2-1}\ r/\varkappa + \mathrm{const}. \tag{1.15}$$

Найденное решение существует лишь для положительной дисклинации ($\varkappa > 1$). Соответствующая (1.15) форма пластинки представляет собой (усеченный) конус.

Интересной особенностью решения (1.15) является его «универсальность». Легко проверить, что в данном случае $\mathbf{U} = \mathbf{g}$, т. е. $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, а значит, тождественно равны нулю и усилия. Таким образом, для безмоментной оболочки из нелинейно-упругого материала любого типа уравнения равновесия будут удовлетворены тождественно.

2. Выше установлено, что при $\varkappa > 1$ у краевой задачи (1.7)—(1.10) в безмоментном приближении есть два решения. Можно показать, что оба они устойчивы относительно осесимметричных возмущений в том смысле, что близких к ним форм равновесия не существует, так как линеаризованные в окрестности каждого из них уравнения имеют лишь тривиальные решения. С энергетической точки зрения при любых значениях $\varkappa$, больших единицы, предпочтение следует отдать решению (1.15), поскольку при этом энергия деформации вообще равна нулю.

Более строгий и точный результат может быть получен путем анализа уравнений, основанных на моментной нелинейной теории пластин. Легко видеть, что данные уравнения также допускают «плоское» решение (прогиб тождественно равен нулю), совпадающее с решением безмоментной теории (1.15). Это следует из того, что при $Z' \equiv 0$ тензор моментов обращается в нуль. Для изучения устойчивости плоского решения отно-

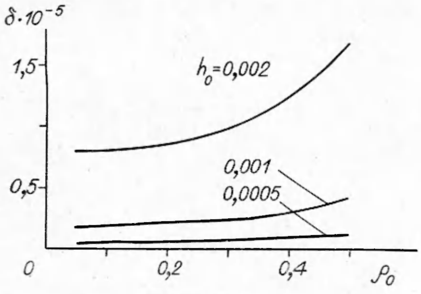

Рис. 1

сительно осесимметричных возмущений проведем линеаризацию уравнения равновесия в его окрестности, для чего положим

$$\mathbf{P} = R(r)\mathbf{e}_R + \varepsilon\mathbf{w},\ \mathbf{w} = u(r)\mathbf{e}_R + w(r)\mathbf{e}_Z, \tag{2.1}$$

где $R(r)$ определяется формулой (1.14). Подставляя (2.1) в (1.4), (1.5), а полученные выражения в (1.7), (1.12) и удерживая величины первого по ε порядка, придем к системе уравнений

$$v' = -\frac{1}{R'}\left(\nu\frac{\varkappa^2}{r^2}R - R''\right)v - \frac{1}{R'}\mu, \tag{2.2}$$

$$\mu' = \left[\frac{\varkappa^4}{r^4}\frac{R^2}{R'}(\nu^2 - 1) - l\left(R' + \nu\frac{\varkappa R}{r} - \nu - 1\right)\right]v + \frac{1}{r}\left(\nu\frac{\varkappa^2}{r^2}\frac{R}{R'} - 1\right)\mu$$

($v = w'$, $\mu = \mu_{rR}/E_2$, $l = E_1/E_2$). Краевыми условиями для нее являются соотношения (1.11).

Вторая краевая задача (для определения функции $u(r)$) в рассматриваемом осесимметричном случае будет линеаризованным вариантом линейной краевой задачи (1.14), т. е. имеет единственное решение.

Критические значения параметра дисклинации $\varkappa$ определяются появлением нетривиальных решений краевой задачи (2.2), (1.11). Расчеты показали, что при $0 < \varkappa < 1$ таких нетривиальных решений не существует, т. е. пластинка не теряет устойчивость осесимметричным образом. График зависимости критического значения параметра $\delta = \varkappa - 1$ от радиуса отверстия кольца ($\rho_0 = c/d$) для разных толщин ($h_0 = h/d$) при $\varkappa > 1$ приведен на рис. 1. Отметим, что с большой степенью точности можно δ считать пропорциональным h_0^2. Моды потери устойчивости представляют собой поверхности, близкие к коническим.

Для анализа неосесимметричных форм потери устойчивости следует полагать $u = u(r, \varphi)$, $w = w(r, \varphi)$. Ограничиваясь случаем изгибной потери устойчивости, считаем $u \equiv 0$. Линеаризованные величины будем обозначать точкой:

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{S}(\mathbf{P} + \varepsilon\mathbf{w})|_{\varepsilon=0},\ \mathbf{w} = w(r, \varphi)\mathbf{e}_Z.$$

Вычисления дают

$$\dot{\mathbf{S}} = S_1(r, \varphi)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_Z + S_2(r, \varphi)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_Z, \tag{2.3}$$

где

$$S_1 = \sigma_{rR}\frac{w'}{R'} + \frac{1}{R'}\left(\dot{\mu}_{rR}' + \frac{1}{r}\dot{\mu}_{rR} - \frac{\varkappa}{r}\dot{\mu}_{\varphi\Phi} + \frac{1}{r}\dot{\mu}_{\varphi R,\varphi}\right); \tag{2.4}$$

$$S_2 = \sigma_{\varphi\Phi}\frac{w_{,\varphi}}{\varkappa R} + \frac{r}{\varkappa R}\left(\dot{\mu}_{r\Phi}' + \frac{1}{r}\dot{\mu}_{r\Phi} + \frac{\varkappa}{r}\dot{\mu}_{\varphi R} + \frac{1}{r}\dot{\mu}_{\varphi\Phi,\varphi}\right);$$

$$\dot{\mu}_{rR} = -E_2\left[R'w'' + \left(\nu\frac{\varkappa^2}{r^2}R - R''\right)w' + \nu\frac{R'^2}{r^2}w_{,\varphi\varphi}\right];$$

$$\dot{\mu}_{\varphi\Phi} = -E_2\left[\nu\frac{\varkappa R}{r}w'' + \frac{\varkappa R}{rR'}\left(\frac{\varkappa^2}{r^2}R - \nu R''\right)w' + \frac{\varkappa R}{r^3}w_{,\varphi\varphi}\right];$$

$$\dot{\mu}_{r\Phi} = -E_2(1 - \nu)\frac{\varkappa}{r^2}\left(Rw'_{,\varphi} - R'w_{,\varphi}\right);\ \dot{\mu}_{\varphi R} = \frac{rR'}{\varkappa R}\dot{\mu}_{r\Phi}.$$

В (2.4) использованы обозначения $f' = \partial f/\partial r$, $f_{,\varphi} = \partial f/\partial\varphi$. Величины σ_{rR}, $\sigma_{\varphi\Phi}$ и R относятся к «плоскому» напряженному состоянию, устойчивость которого исследуется. Выражению (2.3) соответствует уравнение равновесия

$$S_1' + S_1/r + S_{2,\varphi}/r = 0, \tag{2.5}$$

которое с помощью (2.4) может быть записано в виде системы четырех уравнений относительно функций w, $v = w'$, $\dot{\mu}_{rR}$ и S_1:

$$w' = v,\quad v' = -\frac{\nu}{r^2}w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{R'}\left(R'' - \frac{\nu\varkappa^2}{r^2}R\right)v - \frac{1}{R'}E_2^{-1}\dot{\mu}_{rR}, \tag{2.6}$$

$$\dot{\mu}_{rR}' = \left[(\nu^2-1)\frac{\varkappa^2}{r^2}R - (1-\nu)\frac{R'^2}{Rr^2}\right]E_2 w_{,\varphi\varphi} + \left[(\nu^2-1)E_2\frac{\varkappa^4}{r^4}\frac{R^2}{R'} - \sigma_{rR}\right]v +$$

$$+ E_2(1-\nu)\frac{R'}{r^2}v_{,\varphi\varphi} + \left(\frac{\nu\varkappa^2 R}{r^2R'} - \frac{1}{r}\right)\dot{\mu}_{rR} + R'S_1,$$

$$S_1' = \left[E_2(1-\nu)\frac{1}{Rr^2}\left(\frac{R'}{r} - R'' - \frac{R'^2}{R}\right) - \frac{\sigma_{\varphi\Phi}}{\varkappa rR}\right]w_{,\varphi\varphi} + E_2(1-\nu)\frac{1}{r^4}w_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} +$$

$$+ E_2(1-\nu)\frac{1}{Rr^2}\left[\left(R'' + \frac{\varkappa^2R}{r^2}\right)\frac{R}{R'} + R' - \frac{R}{r}\right]v_{,\varphi\varphi} - \frac{1}{R'r^2}\dot{\mu}_{rR,\varphi\varphi} - \frac{1}{r}S_1.$$

Граничные условия для свободной пластинки в неосесимметричном случае имеют вид [7]

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_{r\Phi}\frac{1}{\varkappa}\mathbf{N}\right) = 0,\quad \mu_{rR} = 0\quad (r = c, d)$$

($\partial/\partial s$ — касательная производная). После их линеаризации получаем

$$S_1 - E_2(1-\nu)\frac{1}{r^3}\left(w'_{,\varphi\varphi}R - w_{,\varphi\varphi}R'\right) = 0,\quad \dot{\mu}_{rR} = 0\quad (r = c, d). \tag{2.7}$$

Нетривиальные решения краевой задачи (2.6), (2.7) разыскиваем в форме

$$w(r,\varphi) = w_r(r)\sin(n\varkappa\varphi + \varphi_0). \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.6), (2.7), приходим к линейной однородной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Значения $\varkappa$, при которых она имеет нетривиальные решения, определяются численно. Расчеты, в частности, показали, что при $\varkappa > 1$ потеря устойчивости происходит осесимметричным образом: критические значения δ неосесимметричных форм ($n \geqslant 1$) на порядок выше. График зависимости δ от радиуса отверстия при $\varkappa < 1$ приведен на рис. 2. Неосесимметричная потеря устойчивости происходит здесь при $n = 2$.

Из сравнения графиков на рис. 1 и 2 видно, что дисклинации разных знаков практически одинаково влияют на устойчивость пластинки. Сравнение результатов с полученными в [9] данными об устойчивости цилиндра с клиновой дисклинацией показывает, что изгибная потеря устойчивости пластинки в рассмотренном диапазоне параметров происходит при значениях δ, на несколько порядков меньших, чем плоская потеря устойчивости цилиндра.

3. Как приведено выше, в рамках безмоментной теории равновесная поверхность для положительной дисклинации получается осесимметричным изометрическим преобразованием (изгибанием) недеформированной пластинки. Построим такое же преобразование в случае отрицательной дисклинации. Ясно, что в отличие от (1.1) оно уже не будет осесимметричным.

Рассмотрим преобразование вида $R = R(r,\varphi)$, $\Phi = \varkappa\varphi$, $Z = Z(r,\varphi)$. Условие его изометричности сводится к соотношению

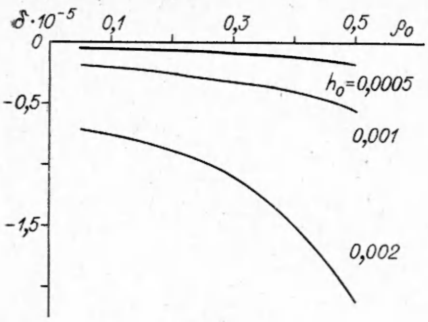

Рис. 2

$$(3.1) \qquad \mathbf{U} = \mathbf{g}.$$

Задача нахождения функций $R(r, \varphi)$ и $Z(r, \varphi)$, удовлетворяющих условию (3.1), не содержит размерных параметров; этим определяется следующий вид искомых функций:

$$(3.2) \qquad R(r, \varphi) = rf(\varphi),\ Z(r, \varphi) = rg(\varphi).$$

С учетом (3.2) соотношение (3.1) сводится к трем скалярным уравнениям для нахождения функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$:

$$(3.3) \qquad f^2 + g^2 = 1,\ f\frac{df}{d\varphi} + g\frac{dg}{d\varphi} = 0,\ \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \varkappa^2 f^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 = 1.$$

Второе из уравнений (3.3) непосредственно вытекает из первого, поэтому оно может быть отброшено; выражая далее из первого уравнения $g(\varphi)$ и подставляя полученное в третье, придем к уравнению

$$(df/d\varphi)^2 = (1 - f^2)(1 - \varkappa^2 f^2),$$

которое имеет решения:

$f^2 \equiv 1$ — постороннее решение, не удовлетворяющее системе (3.3);

$f^2 \equiv \varkappa^{-2}$ — решение, описывающее сворачивание пластинки в конус ($\varkappa > 1$) и рассмотренное выше;

$$(3.4) \qquad f = \mathrm{sn}\,(\varphi + C).$$

Модулем эллиптической функции sn в (3.4) является параметр дисклинации $\varkappa$ ($\varkappa < 1$). В этом случае $g^2(\varphi) = \mathrm{cn}^2\,(\varphi + C)$; C — постоянная, которая может быть найдена из условия непрерывности поверхности деформированной пластинки: величины R и Z должны быть непрерывными, 2π-периодическими функциями координаты Φ, т. е.

$$(3.5) \qquad R(r, 0) = R(r, 2\pi/\varkappa);$$

$$(3.6) \qquad Z(r, 0) = Z(r, 2\pi/\varkappa).$$

Рассмотрим случай малых отрицательных дисклинаций ($\varkappa \lesssim 1$). Малость величины $1 - \varkappa$ понимается в том смысле, что период функции $\mathrm{sn}\,\varphi$ с модулем $\varkappa$ будет больше $4\pi/\varkappa$:

$$(3.7, \qquad K(\varkappa) > \pi/\varkappa$$

($K(\varkappa)$— полный эллиптический интеграл первого рода [10]). Требованию (3.7) соответствует интервал изменения $\varkappa$ ($\varkappa \in (0{,}9858;\ 1)$). При этом для константы C в (3.4) из условия (3.5) получаем $\mathrm{sn}\,C = \mathrm{sn}\,(C + 2\pi/\varkappa)$, откуда $C = K - \pi/\varkappa$.

Требование (3.7) служит условием того, что на участке $[0,\ 2\pi/\varkappa]$ функция $f(\varphi)$ (а значит, и функция $R(r, \varphi)$) будет больше нуля. Соотношение (3.6) может быть выполнено, если в качестве $g(\varphi)$ выбрать функцию $g(\varphi) = |\mathrm{cn}\,(\varphi + C)|$, непрерывную и принимающую на концах отрезка $[0,\ 2\pi/\varkappa]$ одинаковые значения и удовлетворяющую системе (3.3) везде, за исключением точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/\varkappa$, где производная $g(\varphi)$ терпит разрыв.

Соответствующая преобразованию (3.2) поверхность имеет два ребра (при $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$)— результат, часто встречающийся при анализе задач деформирования безмоментных оболочек на основе теории изгибания поверхностей [11]. Изображение этой поверхности при $\varkappa = 0{,}99$ приведено на рис. 3.

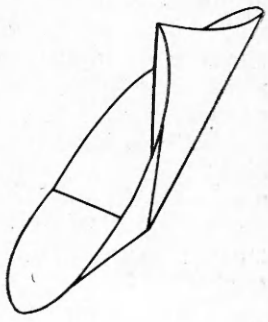

Рис. 3

Нужно отметить, что рассмотренная задача имеет бесконечно много решений, поскольку условия непрерывности поверхности в деформированном состоянии типа (3.5), (3.6) можно ставить не только при $\Phi = 0$ и 2π, но и при любом другом значении α (и $\alpha + 2\pi$). Таким образом, положение ребер на данной поверхности не является фиксированным, и в качестве таковых могут выступать любые две линии $\Phi = \alpha$ и $\Phi = \alpha + \pi$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Автор выражает глубокую благодарность Л. М. Зубову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Физика** кристаллов с дефектами/А. А. Предводителев, Н. А. Тяпунина, Г. М. Зиненкова, Г. В. Бушуева.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. **Владимиров В. И., Колесникова А. Л., Романова А. Е.** Клиновые дисклинации в упругой пластине // Физика металлов и металловедение.— 1985.— Т. 60, вып. 6.
3. **Владимиров В. И., Романов А. Е.** Дисклинации в кристаллах.— Л.: Наука, 1986.
4. **Лихачев В. А., Михайлин А. И., Шудегов В. Е.** Строение стекол // Моделирование в механике.— Новосибирск, 1987.— Т. 1(18), № 3.
5. **Черных К. Ф.** Линейная теория оболочек.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1964.— Ч. 2.
6. **Зубов Л. М.** Нелинейная теория изолированных дислокаций и дисклинаций в упругих оболочках // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 4.
7. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.— Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982.
8. **Зубов Л. М.** Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 1.
9. **Зеленин А. А., Зубов Л. М.** Устойчивость и послекритическое поведение упругого цилиндра с дисклинацией // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 1.
10. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
11. **Погорелов А. В.** Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1986.

г. Ростов н/Д *Поступила 12/IV 1991 г.*

УДК 532.593 + 620.192.46

В. Н. Аптуков, В. Ф. Каширин, Р. Т. Мурзакаев, Б. И. Усачев

МЕТОД МУАРА В ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Метод муара широко применяется в экспериментах по изучению процессов обработки металлов давлением и подробно изложен в литературе. Известны исследования квазистатического и нестационарного деформирования прозрачных тел с помощью метода муара [1, 2]. Использование этого метода для анализа динамических процессов в металлических плитах (в частности, откольного разрушения) впервые проведено авторами в [3]. Метод муара при этапном или однократном нагружении дает возможность качественно и количественно оценить напряженно-деформированное состояние плиты, что в сочетании с другими экспериментами и численным расчетом помогает осмыслить не только характер деформируемости, но и процессы разрушения при обработке металлов давлением.

В данной работе представлена система разрешающих уравнений для определения напряженно-деформированного состояния тела с помощью экспериментальной информации, полученной на основе метода муара при больших пластических деформациях и этапном нагружении. Приведен пример деформирования и разрушения алюминиевой плиты при взаимодействии с жестким цилиндрическим бойком.

1. При этапном нагружении упругопластического тела рассмотрим три основные конфигурации: исходную (естественную) с радиусом-вектором места ${}^0\mathbf{r} = {}^0a^i\mathbf{e}_i$, текущую (этап $n-1$) $\mathbf{r} = a^i\mathbf{e}_i$, текущую (этап n) $\mathbf{R} =$