

тель ранее был найден Бэтчелором [16] из полуэмпирических уравнений с точностью до константы $(1/2)\sqrt{2d(d+2)}$, которая входила в теорию неопределенным параметром. Аналитический подход в трехмерном случае дает значение этой константы $\sqrt{30}/2 \approx 2,74$, что неплохо согласуется с экспериментальным значением, приблизительно равным 2 [1].

В заключение подчеркнем, что все приведенные выше формулы относятся не только к температуре, но и к концентрации произвольной пассивной примеси, например, к влажности или концентрации CO_2 в атмосфере, к солености океана, к плотности электронов в ионосфере и т. п.

Поступила 16 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппе О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
3. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid.— *Ann. Phys.*, 1964, vol. 14, N 2.
4. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке.— *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, 1949, т. 13, № 1.
5. Яглом А. М. О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке.— *ДАН СССР*, 1949, т. 69, № 6.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
7. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизмы и теория. М., 1963.
8. Львов В. С. К теории развитой гидродинамической турбулентности. Препринт № 53 ИАиЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1977.
9. Kuznetsov E. A., L'vov V. S. On the Kolmogorov turbulent spectrum in direct interaction model.— *Phys. Lett.*, 1977, vol. 64A, N 2.
10. Сазонтов А. Г. О спектрах двумерной турбулентности.— *ПМТФ*, 1981, № 2.
11. Захаров В. Е., Львов В. С. О статистическом описании нелинейных волновых полей.— *Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика*, 1975, т. 18, № 10.
12. Кузнецов Е. А., Носков Н. Н. О спектрах гиротропной турбулентности.— *ЖЭТФ*, 1978, т. 75, вып. 4.
13. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Неравновесные стационарные распределения частиц в твердотельной плазме.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, вып. 4.
14. Кац А. В. Направление перекачки энергии и числа квазичастиц по спектру в стационарных степенных решениях кинетических уравнений для волн.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, вып. 6.
15. Kraichnan R. H. An almost Markovian Galilean-invariant turbulence model.— *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 47, N 3.
16. Batchelor G. K. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. P. I. General discussion in the case of small conductivity.— *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, N 1.
17. Кузьмин Г. А., Паташинский А. З. Коротковолновая асимптотика спектра турбулентности.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 76, вып. 6.
18. Кузьмин Г. А. Интервал диссипации энергии d -мерной турбулентности. Препринт 39—79 ИТФ СО АН СССР. Новосибирск, 1979.

УДК 532.546

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

И. А. Амирасланов, Г. П. Черепанов
(Кировабад)

1. Инвариантные Γ -интегралы в теории фильтрации. Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в однородной изотропной пористой среде описывается следующими уравнениями [1]:

$$(1.1) \quad \varphi_{,ii} = 0, \quad v_i = \varphi_{,i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \varphi = -(k/\rho g)p - kx_3,$$

где v_i — составляющие скорости фильтрации; p — давление жидкости; k — коэффициент фильтрации; ρg — удельный вес жидкости; φ — потенциал скорости; x_1, x_2, x_3 — декартовы прямоугольные координаты (ось x_3 направлена противоположно направлению силы тяжести).

Пусть Σ — произвольная замкнутая поверхность в рассматриваемой пористой среде. Если внутри этой поверхности нет особых точек, линий или поверхностей поля, то имеют место уравнения [2, 3]

$$(1.2) \quad \int_{\Sigma} (v_i, v_i n_k - 2v_i n_i v_k) d\Sigma = 0;$$

$$(1.3) \quad \int_{\Sigma} [(v_i v_i)_{,l} n_k - 2(v_i, v_k)_{,l} n_i] d\Sigma = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3) \dots,$$

где n_k — составляющие вектора единичной нормали к поверхности Σ . Доказательство уравнения (1.2) вытекает из преобразований

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (v_i v_i n_k - 2v_i v_k n_i) d\Sigma &= \int_V [(v_i v_i)_{,k} - 2(v_i, v_k)_{,i}] dV = \\ &= \int_V (2v_i v_{i,k} - 2v_i v_{k,i} - 2v_{i,i} v_k) dV = 0, \end{aligned}$$

так как, согласно (1.1), $v_{i,k} = v_{k,i}$, $v_{i,i} = 0$ во всем объеме V внутри поверхности Σ . Доказательство (1.3) и других подобных уравнений аналогично.

Если внутри поверхности Σ имеются особые точки, линии или поверхности поля, то очевидно, что левая часть уравнения (1.2) будет неизменной при любых деформациях Σ , не затрагивающих сингулярностей поля.

Обозначим через Γ_k следующие выражения [2, 3]:

$$(1.4) \quad \Gamma_k = \frac{\rho}{2\varepsilon^2} \int_{\Sigma} (-v_i v_i n_k + 2v_i v_k n_i) d\Sigma \quad (k = 1, 2, 3),$$

где ρ — плотность жидкости; ε — пористость среды. Величины Γ_k являются инвариантными характеристиками сингулярностей поля, заключенных внутри замкнутой поверхности Σ . Они имеют размерность силы (в плоском случае — силы, деленной на длину). Вектор $\Gamma(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ равен главному вектору конфигурационных сил, действующих на непроницаемое тело с поверхностью Σ . В случае неподвижной точечной особенности он даст силу, действующую со стороны поля на указанную особенность. В случае точечной особенности, движущейся под действием поля, его величину можно рассматривать как диссипацию энергии поля, расходуемой на продвижение особенности на единицу длины. Вычисление Γ -интегралов в сингулярностях поля осуществляется при помощи аппарата асимптотического Γ -интегрирования [2, 3].

Например, если сингулярность представляет собой точечный источник мощности q в начале координат, так что

$$v_i = qx_i/4\pi r^3 + v_{i0} \quad (r^2 = x_i x_i, \quad i = 1, 2, 3),$$

то в этом случае [2]

$$(1.5) \quad \Gamma_k = -\rho\varepsilon^{-2} q v_{k0} \quad (k = 1, 2, 3).$$

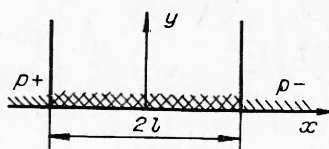
Здесь v_{i0} — регулярная составляющая скорости фильтрации в начале координат.

Укажем еще очевидные Γ -интегралы, вытекающие из закона сохранения массы:

$$\int_{\Sigma} v_i n_i d\Sigma = 0, \quad \int_{\Sigma} v_{i,k} n_i d\Sigma = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \dots$$

Рассмотрим некоторые новые задачи теории фильтрации, эффективное решение которых удастся получить, используя инвариантные Γ -интегралы. Отметим, что они являются мощным вычислительным средством, позволяющим легко конструировать конечную алгебраическую систему, приближенно эквивалентную исходной краевой задаче [2] (аналогично методу конечных элементов).

2. Теория контактной фильтрации под плотинами. Вдоль бетонного основания плотины часто имеет место контактная фильтрация, когда между грунтом и плотиной имеется тонкий слой воды [4]. Теорию этого явления разберем на простейшем иллюстративном примере. Обобщение этой теории на произвольную конфигурацию плотины и грунта не вызывает принципиальных затруднений.



Ф и г. 1

Пусть грунт занимает полупространство $y < 0$, непроницаемая плотина (флютбет) — слой $y > 0$, $|x| < l$, вода под давлением p_+ — область $y > 0$, $x < -l$, а вода под давлением p_- — область $y > 0$, $x > +l$. Для определенности считаем, что $p_+ > p_-$; при этом вода перетекает под плотиной слева направо (фиг. 1).

Задача считается плоской. Основные уравнения плоской задачи при помощи комплексного потенциала $f(z)$, согласно (1.1), можно записать в виде

$$(2.1) \quad v_x + iv_y = \overline{f'(z)}, \quad p = -(\rho g/k) \operatorname{Re} f(z) - \rho g y \quad (z = x + iy).$$

Здесь ось y направлена противоположно направлению силы тяжести.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$(2.2) \quad \text{при } |x| < l, y = 0 \quad v_y = 0, \quad \text{при } |x| > l \quad \partial p / \partial x = 0 \\ (v_x + iv_y \rightarrow 0 \text{ при } x + iy \rightarrow \infty).$$

Отсюда на основании (2.1) для комплексного потенциала имеем краевую задачу

$$(2.3) \quad \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| < l \quad \operatorname{Im} f'(z) = 0, \\ \text{при } |\operatorname{Re} z| > l \quad \operatorname{Re} f'(z) = 0 \quad (f'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty),$$

решение которой будет следующим:

$$(2.4) \quad f'(z) = C_i / \sqrt{z^2 - l^2} \quad (\sqrt{z^2 - l^2} \rightarrow z \text{ при } z \rightarrow \infty).$$

Действительная постоянная C определяется из дополнительного условия

$$(2.5) \quad \int_{-l}^l \frac{\partial p}{\partial x} dx = \Delta p \quad (\Delta p = p_+ - p_-) \text{ при } y = 0.$$

Подставляя в (2.5) решение (2.4), согласно (2.1), получаем

$$(2.6) \quad C = -k \Delta p / \pi \rho g.$$

Вблизи особой точки $z = l$ решение (2.4), (2.6) имеет вид

$$(2.7) \quad f'(z) = K / \sqrt{2\pi \varepsilon}, \quad v_x = -K \sin(\varphi/2) / \sqrt{2\pi |\varepsilon|}, \\ v_y = K \cos(\varphi/2) / \sqrt{2\pi |\varepsilon|} \quad (\varepsilon = z - l = |\varepsilon| e^{i\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll l), \text{ где}$$

$$(2.8) \quad K = k \Delta p / \rho g \sqrt{\pi l}.$$

При помощи (1.4), (2.7) вычисляем инвариантные характеристики особой точки $z = l$

$$(2.9) \quad \Gamma_1 = (\rho/2\varepsilon^2) K^2, \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0.$$

В данной задаче, согласно (2.8), имеем

$$(2.10) \quad \Gamma_1 = k^2 (\Delta p)^2 / 2 \rho \varepsilon^2 g^2 \pi l.$$

Величина Γ_1 представляет собой конфигурационную силу фильтрационного потока, действующую на грунт в особой точке $z = l$ и вызывающую все возможные критические явления вблизи этой точки (например, начало контактной фильтрации, образование локальной полости в грунте или,

наоборот, выпучивание грунта, прорыв струи воды под плотиной). Естественно, возникновение таких критических явлений, выходящих за рамки рассматриваемой фильтрации, будет характеризоваться соответствующими критическими значениями величины Γ_1 . Обозначим через Γ_c постоянную, характеризующую начало контактной фильтрации, так что при $\Gamma_1 < \Gamma_c$ воды под плотиной нет, а при $\Gamma_1 > \Gamma_c$ под плотиной образуется слой воды и возникает контактная фильтрация.

Отсюда при помощи (2.10) находим критический перепад давления на плотине

$$(2.11) \quad (\Delta p)_c = (\epsilon g/k) \sqrt{2\pi r \Gamma_c l}.$$

Построенное выше решение годится лишь при $\Delta p < (\Delta p)_c$. При $\Delta p > (\Delta p)_c$ необходимо учитывать изменение режима фильтрации вследствие локального вымывания частиц грунта.

Предложенная теория прорыва воды под плотиной относится лишь к тем задачам, в которых имеются сингулярные точки. Такими точками за тривиальными исключениями всегда будут, например, крайние точки флютбета (при произвольном криволинейном очертании флютбета и дна канала). Согласно принципу микроскопа [2], фильтрационное поле в окрестности этих точек всегда описывается формулой (2.7), причем коэффициент интенсивности поля K будет некоторой функцией геометрических и физических параметров соответствующей краевой задачи теории фильтрации. Аналогичную сингулярность имеет также конец шпунта, однако физически этот случай менее интересен, так как частицы грунта не могут уноситься потоком, и поэтому вблизи конца шпунта образуется сравнительно устойчивая область нелинейной фильтрации, в которой структура частиц грунта отлична от начальной.

Примем следующее естественное физическое допущение: вымывание частиц грунта в некоторой точке его поверхности определяется скоростью фильтрации в этой точке. Из этого допущения вытекает, что вымывание частиц всегда начинается в сингулярных точках, где скорость фильтрации бесконечно велика. Очевидно, что, согласно этому общему допущению, начало вымывания частиц вблизи сингулярной точки характеризуется некоторым критическим значением коэффициента интенсивности поля в этой точке $K = K_c$ (при $K < K_c$ вымывания частиц не происходит). Величина K_c зависит от прочности связи частиц грунта одна с другой, от их размеров и формы и от физических свойств жидкости, но не зависит от макропараметров задачи (вес плотины, перепад давления, геометрия флютбета и т. п.). Поэтому для данной пары грунт — жидкость величина K_c может быть определена экспериментально (например, на модели).

Согласно универсальной связи (2.9), константы Γ_c и K_c связаны следующим образом:

$$2\epsilon^2 \Gamma_c^2 = \rho K_c^2.$$

Таким образом, теория K_c , основанная на естественных физических допущениях, и теория Γ_c , вытекающая из общей теории движения сингулярностей физического поля [2], приводят к тождественным результатам.

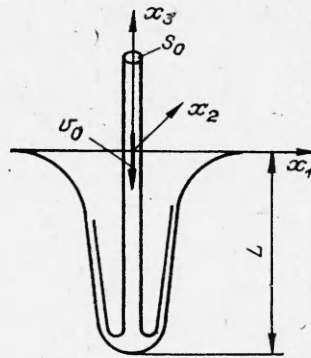
Вопросы силового взаимодействия фильтрационного потока со скелетом грунта имеют большое значение (см., например, [1, 4—6]). Следует подчеркнуть, что процесс отрыва отдельной частицы от поверхности грунта слабо зависит от макронапряжений в скелете [6]; он может происходить и при весьма больших макронапряжениях сжатия. Физически он совершенно отличен от процесса макроразрушения скелета грунта [6].

Прорыв воды над плотиной, очевидно, начинается с вымывания частиц грунта вблизи правой сингулярной точки (при $z = l$ на фиг. 1). Дальнейшее развитие процесса здесь не рассматривается.

Однако, если допустить, что поперечный размер полости, образующейся под плотиной вблизи точки $z = l$ вследствие вымывания грунта, пренебрежимо мал по сравнению с ее длиной, а изменение давления в этой полости также пренебрежимо мало, то характер развития полости можно

оценить при помощи соотношения (2.11), в котором величину l следует считать переменным параметром. Очевидно, на основании этого соотношения процесс развития полости, раз начавшись, будет неустойчивым, так как необратимое уменьшение l сопровождается уменьшением Δp . Скорость dl/dt зависит, по-видимому, также от процесса транспорта частиц в полости.

3. Размыв грунта струей. Пусть осесимметричная струя воды под сильным напором бьет в полупространство из рыхлого грунта, образуя тонкую осесимметричную полость длины L , развивающуюся вдоль своей оси (фиг. 2). Какова зависимость величины L от скорости исходной струи v_0 и от ее поперечного сечения S_0 ?



Фиг. 2

Дадим ответ на этот вопрос в следующем предположении, определяющем математическую модель явления: вся вода из струи переходит в грунт, причем размер области интенсивной нелинейной фильтрации мал по сравнению с L .

Таким образом, приходим к задаче о движении точечного фильтрационного источника жидкости перпендикулярно границе полупространства. Будем считать, что все полупространство насыщено жидкостью. Влиянием полости и деформированной границы полупространства на поле течения жидкости будем пренебрегать, что правомерно в области, удаленной от полости и от свободной границы.

Поле течения жидкости в полупространстве $x_3 < 0$ со свободной границей под действием источника мощности q в точке $(0, 0, -L)$ описывается следующим потенциалом:

$$(3.1) \quad \varphi = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - L)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + L)^2}} \right].$$

Согласно (1.5), (3.1), величины Γ_k в особой точке имеют вид

$$(3.2) \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = \rho q^2 / (16\pi \epsilon^2 L^2) \quad (q = v_0 S_0).$$

Движение источника происходит под действием конфигурационной силы Γ_3 , которая равняется диссипации энергии, затрачиваемой фильтрационным полем на продвижение источника на единицу длины.

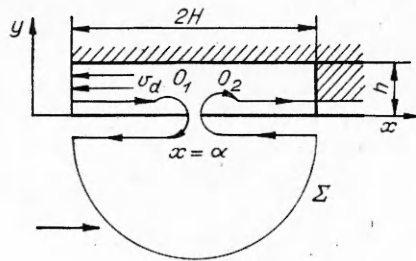
Примем простейшую концепцию о том, что эта величина — постоянная, и обозначим ее через Γ_c . (При $\Gamma_3 < \Gamma_c$ размыва грунта струей не происходит, а неравенство $\Gamma_3 > \Gamma_c$, согласно данной концепции, невозможно.) Отсюда на основании (3.2) получаем искомую зависимость углубления струи L от v_0 и S_0

$$L = (v_0 S_0 / 4\epsilon) (\rho / \pi \Gamma_c)^{1/2}.$$

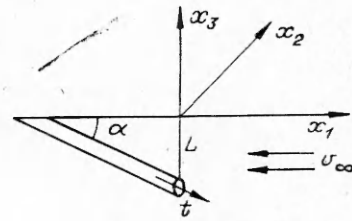
Эта теория легко обобщается для других форм грунта и других граничных условий на его поверхности; последние факторы оказываются существенными. В этом пункте использован лишь простейший вариант общей теории движения сингулярностей [2, 3] физического поля. Более точное выражение в данном случае будет иметь вид $dL/dt = f(\Gamma_3)$, где t — время, f — экспериментально определяемая функция.

Для плотных грунтов в выражении для Γ_3 в (3.2) появится еще одно слагаемое, которое представляет собой вклад от упругого поля движущейся сосредоточенной силы.

4. Флютбет с дренажными отверстиями. Иногда под флютбетами устраивают дренажные отверстия для уменьшения давления. Дебит отверстия зависит от его расположения и конструкции. Рассмотрим этот вопрос на примере задачи п. 2, считая дополнительно, что на схеме фиг. 1 в точке $y = 0$, $x = a$ имеется сток жидкости интенсивности q .



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Конструкция дренажного отверстия в этой точке в большом масштабе показана на фиг. 3. Она составлена непроницаемыми плоскостями $y = h$ и $x = a + H$.

Согласно (1.2), в обозначениях плоской задачи имеем *

$$(4.1) \quad \int_{\Sigma} (-v^2 n_x + 2v_n v_x) d\Sigma = 0,$$

где v — модуль скорости; Σ — замкнутый контур, изображенный на фиг. 3. Он состоит из полуокружности радиуса H гораздо больше размера отверстия, но гораздо меньше l , непроницаемых плоскостей при $y = 0$, $y = h$ и $x = H$, плоскости $x = a - H$ и двух малых окружностей, охватывающих края отверстия. Направление обхода контура Σ показано стрелками на фиг. 3.

Интеграл (4.1) по двум малым окружностям равен нулю в силу локальной симметрии поля, а также в силу того, что эти окружности обходятся в противоположном направлении. Интеграл (4.1) по непроницаемым плоскостям при $y = 0$ и $y = h$ равен нулю в силу того, что на них имеют место равенства $v_n = 0$, $n_x = 0$. На полуокружности главные члены поля описываются потенциалом

$$(4.2) \quad f'(z) = -q/\pi(z - a) + v_0 + O(z - a),$$

где v_0 — некоторая действительная постоянная. Используя (4.2), можно вычислить интеграл (4.1) по полуокружности; он оказывается равным $-qv_0$. Интеграл (4.1) по непроницаемому отрезку $x = a + H_1$ пренебрежимо мал при значении H_1 , большем двух — трех диаметров отверстия, в силу экспоненциального убывания скорости при $x \rightarrow \infty$, $y > 0$. Интеграл (4.1) по отрезку $x = a - H_1$ при том же условии легко вычислить непосредственно; он равен $+qv_d$, где v_d — скорость фильтрации при $x \rightarrow -\infty$, $y > 0$. Очевидно, что $q = v_d h$.

Таким образом, из равенства (4.1) вытекает условие (4.3) $v_d = -v_0$. Потенциал всего поля фиг. 1 с дополнительным стоком в точке $z = a$ будет следующим [1]:

$$f'(z) = \frac{-k\Delta p i}{\pi \rho g \sqrt{l^2 - a^2}} \left[1 - \frac{\rho g q \sqrt{l^2 - a^2}}{k\Delta p (z - a)} \right].$$

Отсюда находим величину v_0 согласно формуле (4.2)

$$(4.4) \quad v_0 = k\Delta p / (\pi \rho g \sqrt{l^2 - a^2}).$$

При помощи уравнений (4.3), (4.4) найдем искомую величину дебита дренажного отверстия

$$q = kh\Delta p / (\pi \rho g \sqrt{l^2 - a^2}).$$

* В общем случае (дрена заполнена грунтом с отличными от основной области характеристиками, или грунт в ней отсутствует) соотношение (4.1) не является точным; последнее связано с тем, что на границе раздела слоев грунта нормальные составляющие скорости фильтрации меняются непрерывно, а касательные претерпевают разрыв.

Задача этого пункта решена в [1]. Однако вопрос определения расхода q в ней не ставился.

5. Задача о дренажной трубе. Пусть в полупространстве $x_3 < 0$ заделана прямолинейная цилиндрическая труба с непроницаемыми стенками под углом α к границе полупространства (фиг. 4). Конец трубы находится на расстоянии L от границы, причем считается, что $r \ll L$, где r — радиус трубы. Невозмущенное поле течения жидкости описывается потенциалом

$$(5.1) \quad \varphi = -v_\infty x_1.$$

Возмущенное поле вдали от конца трубы описывается, очевидно, потенциалом, соответствующим точечному стоку q в конце трубы, т. е. в точке $(0, 0, -L)$ согласно выбору системы координат на фиг. 4:

$$(5.2) \quad \varphi = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + L)^2}} \mp \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - L)^2}} \right].$$

Здесь и далее верхний и нижний знаки перед вторым слагаемым отвечают свободной и непроницаемой границе полупространства соответственно.

Спрашивается, чему равна величина q ? Ответ на этот вопрос получается методом, аналогичным примененному в п. 4. Согласно (1.2), имеем

$$\int_{\Sigma} (v_i v_i n_i^2 - 2v_n v_t) d\Sigma = 0,$$

где в качестве Σ взята замкнутая поверхность, охватывающая конец трубы и отстоящая от нее на расстоянии, большом по сравнению с r , но малым по сравнению с L , плюс внутренняя и внешняя поверхности трубы, находящейся внутри вышеуказанной поверхности.

Вычисляя Γ -вычет [2, 3], можно найти

$$(5.3) \quad v_d = v_{t0},$$

где v_d — скорость фильтрации в трубе; v_{t0} — регулярная составляющая на ось t скорости фильтрации, отвечающей внешнему полю (5.1), (5.2). Имеем

$$v_{t0} = v_\infty \cos \alpha \mp q \sin \alpha / 16\pi L^2.$$

Так как $q = v_d \pi r^2$, отсюда на основании (5.3) находим

$$q = \pi r^2 v_\infty \cos \alpha / (1 \mp r^2 \sin \alpha / 16L^2).$$

Второй член в знаменателе этой формулы пренебрежимо мал в рассматриваемом приближении.

Поступила 9 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. Cherepanov G. P. Mechanics of Brittle Fracture. N. Y., McGraw-Hill, 1979.
3. Cherepanov G. P. Invariant Γ -integrals.— Engineering Fracture Mechanics, 1981, vol. 14, N 1.
4. Аравин В. Н., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953.
5. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
6. Cherepanov G. P. The theory of fluidization.— Ind. Engng. Chem. Fundam., 1972, vol. 11, N 1.