

## ЛИТЕРАТУРА

1. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin, 1928, S. 962.
2. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. Z. Angew. Math. u. Mech., 1929, Bd. 9, No 49.
3. Mackenzie J. K. The elastic constants of a solid containing Spherical Holes. Proc. Phys. Soc., 1950, ser. B. vol. 63, No 1, p. 2.
4. Hershey A. V. Elasticity of Cubic Polycrystals. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No 3, p. 236.
5. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls Z. Phys., 1958, Bd. 151, № 4, S. 504.
6. Kneer G. Die Elastischen konstanten quasiisotroper Vielkristallaggregate. Phys. Stat. Sol., 1963, 3, No 3, p. K 331.
7. Kneer G. Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur. Phys. Stat. Sol., 1965, vol. 9, No 3, p. 825.
8. Ли́фши́ц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. exper. и теор. физ., 1946, т. 16, в. 1, стр. 967.
9. Ли́фши́ц И. М., Пархомовский Г. Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. Ж. exper. и теор. физ., 1950, т. 20, в. 1, стр. 173.
10. Даринский Б. М., Шермергор Т. Д. Упругие модули поликристаллов кубической структуры. ПМТФ, 1965, № 4, стр. 121.
11. Даринский Б. М., Шермергор Т. Д. Температурная релаксация в поликристаллах с кубической структурой. Физ. металлов. и металловед., 1964, т. 18, № 5, стр. 645.
12. Mitchell T. E., Hecker S. S., Smialek R. Z. Dislocation pile — ups in anisotropic crystals. Phys. Stat. Sol., 1965, vol. 11, No 2, p. 585.
13. Хантингтон Х. Б. Упругие постоянные кристаллов. Усп. физ. н., 1961, т. 73, вып. 3, стр. 461.

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В БАЛОЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. М. Михайлов

(Новосибирск)

В первом разделе в той же постановке, что и в [1], приближенно решается задача о движении трещины под действием подвешенных к ее берегам грузов; во втором разделе рассматриваются трещины, распространение которых происходит вследствие того, что стержень теряет устойчивость при продольном сжатии.

1. Движение трещины под действием грузов. Пусть трещина расположена на отрезке  $0 \leq x \leq l$  средней линии полубесконечного ( $x \geq 0$ ) стержня прямоугольного сечения высоты  $2H$ , ширины  $b$ , причем берега трещины при  $x = 0$  нагружены массой  $m$ , находящимися в поле силы тяжести с ускорением  $g$ . Будем рассматривать часть стержня, расположенную по одну сторону от трещины, как балку, которая заделана при  $x = l$ . Обозначим смещение нейтральной оси балки в точке  $x$  в момент времени  $t$  через  $u(x, t)$ , плотность поверхностной энергии материала балки — через  $T$ , модуль Юнга — через  $E$ , плотность материала балки — через  $\rho$ , линейную плотность — через  $\rho bH$ . Как показано в [1], смещение  $u(x, t)$  и длина трещины  $l(t)$  должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{EI}{\rho bH} \quad (1.1)$$

$$u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = A = \left( \frac{2Tb}{EI} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = mg - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} \quad (1.3)$$

Используя уравнение (1.1), условие (1.3) можно преобразовать к виду

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = mg + ma^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=0} \quad (1.4)$$

Вспользуемся методом Л. В. Канторовича сведения задачи (1.1), (1.2), (1.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Представим приближенно смещение  $u(x, t)$  в виде полинома по степеням  $(x - l)$ , причем коэффициенты его подберем так, чтобы краевые условия (1.2), (1.4) выполнялись при любом  $l$ . Тогда  $l(t)$  и коэффициенты, оставшиеся не определенными, определяются из системы уравнений Эйлера, выполнение которых необходимо для минимума интеграла

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left[ \frac{\rho b H}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right)^2 + m g u(0, t) - T b l(t) \right] dt \quad (1.5)$$

Ограничимся случаем одного уравнения, т. е. аппроксимируем смещение полиномом четвертой степени

$$u(x, t) \approx \frac{1}{2} A (x - l)^2 + \frac{1}{6} A l^{-1} [1 - \gamma(L - 1)] (x - l)^3 - \frac{1}{12} A l^{-2} \gamma (L - 1) (x - l)^4$$

$$L = \frac{l}{l_0}, \quad l_0 = \frac{AEI}{mg}, \quad \gamma = \frac{LM}{2 + LM}, \quad M = \frac{\rho b H l_0}{m} = \frac{\sqrt{6} \rho g}{\sqrt{ET}} \left( \frac{l_0}{H} \right)^2 H^{3/2} \quad (1.6)$$

Подставив (1.6) в (1.5), получим

$$S = \frac{A m l_0^3}{6} \int_{t_1}^{t_2} \left[ A l_0^2 \Phi(L) \left( \frac{dL}{dt} \right)^2 + g \varphi(L) \right] dt$$

$$\Phi(L) = L^3 M \left[ \frac{61}{420} + \frac{39\gamma}{1120} + \frac{23\gamma^2}{6048} + \gamma(L - 1) \left( \frac{37}{210} - \frac{\gamma}{1680} - \frac{23\gamma^2}{3024} \right) + \gamma^2(L - 1)^2 \left( \frac{11}{140} - \frac{23\gamma}{672} + \frac{23\gamma^2}{6048} \right) \right] +$$

$$+ L^2 \left[ \frac{4}{3} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma^2}{48} + \gamma(L - 1) \left( \frac{4}{3} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{24} \right) + \gamma^2(L - 1)^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\gamma^2}{48} \right) \right]$$

$$\varphi(L) = L \left[ -4 + 2L + \gamma^2(L - 1)^2 \frac{5 + 2LM}{5LM} \right]$$

Составим уравнение Эйлера для определения  $L(t)$ ; получим

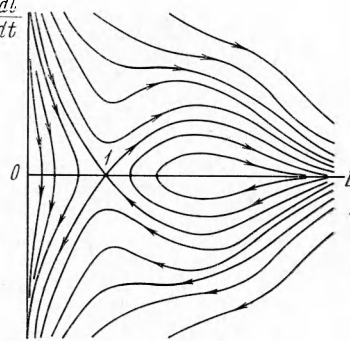
$$2A l_0^2 \Phi(L) \frac{d^2 L}{dt^2} + A l_0^2 \frac{d\Phi(L)}{dL} \left( \frac{dL}{dt} \right)^2 = g \frac{d\varphi(L)}{dL} \frac{dt}{dt}$$

Подстановкой  $y(L) = (dL/dt)^2$  это уравнение сводится к линейному уравнению первого порядка, решение которого дает скорость трещины в зависимости от ее длины

$$\frac{dL}{dt} = \left[ \frac{6B/A m l_0^2 + g\varphi(L)}{A l_0^2 \Phi(L)} \right]^{1/2} \quad (1.7)$$

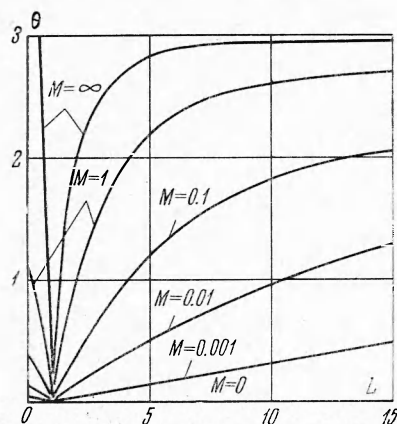
Постоянная интегрирования  $B$  — полная энергия системы. Положение равновесия определяется из условий  $dL/dt = 0$ ,  $d^2L/dt^2 = 0$ , т. е. как корень уравнения  $d\varphi/dL = 0$ . Решив это уравнение, получим  $L = 1$ . Следовательно,  $l_0$  из (1.6) — это равновесная длина трещины. Вид фазовой плоскости  $(L, dL/dt)$  показан на фиг. 1, из которой видно, что положение равновесия неустойчиво. Начальные распределения смещений и скоростей в данном приближении связаны формулами (1.6), (1.7).

Если нельзя считать, что начальное состояние удовлетворяет этому условию, то рассматриваемое приближение будет недостаточным, и необходимо аппроксимировать смещение полиномом более высокой степени. При этом появятся новые постоянные интегрирования, которые позволят расширить множество допустимых начальных состояний.



Фиг. 1

Рассмотрим подробнее фазовую траекторию, проходящую через положение равновесия ( $B = 1/3 A^2 EI l_0$ ). Введем безразмерную скорость  $\theta = (l/a) (dl/dt)$ , равную отношению скорости трещины к скорости изгибной волны, длина которой равна длине трещины. Тогда уравнение (1.7) переписывается следующим образом:



Фиг. 2

$$\theta^2 = M \left( \frac{L-1}{L} \right)^2 \left[ 2 + \frac{L^2 M (5 + 2LM)}{5(2 + LM)^2} \right] \Phi(L) \quad (1.8)$$

Зависимость (1.8) приведена на фиг. 2 в координатах  $(L, \theta)$  при различных значениях параметра  $M$  для трещин, движущихся вправо. При  $M = 0$  формулы (1.6), (1.7) дают точное решение поставленной задачи. Этот случай соответствует движению трещины в безынерционном стержне. Формула (1.7) в этом случае принимает вид

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{l_0} \left( \frac{3g}{2A} \right)^{1/2} \left( \frac{L-1}{L} \right)$$

Следовательно, при росте трещины из состояния равновесия ее скорость стремится к величине  $(3g/2A)^{1/2}$ .

Случай  $M = \infty$  соответствует движению трещины под действием постоянной силы  $mg$ , приложенной на конце  $x = 0$ . Этот случай получается из рассматриваемой задачи путем предельного перехода  $m \rightarrow 0$ ,  $g \rightarrow \infty$ ,  $mg = \text{const}$ . В отличие от случая  $M = 0$ , здесь учитывается инерция материала стержня, но не учитывается инерция груза.

Как видно из выражения (1.7) для  $\Phi(L)$ , как бы ни был мал параметр  $M \neq 0$ , при достаточно больших  $L$  движение происходит так, как если бы  $M = \infty$ . Таким образом, квазистатическое приближение  $M = 0$  применимо при  $L \ll (4/3) (420/61) M^{-1}$ .

Приведем численные значения  $M$  при  $H = 0.5 \text{ см}$ ,  $l_0/H = 20$ ,  $g = 981 \text{ см/сек}^2$  (используется последняя из формул (1.6)). Для  $\alpha\text{-Fe}$ :  $\rho = 7.86 \text{ г/см}^3$ ,  $T = 1450 \text{ дин/см}$ ,  $E = 13.2 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$ ,  $M = 0.06$ ; для  $\text{LiF}$ :  $\rho = 2.29 \text{ г/см}^3$ ,  $T = 700 \text{ дин/см}$ ,  $E = 7.35 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$ ,  $M = 0.03$ . Приведенные достаточно типичные значения  $M$  показывают, что вряд ли случай  $M = \infty$  когда-нибудь встречался в экспериментах с трещинами.

**2. Трещины в условиях продольного изгиба.** Пусть стержень бесконечной длины  $-\infty < x < \infty$ , размеры и свойства которого такие же, как в п. 1, сжат продольной силой, абсолютную величину которой обозначим  $P$ . Допустим, что вследствие потери устойчивости вдоль средней линии стержня симметрично развивается трещина, расположенная на отрезке  $-l \leq x \leq l$ . Примем, что потеря устойчивости происходит лишь на том отрезке, где расположена трещина, причем на концах трещины имеет место жесткая заделка. Будем пренебрегать продольной сжимаемостью стержня и считать, что сила  $P$  совершает работу лишь на перемещении, связанном с выпучиванием стержня. В приближении слабого изгиба это перемещение равняется [3]

$$\int_{-l}^l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Часть стержня, расположенную вне отрезка  $-l \leq x \leq l$ , будем называть жесткой частью стержня. Используя принцип наименьшего действия, можно показать, аналогично тому, как это сделано в [1] для случая поперечного изгиба, что смещение  $u(x, t)$  нейтральной оси стержня, потерявшего устойчивость, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{P}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{EI}{\rho b l} \quad (2.1)$$

и граничным условиям

$$u = 0, \quad \partial u / \partial x = 0, \quad \partial^2 u / \partial x^2 = A = (2Tb/EI)^{1/2} \quad (2.2)$$

на каждом из концов трещины. Рассмотрим некоторые случаи равновесия и движения трещины. Вследствие симметрии рассматриваемых ниже случаев решение отыскивается при  $0 \leq x \leq l$ , причем при  $x = 0$  выполняются условия

$$\partial u / \partial x = 0, \quad \partial^3 u / \partial x^3 = 0 \quad (2.3)$$

Кроме того, естественно потребовать, чтобы  $u = 0$  лишь при  $x = l$ ; это исключит соприкосновение противоположных берегов трещины.

а) *Статические задачи.* Если смещение не зависит от времени, то инерционный член в уравнении (2.1) исчезает. Пусть сила  $P$  задана. Тогда

$$u(x) = AEIP^{-1}(1 + \cos \sqrt{P/EI}x), \quad l = \pi \sqrt{EIP^{-1}} \quad (2.4)$$

Так как большей равновесной длине трещины соответствует меньшая сила, то рассматриваемое равновесие неустойчиво. Более естественной будет постановка задачи, когда задается перемещение  $s$  жесткой части стержня (относительно точки  $x = 0$ ). Такой случай может осуществляться, например, при медленном сдвигании захватов испытательной машины. Смещение и длина трещины и в этом случае выражаются формулами (2.4), однако сила  $P$  теперь неизвестна. При помощи второй формулы (2.4) следует выразить смещение через длину трещины, а саму длину определить из соотношения

$$s = \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Проведем необходимые вычисления, получим

$$l = \frac{2^{2/3} \pi^{2/3} s^{1/2}}{A^{2/3}}, \quad P = \frac{\pi^2 EIA^{4/3}}{2^{4/3} s^{2/3}} \quad (2.5)$$

Равновесие в этом случае будет устойчивым. Бесконечное увеличение  $P$  при  $s \rightarrow 0$  вызвано предположением о несжимаемости стержня. Учет продольной сжимаемости при малых  $s$ , по-видимому, нецелесообразен, так как при малом  $s$  мала и длина трещины, и используемая здесь простая теория продольного изгиба становится неприемлемой.

б) *Динамические задачи.* Аналогично [1] можно получить инвариантно-групповые решения задачи о движении трещины с учетом инерционного члена в (2.1). Такими решениями будут стационарные решения вида  $u(x, t) = u(x - Vt)$  и автомодельные решения вида  $u(x, t) = Uf(x^2/at)$  (здесь  $V, U$  — постоянные, имеющие размерность скорости;  $f$  — безразмерная функция). Решения первого типа описывают движение вдоль стержня трещины постоянной длины, что, вследствие необратимости реальных трещин, не представляет интереса. Поэтому они здесь не рассматриваются.

Рассмотрим решения второго типа. Они описывают такое движение трещины, что конфигурации системы в любые два момента времени  $t_1$  и  $t_2$  могут быть переведены одна в другую путем растяжения по оси смещений — в  $(t_2/t_1)$  раз и по оси  $x$  — в  $(t_2/t_1)^{1/2}$  раз. Очевидно, что если краевые условия (2.2), (2.3) выполнены при  $t = t_1$ , то они будут выполняться и при  $t = t_2$ . Если такие движения возможны, то трещина должна развиваться по закону  $l^2 = \lambda at$ , где  $\lambda$  — безразмерная величина, зависящая от условий опыта, но не меняющаяся в процессе развития трещины. Из анализа размерностей следует, что продольная сила должна изменяться обратно пропорционально квадрату длины трещины, т. е. должно соблюдаться равенство  $P = C/l^2$ , где  $C$  — постоянная размерная величина. Введем обозначения  $\xi = x^2/at$ ,  $\mu = C/4EI\lambda$ , и сделаем в уравнении (2.1) и граничных условиях (2.2), (2.3) подстановку  $u(x, t) = Uf(\xi)$ . Получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d^4 f}{d\xi^4} + 3\xi \frac{d^3 f}{d\xi^3} + \left( \frac{3}{4} + \mu\xi + \frac{\xi^2}{16} \right) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{\mu}{2} \frac{df}{d\xi} &= 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\xi} \frac{df}{d\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\xi} \left( 3 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d^3 f}{d\xi^3} \right) &= 0 \\ f(\lambda) = 0, \quad \frac{df(\lambda)}{d\xi} = 0, \quad 4\lambda \frac{d^2 f(\lambda)}{d\xi^2} = \frac{Aa}{U} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Найдем решение этой задачи в виде степенного ряда по  $\xi$

$$f(\xi) = aAU^{-1} [4\lambda d^2 F(\lambda) / d\xi^2]^{-1} [F(\xi) - F(\lambda)]$$

Здесь  $F(\xi)$  — некоторый степенной ряд, который не выписываем;  $\lambda$  — первый корень уравнения  $dF/d\xi = 0$ , лежащий на положительной полуоси, причем  $dF/d\xi$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\xi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = -\frac{2}{3} \mu\xi, \\ \beta_{k+1} &= -\frac{\xi}{(k+1)(k+3/2)} \left[ \mu\beta_k + \frac{(k-1)\xi}{16(k+1/2)} \beta_{k-1} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя рекуррентное соотношение для членов ряда (2.7), легко убедиться, что  $\lim (\beta_{k+1} / \beta_k) = 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $\xi$  и  $\mu$ , и, следовательно, по признаку Даламбера ряд, определяющий  $dF/d\xi$ , сходится везде. Существование решения задачи (2.6), таким образом, зависит от того, имеются ли положительные нули у ряда (2.7). При  $\xi \ll \mu$ , отбрасывая второе слагаемое в рекуррентной формуле (2.7), получим, что

$$dF/d\xi \approx \sin \sqrt{4\mu\xi} / \sqrt{4\mu\xi}$$

Поэтому, если  $\mu$  достаточно велико, то  $\lambda \approx \pi^2 / 4 \mu$ . Теперь докажем, что если  $\mu$  достаточно мало, то ряд (2.7) не имеет положительных нулей. Для этого введем функции  $v(\xi)$ ,  $w(\xi)$  так, что

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} = \mu v(\xi) = \xi^{-3/2} w(\xi), \quad \frac{dF}{d\xi} = 1 + \mu \int_0^\xi v(\tau) d\tau$$

Задача заключается, следовательно, в доказательстве ограниченности

$$\int_0^\xi v(\tau) d\tau$$

Введем функции  $v(\xi)$ ,  $w(\xi)$  в дифференциальное уравнение (2.6)

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{w}{16} = -\mu \left[ \frac{w}{\xi} + \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \left( 1 + \mu \int_0^\xi v(\tau) d\tau \right) \right]$$

Применяя формулу для решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами [4], получим интегральное уравнение для  $v(\xi)$  (произвольные постоянные в общем решении однородного уравнения положены равными нулю для того, чтобы поведение  $v(\xi)$  в окрестности нуля согласовалось с (2.7))

$$\xi^{3/2} v(\xi) = -4\mu \int_0^\xi \sqrt{\eta} v(\eta) \sin \frac{\xi - \eta}{4} d\eta - 4\mu \int_0^\xi \frac{\sin^{1/4}(\xi - \eta)}{2\sqrt{\eta}} \int_0^\eta v(\tau) d\tau + 4 \int_0^\xi \frac{\sin^{1/4}(\xi - \eta)}{2\sqrt{\eta}} d\eta \quad (2.8)$$

Обозначим через  $R(\xi)$  максимальное значение  $|v(\eta)|$  при  $0 \leq \eta \leq \xi$ . Оценим левую часть (2.8)

$$\begin{aligned} \xi^{3/2} |v(\xi)| &\leq 4\mu \frac{3}{2} R(\xi) \left| \int_0^\xi \sqrt{\eta} \sin \frac{\xi - \eta}{4} d\eta \right| + 4 \left| \int_0^\xi \frac{\sin^{1/4}(\xi - \eta)}{2\sqrt{\eta}} d\eta \right| \leq \\ &\leq 6\mu R(\xi) 4\sqrt{\xi} + 24\mu R(\xi) \left| \int_0^\xi \frac{\cos^{1/4}(\xi - \eta)}{2\sqrt{\eta}} d\eta \right| + \\ &+ 4 \left| \int_0^\xi \frac{\sin^{1/4}(\xi - \eta)}{2\sqrt{\eta}} d\eta \right| \leq 24\mu R(\xi) \sqrt{\xi} + 24\mu R(\xi) Q_1 + 4Q_1 \end{aligned}$$

Здесь  $Q_1$  — постоянная, ограничивающая по модулю оба интеграла в последнем неравенстве. Теперь ясно, что  $v(\xi)$  ограничена, ибо в противном случае нашлись бы такие значения  $\xi$ , большие любого наперед заданного положительного числа, что  $|v(\xi)| = R(\xi)$  ( $v(\xi)$ , являясь целой функцией, ограничена во всех конечных точках), и только что доказанное неравенство приняло бы вид

$$R(\xi) \leq 24 \frac{\mu R(\xi)}{\xi} + \frac{24\mu R(\xi) Q_1 + 4Q_1}{\xi^{1/2}}$$

что при больших  $\xi$  противоречиво. Следовательно, при достаточно больших  $\xi$  справедливо неравенство  $|v| < 48\mu R(\infty) / \xi + 4Q_1 / \xi^{1/2}$ . Используя это неравенство и уравнение (2.8), получим, что при достаточно больших  $\xi$  имеем  $|v(\xi)| < Q_2 / \xi^{1/2}$ , где  $Q_2$  — некоторая постоянная. Отсюда следует требуемая ограниченность интеграла

$$\int_0^\xi v(\tau) d\tau$$

На фиг. 3 приведены графики функций  $dF/d\xi$  при различных значениях  $\mu$ , полученные путем непосредственного вычисления по формулам (2.7). Как видно из этих

