

5. Wallick G. C., Savins J. G., Arterburn D. R. Tomita solution for the motion of a sphere in a power-law fluid.— «Phys. Fluids», 1962, vol. 5, N 3.
6. Wasserman M. L., Slattery J. C. Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-model fluid.— «AIChE J.», 1965, vol. 10, N 3.
7. Biardi G., Antolini G., Lesco F., Dente M. Applicazione numerica di un metodo o variazionale alla risoluzione di problema di moto puramente viscoso per fluidi nonnewtoniani.— «Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1969, (1970), vol. 47, N 3/4.
8. Ericksen J. L. Transversely isotropic fluids.— «Kolloid Z.», 1960, Bd 173, H. 2.
9. Rivlin R. S., Ericksen J. L. Stress-deformation relations for isotropic material.— «J. Ration. Mech. Anal.», 1955, vol. 4, N 3.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., «Наука», 1968, с. 55.

УДК 536.25

ТЕПЛОБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ СТРУКТУРНО-ВЯЗКИХ СРЕД В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

Т. Негматов, П. В. Цой

(Душанбе)

В различных отраслях современной техники широко используются так называемые структурно-вязкие среды, которые по своим физическим свойствам существенно отличаются от обычных ньютоновских жидкостей. К структурно-вязким средам относятся высокополимерные, коллоидные, сыпучие грубодисперсные и другие системы, для которых уже несправедлива гипотеза Ньютона о линейной зависимости между скоростью деформации и напряжением. Нелинейная зависимость между напряжением и градиентом скорости течения — наиболее характерная особенность неньютоновских жидкостей [1], причем эта зависимость чаще выражается формулой Оствальда

$$(1) \quad \tau = k(dw/dr)^m.$$

Для ламинарного гидродинамически стабилизированного течения аномальных жидкостей со степенным реологическим законом (1) поле скоростей в круглой трубе и плоскопараллельном канале запишется формулой

$$(2) \quad w(\xi)/\langle w \rangle = \{[(2 + \Gamma)m + 1]/(m + 1)\} [1 - \xi^{(m+1)/m}],$$

где $\Gamma = 0$, $\xi = (y/h)\text{sign } y$, $-h \leq y \leq h$ для щелевого канала; $\Gamma = 1$, $0 \leq \xi = r/R \leq 1$ для круглой трубы; $\langle w \rangle = w_{\text{ср}}$ — средняя скорость по сечению потока жидкости.

Предположим, что внешняя поверхность трубы (канала) омывается средой с температурой $T_c = \varphi(X)$ и теплообмен с внешней средой происходит по закону Ньютона. Полуограниченная труба имеет предвключенный участок гидродинамической стабилизации, и жидкость с температурой T_0 входит в активную зону трубы с развитой стабилизированной скоростью (2). Тогда для термически тонкой трубы (канала) определение температурного поля в потоке неньютоновской жидкости при общеиз-

вестных допущениях сводится к решению следующей краевой задачи [2]:

$$(3) \quad \{[(2 + \Gamma)m + 1]/(m + 1)\} [1 - \xi^{(m+1)/m}] \partial T / \partial X = \\ = \frac{1}{\xi^\Gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^\Gamma \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{q(\xi, X) R^2}{\lambda_{ж}};$$

$$(4) \quad T(\xi, X)|_{X \leq 0} = T_0, \quad \{\partial T / \partial \xi = \text{Bi}[\varphi(X) - \\ - T(\xi, X)]\}_{\xi=1},$$

где

$$X = (x/R) \cdot 1/\text{Pe}, \quad \text{Pe} = w_{cp} R/a, \quad \text{Bi} = \alpha R/\lambda_{ж}, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$\lambda_{ж}$, a — коэффициенты тепло- и температуропроводности жидкости; α — коэффициент теплообмена поверхности трубы с внешней средой. Таким образом, величина Bi отличается от общепринятого критерия Био, вводимого в теории теплопроводности.

Более точная математическая модель теоретического исследования внутренних задач конвективного теплообмена при течении теплоносителя в трубе сводится к определению температурных полей в потоке жидкости и по толщине стенки трубы, т. е. сводится к решениям так называемых сопряженных задач [3]. Задача (3), (4) как сопряженная ставится следующим образом. Необходимо найти распределение температуры $T_1(\xi, X)$ по толщине стенки трубы, удовлетворяющее уравнению теплопроводности и граничным условиям (4) на внешней поверхности, где $\text{Bi} = \alpha R/\lambda$, λ — коэффициент теплопроводности стенки трубы. На внутренней поверхности решение $T_1(\xi, X)$ должно удовлетворять условиям сопряжения с температурой в потоке жидкости $T_2(\xi, X)$

$$(5) \quad [T_1(\xi, X)]_{\xi=1+0} = [T_2(\xi, X)]_{\xi=1-0}, \quad (-\lambda \partial T_1 / \partial \xi)_{\xi=1+0} = (-\lambda_{ж} \partial T_2 / \partial \xi)_{\xi=1-0}.$$

Теоретические методы решения сопряженных задач связаны с преодолением сложных математических преобразований, а решения, известные в литературе, выражаются громоздкими функциональными зависимостями и мало пригодны для практических расчетов.

В классической постановке задач конвективного теплообмена, сформулированных еще Гретцем [2], обычно задают температурный режим на внутренней поверхности трубы и ограничиваются определением температурного поля в потоке жидкости. Решения таких задач пригодны для исследования теплообмена в трубах с термически тонкими стенками.

Путем введения неизвестной функции распределения температуры $\varphi(X)$ на границе жидкость — стенка

$$(T_1)_{\xi=1-0} = (T_2)_{\xi=1+0} = \varphi(X)$$

решение сопряженной задачи может быть сведено к решению задачи Гретца в потоке жидкости и задачи теплопроводности по толщине стенки трубы. Для нахождения $\varphi(X)$ получим интегральное уравнение из второго условия (5).

Следовательно, представление температуры в потоке жидкости ($T_2(\xi, X)$) и в стенке трубы $T_1(\xi, X)$ простыми и достаточно точными выражениями позволит найти эффективные решения сопряженных задач. Один из таких методов, предложенный в [4], будет применен для решения уравнения (3) при граничных условиях (4). Очевидно, при $\text{Bi} = \infty$ поставленная задача совпадает с обобщенной задачей типа Гретца.

Введем преобразование Лапласа

$$T^*(\xi, s) = \int_0^\infty T(\xi, X) \exp(-sX) dX,$$

тогда относительно изображения $\bar{T}^*(\xi, s)$ из (3), (4) получим

$$(6) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\xi^\Gamma \frac{dT^*}{d\xi} \right) - [sT^*(\xi, s) - T_0] w(\xi) \xi^\Gamma + \frac{q^*(\xi, s) R^2 \xi^\Gamma}{\lambda_{жк}} = 0;$$

$$(7) \quad \{dT^*/d\xi + \text{Bi}T^*(\xi, s)\}_{\xi=1} = \text{Bi}\varphi^*(s).$$

Определение точного решения граничной задачи (6), (7) и переход в область оригиналов представляют некоторые математические трудности, а окончательные результаты выражаются сложными аналитическими зависимостями. Поэтому определение температурного поля в простой форме даже ценою уменьшения их точности представляет практический интерес для инженерной теплофизики.

Для решения внутренних задач конвективного теплообмена довольно эффективным оказался метод ортогональной проекции невязки граничной задачи вида (6), (7) в конечномерном функциональном пространстве [4].

Предположим, что распределение внутренних источников тепловыделения стабилизируется вдоль потока жидкости, т. е.

$$(8) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} q(\xi, X) = \lim_{s \rightarrow 0} sq^*(\xi, s) = q(\xi).$$

Приближенное решение $\bar{T}^*(\xi, s)$, удовлетворяющее граничному условию (7), ищем в семействе линейной композиции вида

$$(9) \quad T_n^*(\xi, s) = \varphi^*(s) + \sum_{k=1}^n a_k^*(s) \psi_k(\xi, \text{Bi}),$$

где координатные функции $\psi_k(\xi, \text{Bi})$ линейно-независимые и удовлетворяют условиям

$$\{d\psi_k/d\xi + \text{Bi}\psi_k(\xi, \text{Bi})\}_{\xi=1} = 0.$$

Выбор первой координатной функции $\psi_1(\xi, \text{Bi})$ зависит от аналитического выражения предельной функции $q(\xi)$ в соотношении (8). Например, при $q(\xi) = q_v = \text{const}$ решение (9) приводится к виду

$$T_n^*(\xi, s) = \varphi^*(s) + a_1^*(s) \left(\frac{\text{Bi} + 2}{\text{Bi}} - \xi^2 \right) + \sum_{k=2}^n a_k^*(s) (1 - \xi^2)^k.$$

В случае $q(\xi) = q_v(1 - \xi^2)$, в том числе при

$$q(\xi, X) = q_v(1 - \xi^2)[1 - \exp(-\text{Pd}X)]$$

за первую координатную функцию для круглой трубы ($\Gamma = 1$) следует брать [4]

$$\psi_1(\xi, \text{Bi}) = \xi^4 - 4\xi^2 + (3\text{Bi} + 4)/\text{Bi}.$$

При таком подборе системы координатных функций приближенное решение (9) в области оригиналов с увеличением X стремится к точному решению.

Коэффициенты изображения $a_k^*(s)$ являются проекциями вектора $T_n^*(\xi, s) - \varphi^*(s)$ на координатные оси в конечномерном функциональном пространстве и находятся из требования ортогональности невязки уравнения (6) при $T^* = T_n^*$ ко всем координатным функциям $\psi_j(\xi)$:

$$(10) \quad \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\xi} \left(\xi^\Gamma \frac{dT_n^*}{d\xi} \right) - [sT_n^*(\xi, s) - T_0] w(\xi) \xi^\Gamma + \frac{q^* R^2 \xi^\Gamma}{\lambda_{жк}} \right\} \psi_j(\xi) d\xi = 0.$$

Система (10) после интегрирования по ξ приводится к виду

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n \{A_{jk} + B_{jk}s\} a_k^*(s) = [T_0 - s\varphi^*(s)] C_j + \frac{R^2}{\lambda_{ж}} D_j^*(s) \\ (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{где} \quad A_{jk} = A_{kj} = - \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \left(\xi^\Gamma \frac{d\psi_k}{d\xi} \right) \psi_j(\xi) d\xi > 0,$$

$$B_{jk} = B_{kj} = \int_0^1 w(\xi) \psi_j \psi_k \xi^\Gamma d\xi > 0,$$

$$C_j = \int_0^1 w(\xi) \psi_j(\xi) \xi^\Gamma d\xi, \quad D_j^*(s) = \int_0^1 q^*(\xi, s) \psi_j(\xi) \xi^\Gamma d\xi.$$

Определив коэффициенты $a_k^*(s)$ из системы (11) и переходя в область оригиналов по формуле

$$a_k(X) = \sum_{j=1}^n \int_0^X \varphi_1(\alpha) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{jk}(s_i)}{\Delta'(s_i)} \exp [s_i(X - \alpha)] \right\} d\alpha + \\ + \frac{R^2}{\lambda_{ж}} \sum_{j=1}^n \int_0^X D_j(\alpha) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{jk}(s_i)}{\Delta'(s_i)} \exp [s_i(X - \alpha)] \right\} d\alpha$$

в соотношении (9), получим решение исходной задачи. Здесь $s_i < 0$ — простые корни уравнения $\Delta(s) = 0$; $\Delta(s) = |A + sB|$ — основной определитель системы; Δ_{jk} — его алгебраическое дополнение;

$$\varphi_1(X) = T_0 - s\varphi^*(s); \quad D_j(X) = D_j^*(s).$$

Вычисление коэффициентов $a_k(X)$ в третьем и последующих приближениях ($n \geq 3$) эффективно реализуется с помощью ЭВМ. При этом для упрощения все расчеты необходимо проводить при фиксированных значениях реологического параметра m и критерия Bi . В частности, относительная избыточная температура в потоке жидкости внутри круглой трубы ($\Gamma = 1$) при $\varphi(X) = T_c = \text{const}$, $q(\xi, X) = 0$, $m = 1/3$ (псевдопластика) приводится к виду

$$(12) \quad \Theta(\xi, X, Bi) = \frac{T(\xi, X) - T_c}{T_0 - T_c} = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\xi, Bi) \exp [s_k(Bi) X].$$

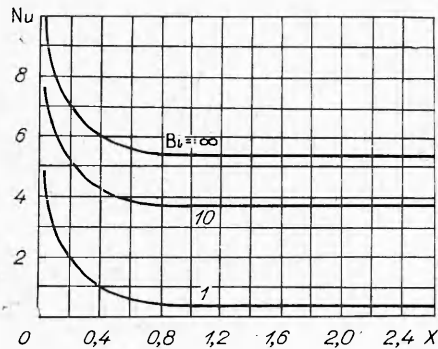
Графики изменения локального критерия Нуссельта

$$Nu = N(X) = -2(d\Theta/d\xi)_{\xi=1} / \langle \Theta \rangle,$$

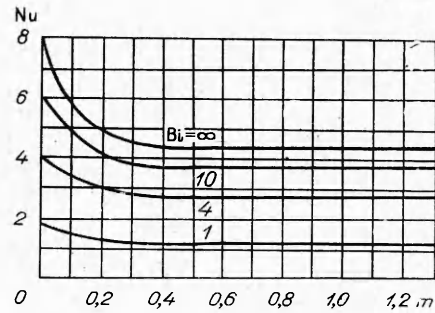
рассчитанные с помощью решения (12), приведены на фиг. 1.

Результаты расчета температуры в потоке жидкости и местного критерия Нуссельта для круглой трубы и щелевого канала ($\Gamma = 0; 1$) при $m = 1$, $q = 0$, $Bi = \infty$ дали хорошие совпадения с известными исследованиями других авторов.

Численная реализация системы (11) при конкретных условиях однозначности позволяет исследовать широкий круг задач конвективного теплообмена для аномальных сред с учетом заданных функций распределения внутренних источников тепловыделения, теплоты трения и раз-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

личных законов изменения температуры внешней среды. Ниже рассматриваются задачи теплообмена в круглой трубе при линейном подъеме температуры внешней среды вдоль потока и исследование температурного поля в щелевом канале, обусловленное диссипацией энергии.

В уравнениях (3), (4) положим

$$\Gamma = 1, q = 0, T_c = \varphi(X) = T_0 + \Delta T^* X, \Delta T^* = \Delta T \text{ Re } R.$$

Вначале найдем решение вдали от входа в трубу. Стабилизированное поле температуры ищем в виде

$$(13) \quad T(\xi, X, \text{Bi}) = T_0 + \Delta T^* X + T_1(\xi, \text{Bi}).$$

Подставим значение (13) в уравнение (3). Интегрируя полученное уравнение при нулевых однородных граничных условиях третьего рода, найдем $T_1(\xi, \text{Bi})$. Относительная избыточная температура вдали от входа в трубу запишется формулой

$$(14) \quad \Theta(\xi, X, \text{Bi}) = \frac{T - T_0}{\Delta T^*} = X - \frac{3m+1}{m+1} \left[\frac{(5m^2+6m+1)\text{Bi} + 2(m+1)(3m+1)}{4(3m+1)^2\text{Bi}} - \xi^2/4 + \left(\frac{m}{3m+1}\right)^2 \xi^{\frac{3m+1}{m}} \right].$$

Дифференцируя по ξ , получаем

$$-2(\partial\Theta/\partial\xi)_{\xi=1} = 1,$$

т. е. градиент температуры у стенки при достаточно большом X не зависит от m и Bi . Минимальный критерий Нуссельта, определенный с помощью решения (14), имеет вид

$$(15) \quad \text{Nu}_{\min} = \frac{-2(\partial\Theta/\partial\xi)_{\xi=1}}{\langle\Theta\rangle - \Theta_c} = \frac{8(5m+1)(3m+1)(m+1)\text{Bi}}{(31m^3+43m^2+13m+1)\text{Bi} + 4(m+1)(3m+1)(5m+1)}.$$

Если в (14), (15) положить $m = 1$, $\text{Bi} = \infty$, то для нормальной ньютоновской жидкости получим известные решения [2]:

$$\Theta(\xi, X) = X - (1/8)(3 - 4\xi^2 + \xi^4), \text{Nu}_{\min} = 48/11 = 4,364.$$

Изменение Nu_{\min} для $\text{Bi} = 1; 4; 10; \infty$ приводится на фиг. 2.

Предварительные исследования температурного поля на стабилизированном участке позволяют строить решения для всей зоны трубы по такой системе координатных функций, при которой для фиксированного n получаем наилучшее приближение.

Это решение находится в виде

$$(16) \quad T_n^*(\xi, s, \text{Bi}) = T_0/s + \Delta T^*/s^2 + \\ + a_1^*(s) \left[\frac{(5m^2 + 6m + 1) \text{Bi} + 2(m+1)(3m+1)(5m+1)}{4(3m+1)\text{Bi}} - \right. \\ \left. - \frac{\xi^2}{4} + \left(\frac{m}{3m+1} \right)^2 \xi \frac{3m+1}{m} \right] + \sum_{k=2}^n a_k^*(s) (1 - \xi^2)^k.$$

На основании произведенных расчетов и свойств преобразования Лапласа имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} s a_1^*(s) = \lim_{X \rightarrow \infty} a^1(X) = -\frac{3m+1}{m+1}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s a_k^*(s) = \lim_{X \rightarrow \infty} a_k(X) = 0, \quad k \geq 2.$$

Следовательно, приближенное решение (16) в области оригиналов с увеличением X стремится к точному асимптотическому решению (14).

Реализация решения (16) для ньютоновской жидкости ($m = 1$) при граничных условиях первого рода ($\text{Bi} = \infty$) приводится в работе [4]. При конечном Bi точность расчета улучшается и погрешность убывает с уменьшением критерия Bi .

Характерной особенностью течения ряда реологических сред, например расплавленных пластических масс, является сравнительно большая величина их эффективной вязкости. Это приводит к значительной диссипации механической энергии в тепловую при течении таких жидкостей в трубах и каналах.

Положим в уравнениях (3), (4) $q(\xi, X) R^2/\lambda_{\text{ж}} = \mu/\lambda \cdot (dw/d\xi)^2$, $\Gamma = 0$, $T_c = T_0 = \text{const}$, тогда решение граничной задачи (5), (6) при усредненном коэффициенте вязкости ($\mu = \text{const}$) находится в виде

$$T_n^*(\xi, X, \text{Bi}) = T_c/s + a_1^*(s) \left[\frac{m(\text{Bi} + 2) + 2}{m \text{Bi}} - \xi \frac{2(m+1)}{m} \right] + \\ + \sum_{k=2}^n (1 - \xi^2)^k a_k^*(s).$$

Для коэффициента $a_1^*(s)$, решая усеченную систему (11) первого порядка, получаем

$$a_1^*(s) = \frac{\mu w_{\text{ср}}^2}{2\lambda_{\text{ж}}} \frac{(2m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \left\{ \frac{1}{s} - \left[\frac{mM_1 \text{Bi}^2 + M_2 \text{Bi}}{(M_3 \text{Bi}^2 + M_4 \text{Bi} + M_1)(3m+4)} + s \right]^{-1} \right\},$$

где

$$M_1(m) = 1440m^6 + 7272m^5 + 15236m^4 + 16952m^3 + 10564m^2 + \\ + 3496m + 480;$$

$$M_2(m) = 4(m+1)^2(3m+4)(3m+2)(4m+3)(5m+4)(6m+5);$$

$$M_3(m) = 384m^6 + 1024m^5 + 1026m^4 + 462m^3 + 80m^2;$$

$$M_4(m) = 1440m^6 + 5592m^5 + 8652m^4 + 6680m^3 + 2580m^2 + 400m.$$

Относительная избыточная температура внутри плоскопараллельного канала в первом приближении равна

$$(17) \quad \Theta(\xi, X, \text{Bi}) = \frac{T - T_0}{\mu w_{\text{ср}}^2/\lambda_{\text{ж}}} = \frac{(2m+1)^2}{2(m+1)(m+2)} \left\{ i - \right. \\ \left. - \exp \left[- \frac{(mM_1 \text{Bi}^2 + M_2 \text{Bi}) X}{(M_3 \text{Bi}^2 + M_4 \text{Bi} + M_1)(3m+4)} \right] \right\} \left[\frac{m(\text{Bi} + 2) + 2}{m \text{Bi}} - \xi \frac{2(m+1)}{m} \right].$$

Вдали от входа в трубу, где $\exp \left[- \frac{(m \text{Bi}^2 M_1 + M_2 \text{Bi}) X}{(M_3 \text{Bi}^2 + M_4 \text{Bi} + M_1)(3m + 4)} \right] \approx 0$, выражение (17) совпадает с точным асимптотическим решением. В частности, при $\text{Bi} = \infty$ из (17) находим

$$T(\xi, X) = T_0 + \frac{3}{4} \frac{\mu w_{\text{ср}}^2}{\lambda_{\text{ж}}} [1 - \exp(-2,661X)] (1 - \xi^4)$$

и при $X \rightarrow \infty$ в пределе получим решение Шлихтинга [5]. Предложенный метод без усложнения находит решение при переменном коэффициенте вязкости, зависящем от ξ .

Метод совместного применения интегральных преобразований в ортогональной проекции к внутренним задачам конвективного теплообмена успешно реализуется при любом заданном аналитическом выражении стабилизированного профиля скорости $w(\xi)$. В тех случаях, когда информация о распределении скорости получена по экспериментальным данным или численным интегрированием уравнения гидродинамики, коэффициенты в системе (11) могут быть найдены приближенным интегрированием по дискретным точкам.

Авторами работы [6] предложены новые аналитические зависимости для относительной скорости структурно-вязкого потока жидкости в круглой трубе и плоской щели в виде

$$\frac{w(\xi)}{\langle w \rangle} = \frac{2}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Theta}{\varphi_0} \tau_{\text{ст}}} \frac{(1 - \xi^2) + \frac{2}{3} \frac{\Theta}{\varphi_0} \tau_{\text{ст}} (1 - \xi^3)}{1 + \frac{4}{5} \frac{\Theta}{\varphi_0} \tau_{\text{ст}}}$$

Эти данные позволяют исследовать теплообмен с учетом нового комплекса $\Theta \tau_{\text{ст}}/\varphi_0$.

Поступила 8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Хабахпашева Е. М., Лемберский В. Б., Попов В. И. Некоторые вопросы гидродинамики и теплообмена структурно-вязких сред. — В кн.: Тепло- и массообмен в ньютоновских жидкостях. М., «Энергия», 1968.
2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
3. Лыков А. В., Алексащенко А. А., Алексащенко В. А. Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск, изд. БГУ, 1971.
4. Цой П. В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М., «Энергия», 1971.
5. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М., ИЛ, 1958.
6. Кутателадзе С. С., Попов В. И., Хабахпашева Е. М. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. — ПМТФ, 1966, № 1.