

## ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В ПОТОКЕ

Г. Ю. Даутов (Новосибирск)

В электродуговых подогревателях (плазматронах) передача энергии электрического поля потока газа в основном происходит в положительном столбе дуги. Поэтому свойства потока и размеры подогревателя определяются свойствами положительного столба. В свою очередь, поток оказывает сильное влияние на поведение дуги. Взаимодействие дуги и потока описывается уравнениями механики, решение которых представляет значительные трудности. Однако, приняв ряд упрощающих предположений, можно получить решения, позволяющие оценить влияние внешних условий на характеристики подогревателя.

В данной работе зависимость электропроводности  $\sigma$  от температуры  $T$  аппроксимируется двумя прямыми линиями:

$$\sigma = 0 \quad \text{при } T < T_*, \quad \sigma = b(T - T_*) \quad \text{при } T \geq T_*$$

Такое приближение позволяет учитывать распределение плотности тока по сечению канала и изменение напряженности электрического поля  $E$  по длине канала.

Рассмотрим движение несжимаемого вязкого газа с постоянной теплопроводностью  $\kappa$  в цилиндрическом канале радиуса  $R$ . В направлении оси канала через электропроводный газ течет ток  $i$ . Передачей энергии вдоль канала за счет теплопроводности по сравнению с переносом энергии потоком будем пренебрегать. В таком предположении уравнение сохранения энергии и его граничные и начальные условия имеют вид: для электропроводной части потока

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + f T_1; \quad T_1(\zeta_1, z) = 0, \quad T_{1r}(0, z) = 0, \quad T_1(r, 0) = \alpha(r) \quad (1)$$

для неэлектропроводной части потока

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad T_2(\zeta_1, z) = 0, \quad T_2(1, z) = \beta(z), \quad T_2(r, 0) = \alpha(r) \quad (2)$$

Здесь

$$T_1 = T - T_*, \quad T_2 = T - T_*, \quad a^2 = \pi \kappa l / c Q, \quad f = a_2 E^2, \quad a_2 = \pi R^2 b l / c Q$$

При этом  $l$  — длина канала,  $c$  — теплоемкость газа,  $Q$  — массовый расход газа,  $r$  и  $z$  — безразмерные координаты,  $\zeta_1(z)$  — уравнение линии, разделяющей дугу от неэлектропроводной части потока. Уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial y}{\partial r} \right) \quad \left( y = T_1 \exp \left( - \int_0^z f dz \right) \right) \quad (3)$$

с граничными и начальными условиями

$$y(\zeta_1, z) = 0, \quad y_r(0, z) = 0, \quad y(r, 0) = \alpha(r)$$

Представим  $y(r, z)$  и  $T_2(r, z)$  в виде сумм функций

$$y(r, z) = \varphi_0(r, z) + \varphi_1(r, z), \quad T_2(r, z) = \varphi_2(r, z) + \varphi_3(r, z)$$

$$\varphi_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) \exp(-\mu_n^2 a^2 z), \quad \mu_n = \frac{i_n'}{\zeta_a}, \quad \zeta_a = \zeta_1(0) \quad (4)$$

$$\varphi_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 a^2 z) + \alpha(1)$$

Здесь  $J_\nu$  — функция Бесселя  $\nu$ -го порядка,  $\mu_n'$  и  $\lambda_n$  — корни уравнений  $J_0(\mu') = 0$  и  $J_0(\lambda) = 0$ ,  $A_n$  — коэффициенты Фурье при разложении функции  $\alpha(r)$  в ряд по функциям  $J_0(\mu_n r)$  в интервале  $0 \leq r \leq \zeta_a$ , а  $B_n$  — коэффициенты Фурье при разложении функции  $\alpha(r) - \alpha(1)$  в ряд по  $J_0(\lambda_n r)$  в интервале  $0 \leq r \leq 1$ . Функции  $\varphi_0(r, z)$  и  $\varphi_2(r, z)$  удовлетворяют уравнениям (2) и (3) и начальным условиям  $y(r, 0) = \alpha(r)$  и  $T_2(r, 0) = \alpha(r)$ . Если функции  $\varphi_1(r, z)$  и  $\varphi_3(r, z)$  определить как решения уравнений

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \right) \quad (5)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta_1, z) &= - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \zeta_1) \exp(-\mu_n^2 a^2 z), & \Phi_{1r}(0, z) &= 0 & (6) \\ \Phi_3(\zeta_1, z) &= - \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n \zeta_1) \exp(-\lambda_n^2 a^2 z) - \alpha(1), & \Phi_3(1, z) &= \beta(z) - \alpha(1) \\ & & \Phi_1(r, 0) &= \Phi_2(r, 0) = 0 \end{aligned}$$

то функции  $y(r, z)$  и  $T_2(r, z)$  будут решениями уравнений (2) и (3). Для определения  $\Phi_1(r, z)$  и  $\Phi_3(r, z)$  воспользуемся тепловым потенциалом двойного слоя

$$V(r, r_0, z) = \int_0^z \int_l \frac{\Psi(x)}{2\pi(z-x)} \frac{\partial}{\partial n} \exp\left[-\frac{r_1^2}{4a^2(z-x)}\right] dx dl \quad (7)$$

Здесь  $l$  — окружность радиуса  $r_0$ ;  $r_1$  — расстояние от переменной точки интегрирования с координатами  $r_0, \varphi_0$  до точки с координатами  $r, \varphi$ ;  $n$  — направление нормали в точке  $r_0, \varphi_0$ . В формуле (7) учтено, что  $\Psi(z)$  от  $\varphi$  не зависит. После интегрирования по  $\varphi_0$  и замены  $r_0$  на  $\zeta(x)$  для обобщенного потенциала двойного слоя получаем

$$U(r, z) = \int_0^z \frac{\Psi(x) \zeta(x)}{2a^2(z-x)^2} [rI_1(y) - \zeta(x) I_0(y)] \exp\left[-\frac{r^2 + \zeta^2(x)}{4a^2(z-x)}\right] dx \quad (8)$$

Здесь

$$I_\nu(y) = i^{-\nu} J_\nu(iy), \quad y_k = \zeta_k(x)r / 2a^2(z-x)$$

Функции  $\Phi_1(r, z)$  и  $\Phi_3(r, z)$  будем искать в виде

$$\Phi_1(r, z) = \int_0^z \frac{\Psi_1(x)}{2a^2(z-x)^2} \zeta_1(x) [rI_1(y_1) - \zeta_1(x) I_0(y_1)] \exp\left[-\frac{r^2 + \zeta_1^2(x)}{4a^2(z-x)}\right] dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(r, z) &= \int_0^z \frac{\Psi_2(x)}{2a^2(z-x)^2} \zeta_1(x) [rI_1(y_1) - \zeta_1(x) I_0(y_1)] \exp\left[-\frac{r^2 + \zeta_1^2(x)}{4a^2(z-x)}\right] dx + \\ &+ \int_0^z \frac{\Psi_3(x)}{2a^2(z-x)^2} [rI_1(y_2) - I_0(y_2)] \exp\left[-\frac{r^2 + 1}{4a^2(z-x)}\right] dx \end{aligned}$$

Используя условия (6) и свойства потенциала двойного слоя для  $\Psi_k(z)$ , получаем интегральные уравнения второго рода с сингулярными ядрами

$$\begin{aligned} -\Psi_1(z) + \int_0^z \frac{\Psi_1(x)}{2a^2(z-x)^2} \zeta_1^2(x) [I_1(y_1^1) - I_0(y_1^1)] \exp\left[-\frac{\zeta_1^2(x)}{2a^2(z-x)}\right] dx &= \Phi_1(\zeta_1, z) \\ \Psi_2(z) + \int_0^z \frac{\Psi_2(x)}{2a^2(z-x)^2} \zeta_1^2(x) [I_1(y_1^1) - I_0(y_1^1)] \exp\left[-\frac{\zeta_1^2(x)}{2a^2(z-x)}\right] dx &+ \\ + \int_0^z \frac{\Psi_3(x)}{2a^2(z-x)^2} [\zeta_1(x) I_1(y_2^1) - I_0(y_2^1)] \exp\left[-\frac{\zeta_1^2(x) + 1}{4a^2(z-x)}\right] dx &= \Phi_3(\zeta_1, z) \\ -\Psi_3(z) + \int_0^z \frac{\Psi_2(x)}{2a^2(z-x)^2} \zeta_1(x) [I_1(y_1^2) - \zeta_1(x) I_0(y_1^2)] + \exp\left[-\frac{1 + \zeta_1^2(x)}{4a^2(z-x)}\right] dx &+ \\ + \int_0^z \frac{\Psi_3(x)}{2a^2(z-x)^2} [I_1(y_2^2) - I_0(y_2^2)] \exp\left[-\frac{1}{2a^2(z-x)}\right] dx &= \Phi_3(1, z) \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь

$$y_k = \zeta_k(x) \zeta_\nu(x) / 2a^2(z-x), \quad \zeta_2(x) = 1$$

При известном законе изменения радиуса дуги  $\zeta_1(z)$  уравнения (10) могут быть решены методом последовательных приближений

Для определения  $\zeta_1(z)$  имеем условие равенства предельных значений производных температуры для двух областей

$$T_{1r}(\zeta_1 - 0, z) = T_{2r}(\zeta_1 + 0, z) \quad (11)$$

Условие постоянства силы тока по длине канала дает еще одно уравнение

$$2\pi b R^2 f^{1/2} \exp\left(\int_0^z f dz\right) \int_0^{\zeta_1(z)} [\varphi_1(r, z) + \varphi_0(r, z)] r dr = i \quad (12)$$

Начальное значение  $f$  вычисляется из уравнения (12) при  $z = 0$  и  $\varphi_1(r, z) = 0$ .

Для получения приближенного решения системы уравнений (10), (11) и (12) длину канала следует разбить на небольшие участки длиной  $\Delta z$ . Представляя значения  $f(z)$  и  $\zeta_1(z)$  в точке  $z_{i+1}$  в виде

$$f(z_{i+1}) = f(z_i) + c_1 \Delta z, \quad \zeta_1(z_{i+1}) = \zeta_1(z_i) + c_2 \Delta z$$

решение системы уравнений (10) методом последовательных приближений для различных значений  $c_2$ . Затем из уравнений (11) и (12) определяются  $c_1$  и  $c_2$  для  $z_{i+1}$ . Зная  $\zeta_1(z_{i+1})$  и  $f(z_{i+1})$ , вычисляются значения  $\zeta_1(z)$  и  $f(z)$  для  $z_{i+2}$ .

Рассмотрим случай  $\zeta_1(z) = 1$ ,  $\beta(z) = 0$  (весь канал заполнен электропроводным газом). Распределение температуры определяется формулой

$$T_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n z) \exp\left[\int_0^z a_2 f_1 - \mu_n^2 a_1 dz\right] \begin{pmatrix} f_1 = E^2 \\ a_1 = a^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Уравнение (12) после некоторых преобразований принимает вид

$$\frac{df_1}{dz} + 2a_2 f_1^2 - 2f_1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu_n J_1(\mu_n) a_1 \exp(-\mu_n^2 a_1 z) \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n} J_1(\mu_n) \exp(-\mu_n^2 a_1 z) \right]^{-1} = 0 \quad (14)$$

Уравнение (14) интегрируется численными методами. Подставляя значение  $f_1(z)$  в (13), можно определить распределение температуры по каналу.

Если  $A_1 = T_1(0, 0) = T_0$ ,  $A_n = 0$  при  $n > 1$ , для распределения температуры, падения потенциала  $V(z)$  и к.п.д. положительного столба  $\eta$  получаются простые формулы. В этом случае уравнение (14) имеет следующее решение:

$$f_1 = k [1 - (1 - M) \exp(-2a_2 k z)]^{-1} \quad (M = k / f_0, f_0 = f_1(0), k = \mu_1^2 \kappa / b R^2) \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что с ростом длины дуги или уменьшением расхода газа  $f_1$  стремится к пределу  $k$ . Следовательно,  $k^{1/2}$  равняется напряженности электрического поля в положительном столбе дуги в неподвижном газе. Можно показать, что и в более общем случае, когда не все  $A_n$  равны нулю при  $n > 1$ ,  $f_1$  стремится к этому же пределу. Для падения потенциала на длине  $lz$  имеем

$$V(z) = \int_0^z l f_1^{1/2} dz = lk^{1/2} \left\{ z + \frac{1}{a_2 k} \ln \frac{1 + [1 - (1 - M) \exp(-2a_2 k z)]^{1/2}}{1 + M^{1/2}} \right\} \quad (16)$$

Из уравнений (13) и (15) находим

$$T_1(r, z) = T_0 \left[ \frac{1 - (1 - M) \exp(-2a_2 k z)}{M} \right]^{1/2} J_0(\mu, r) \quad (17)$$

Уравнение (17) показывает, что с ростом длины канала распределение температуры по радиусу канала стремится к пределу

$$\lim T_1(r, z) = \frac{i J_0(\mu, r)}{2\pi R J_1(\mu_1) (b\kappa)^{1/2}} \quad \begin{pmatrix} l \rightarrow \infty \\ Q \rightarrow 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

И в том случае, когда не все  $A_n$  равны нулю, распределение температуры стремится к пределу (18). Так как с уменьшением расхода газа распределение температуры стремится к этому же пределу, можно утверждать, что с ростом длины дуги распределение температуры по радиусу канала стремится к распределению в неподвижном газе. Направление изменения температуры вдоль канала зависит от знака величины  $(1 - M)$ . При  $M < 1$  температура газа по мере движения вдоль канала растет, а при  $M > 1$  падает. Как показывает (15), в первом случае напряженность электрического поля с ростом  $z$  уменьшается. Следовательно, мощность единицы длины дуги уменьшается, а передача тепла к стенке канала растет.

В пределе наступает равенство  $f = k$  и мощность единицы длины положительного столба сравнивается с мощностью, отдаваемой потоком стенке канала. При  $M > 1$  мощ-

ность дуги недостаточна для поддержания температуры газа, с ростом  $z$  температура падает, а напряженность электрического поля растет. Этот случай может иметь место при последовательном соединении подогревателей. Отсюда видно, что  $M$  характеризует режим работы подогревателя. Величина  $M$  определяется равенством

$$M = \theta R^2 T_0^2 \kappa b / i^2, \quad \theta = 4\pi J_1^2(\mu_1)$$

Здесь  $\kappa$  и  $b$  характеризуют физические свойства газа и  $R$  определяет геометрический размер канала. Средняя температура  $\langle T_1 \rangle$  в сечении  $z = 1$  равна

$$\langle T_1 \rangle = 2 \int_0^1 T_1(r, 1) r dr = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1} T_0 \left[ \frac{1 - (1 - M) \exp(-2a_1 \mu_1^2)}{M} \right]^{1/2} \quad (19)$$

Величину  $\eta$  определим как отношение тепла, затраченного на повышение температуры газа за единицу времени, к мощности положительного столба. Из уравнений (16) и (18) находим

$$\eta = \xi \left[ \left( \frac{\gamma}{M} \right)^{1/2} - 1 \right] \left[ 1 + \frac{1}{\mu_1^2 a_1} \ln \frac{1 + \gamma^{1/2}}{1 + M^{1/2}} \right]^{-1} \quad (20)$$

Здесь

$$\xi = 2J_1(\mu_1) c T_0 Q R b^{1/2} / \mu_1^2 i \kappa^{1/2}, \quad \gamma = 1 - (1 - M) \exp(-2\mu_1^2 a_1)$$

Уравнения (16), (19) и (20) показывают, что падение потенциала, среднемассовая температура и к.п.д. положительного столба дуги зависят от радиуса и длины канала, свойств газа, секундного расхода и температуры газа в начальном сечении канала. На фиг. 1 приведены графики зависимостей  $\langle T_1 \rangle$ ,  $\eta$ ,  $V$  от длины канала, рассчитанные по формулам (16), (19) и (20). В расчете были приняты

$$c = 10^8 \text{ эрг } \text{г}^{-1} \text{ град}^{-1}, \quad \kappa = 5 \cdot 10^5 \text{ эрг } \cdot \text{сек}^{-1} \text{ град}^{-1} \text{ см}^{-1}, \quad b = 10^9 \text{ сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}, \\ T_0 = 2000^\circ \text{ К}, \quad R = 0.5 \text{ см}, \quad i = 10^{12} \text{ см}^{3/2} \text{ э}^{1/2} \text{ сек}^{-2}, \quad Q = 10 \text{ г сек}^{-1}$$

Покажем, что вольтамперная характеристика, определяемая формулой (14), является восходящей при всех значениях силы тока, если распределение температуры в начальном сечении остается постоянным. В данном случае уравнение (12) имеет вид

$$2\pi b R^2 f_1^{1/2} \exp\left(\int_0^z a_2 f_1 dz\right) S = i \quad (21)$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 J_0(\mu_n r) \exp(-\mu_n^2 a_1 z) r dr$$

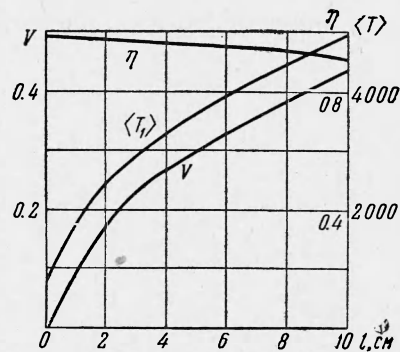
Величина  $S$  положительна и от  $i$  не зависит. Логарифмируя обе части уравнения (21) и дифференцируя по  $\ln i$ , находим

$$\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \ln i} + 2a_2 \int_0^z \frac{\partial f_1}{\partial \ln i} dz = 2 \quad (22)$$

Из (22) следует, что  $\partial f_1 / \partial \ln i|_{z=0} > 0$  и производные величин

$$\int_0^z \frac{\partial f_1}{\partial \ln i} dz, \quad \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \ln i} \quad (23)$$

по  $z$ , если они тождественно не равны нулю, имеют разные знаки. Если бы, начиная с какого-то значения  $z$ , величина  $\partial f_1 / \partial \ln i$  стала бы отрицательной, то производные величин (23) по  $z$  имели бы одинаковые знаки, что невозможно. Поэтому величина  $\partial f_1 / \partial \ln i$  положительна. Отсюда следует, что с ростом силы тока падение потенциала на дуге также растет. Таким образом, если в электродуговых подогревателях иметь такой сильно охлаждаемый участок, где, несмотря на рост силы тока, удается распределение температуры поддерживать постоянным, положительный столб дуги, следующий за этим участком, имеет восходящую вольтамперную характеристику. С другой стороны, такой факт говорит о том, что в длинных дугах, где основная доля падения потенциала относится к положительному столбу дуги, наличие нисходящего участка вольтамперной характеристики при малых токах связано с изменением распределения температуры в начале положительного столба благодаря приэлектродным процессам.



Фиг. 1. Зависимость  $V \text{ см}^{1/2} \text{ э}^{1/2} \text{ сек}^{-1}$ ,  $T_{\text{сер}} \text{ }^\circ\text{К}$  и  $\eta$  от длины положительного столба